سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعہ عثمانیہ

علم مثلث مستوی

تصنیف

ای۔ ڈبلیو۔ ہابسن۔ ایس سی ڈی، ایل۔ ایل۔ ڈی، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)

رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۵ھ م سنہ ۱۳۴۵ف م سنہ ۱۹۳۶ء

۴۸۶/۹۲

فہرست مضامین

علم مثلث مستوی

پہلا باب

زاویٔ مقداروں کی پیمائش

(ش)

دوسرا باب

دفعات | مضمون | صفحہ

خطوں کی پیمائش۔ ظِل

تیسرا باب

دائری تفاعل

چوتھا باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائری تفاعل

پانچواں باب

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

دفعات	مضمون	صفحہ

چھٹا باب
مختلف مسئلے

ساتواں باب
ضِعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

دفعات	مضمون	صفحہ
	ساتویں باب پر مثالیں۔	۱۹۶

آٹھواں باب

ایک زاویے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان رشتے

نواں باب

مثلثی جدولیں

دسواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

گیارہواں باب

مثلثوں کا حل

بارھواں باب

مثلثوں اور ذو اربعۃ الاضلاعوں کے خواص

تیرھواں باب

دفعات	مضمون	صفحہ

ملتف اعداد

چودھواں باب

لامتناہی سلسلوں کا نظریہ

پندرھواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکارتم

دفعات	مضمون	صفحہ
۲۵۱	گریگوری کا سلسلہ۔	۵۱۹
۲۵۱ (ا) تا ۲۵۱ (ج)	دائرہ کی تربیع۔	۵۲۱
۲۵۲ تا ۲۵۴	دائرہ کی تقریبی تربیع۔	۵۳۰
۲۵۵	مثلثی متماثلات۔	۵۳۳
۲۵۶ تا ۲۵۷	سلسلوں کا جمع کرنا۔	۵۳۵
	پندرہویں باب پر مثالیں۔	۵۴۰

سولہواں باب

زائدی تفاعلات

دفعات | مضمون | صفحہ

سترھواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

اٹھارواں باب

مسلسل کسریں

علم مثلث مستوی

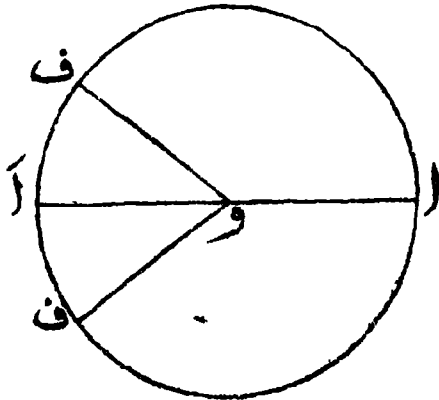
پہلا باب

زاوئی مقداروں کی پیمائش

۱ ۔ علم مثلث مستوی کا اولین مقصد، مستوی مثلثوں کو حل کرنے کا طریقہ دریافت کرنا ہے۔ مستوی مثلث میں تین ضلع اور تین زاویے ہوتے ہیں اور اگر ان چھ اجزاء میں سے کسی تین کی مقداریں دی جائیں اور ان دئیے ہوئے اجزا میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو بعض شرطوں کے تحت باقی اجزاء کی مقداروں کی تعیین کرنا ممکن ہے، اس کو مثلث کا حل کرنا کہتے ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ علم مثلث مستوی کے اس اولین مقصد کو حاصل کرنے میں زاوئی مقدار کے بعض تفاعلوں کو داخل کرنا ضروری ہوگا۔ یہ تفاعل دائری تفاعل کے نام سے موسوم کئے جاتے ہیں۔ اسی طرح وسیع مفہوم میں علم مثلث مستوی میں ان دائری تفاعلوں کے خواص کی تحقیق اور تحلیلی اور ہندسی تحقیقاتوں میں ان خواص کے اطلاقات بھی شامل ہیں جو مثلثوں کے حل سے تعلق نہیں رکھتے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین

۲۔ اقلیدسی ہندسہ میں جن زاویوں پر بحث ہوتی ہے وہ سب کے سب دو قائمہ زاویوں سے کم ہوتے ہیں، لیکن علم مثلث مستوی کے مقاصد کے لئے زاویٔ مقدار کے تخیل کی توسیع کرنا ضروری ہے تاکہ تمام مثبت اور منفی مقداروں کے زاویے شامل ہو جائیں۔

فرض کرو کہ و ا ایک ثابت خط مستقیم ہے اور ایک خط مستقیم و ف جو ابتداء میں و ا پر منطبق ہوتا ہے نقطہ و کے گرد مخالف سمت ساعت گھومتا ہے، تب جیسے وہ گھومتا ہے زاویہ ا و ف کی تکوین کرتا ہے اور جب و ف محل و اَ پر پہنچتا ہے تو وہ دو قائمہ زاویوں کے مساوی ایک زاویہ کی تکوین کر چکتا ہے اور پھر اگر وہ اسی سمت میں گھومنا جاری رکھے تو وہ پھر آکے و ا پر منطبق ہوتا ہے، اب وہ چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم چکا ہوتا ہے؛ پھر ہم فرض کر سکتے ہیں کہ و ف اسی سمت میں گھومنا جاری رکھتا ہے اور و کے گرد متعدد مکمل چکر پورے کرتا ہے؛ ہر دفعہ جب وہ ایک مکمل گردش کر لیتا ہے تو وہ چار قائمہ زاویے مرتسم کرتا ہے، اور اگر وہ کسی محل و ف میں رک جائے تو وہ ایک ایسے زاویہ کی تکوین کر چکا ہوگا جو ف کے محل کے (۲)

مطابق کسی مطلق مقدار سے تعبیر ہو سکتا ہے۔ اب ہم یہ قرارداد اختیار کرینگے کہ زاویہ مرتسمہ مثبت ہے جبکہ و ف مخالف سمت ساعت گھومے اور منفی ہے جبکہ و ف اسکی مخالف سمت میں یعنی سمت ساعت کے موافق گھومے۔ یہ قرارداد بالکل اختیاری ہے، اگر ہم چاہتے تو موافق سمت ساعت کو مثبت زاویے کے لئے لے سکتے تھے۔

اب ہماری قرارداد کی بموجب جب، و ف، مخالف سمت ساعت ایک مکمل گردش کرلیتا ہے تو وہ چار مثبت قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے، اور جب وہ موافق سمت ساعت ایک مکمل گردش کرلیتا ہے تو وہ چار منفی قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتا ہے۔

کسی مقدار کے زاویہ کی تکوین مثال ذیل سے واضح ہو سکتی ہے:۔ اس زاویہ پر غور کرو جو گھڑی کی بڑی سوئی سے تکوین پاتا ہے۔ ہر گھنٹہ میں یہ سوئی چار قائمہ زاویوں میں سے گھوم جاتی ہے اور جتنی مرتبہ گھوم چکتی ہے اس کا کوئی نشان نہیں چھوڑتی؛ لیکن یہ کام چھوٹی سوئی سے انجام پاتا ہے جو ایک گھنٹہ میں چار قائمہ زاویوں کا صرف بارہواں حصہ گھومتی ہے اور اس طرح بارہ گھنٹے سے کم کسی وقت میں وہ زاویہ ناپ سکتے ہیں جس میں سے بڑی سوئی گھوم چکی ہے۔ اب اس غرض کے لئے کہ بڑی سوئی سے تکوین یافتہ زاوئے مثبت ہوں اور اس کا ابتدائی محل اوپر کی شکل کے محل کے مطابق ہو سکے ہمیں یہ فرض کرنا پڑے گا کہ سوئیاں اس سمت کے مخالف گھومتی ہیں جس میں کہ وہ فی الواقعی گھوم رہی ہیں اور بارہ بجے کی بجائے تین بجے ایک دوسرے پر منطبق ہوتی ہیں۔

(3) ۳۔ فرض کرو کہ گھومنے والے خط کا آخری محل (بموجب شکل) و ف ہے۔ وہ زاویہ جو اس نے محل و ا سے محل و ف تک گھومنے میں مرتسم کیا ہے بے شمار مثبت اور منفی زاویوں میں سے ایک ہو سکتا ہے بلحاظ ان مکمل گردشوں کی تعداد اور سمت کے جو گھومنے والے خط نے کئے ہیں۔ ایسے کسی دو زاویوں میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف کا فرق ہوگا۔ ہم ان تمام زاویوں کو جو خطوط و ا، و ف سے محدود ہوتے ہیں ہم اختتامی زاوئے کہیں گے اور انکو (و ا، و ف)

سے تعبیر کریں گے، زاویوں (و ا، و ف) میں سے مقداراً چھوٹے سے
چھوٹا زاویہ اقلیدسی زاویہ ا و ف ہے، اور باقی سب زاویئے زاویے
ا و ف کی جبری قیمت میں چار قائمہ زاویوں کے مثبت یا منفی ضعف جمع
کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

زاویوں کی عددی پیمائش

۴۔ یہ بتا دینے کے بعد کہ کسی مثبت یا منفی مقدار کے زاویہ سے
کیا مراد ہے دوسرا کام زاویوں کی پیمائش سے متعلق ہے اور انکی عددی
پیمائش کے لئے ایک نظام کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ اس مقصد کے
لئے ہمیں ایک اکائی زاویہ کا فیصلہ کر لینا چاہیئے جو مستقل مقدار کا اختیاری
طور پر منتخب کردہ کوئی زاویہ ہو سکتا ہے، تب باقی سب زاویوں کی پیمائش
اُن نسبتوں سے ہو سکتی ہے جو ان کو اس اکائی زاویہ کے ساتھ ہوں۔ ظاہر ہے کہ
زاویہ قائمہ فطری اکائی ہے جو لیجا سکتی ہے لیکن چونکہ معمولی مقدار
کے زاویئے اس صورت میں ایک سے چھوٹی کسروں سے تعبیر ہونگے
اس لئے اس سے چھوٹے زاویہ کو اکائی مقرر کرنا زیادہ سہولت بخش ہے
عام طور پر جو اکائی مستعمل ہے وہ درجہ ہے جو زاویہ قائمہ کا نوّدواں
حصہ ہے۔ پھر درجہ کے کسرات سے بچنے کے لئے درجہ کو ساٹھ حصوں
میں تقسیم کیا گیا ہے جن کو دقیقہ کہتے ہیں اور نیز دقیقہ کو ساٹھ حصوں میں تقسیم کیا گیا
ہے جنکو ثانیہ کہتے ہیں۔ ایک ثانیہ سے کمتر زاویوں کو ثانیہ کے اعشاریہ
کے طور پر بیان کیا جاتا ہے۔ ثالثہ جو ثانیہ کا ساٹھواں حصہ ہو سکتا
ہے استعمال نہیں کیا جاتا۔ د درجوں کے زاویہ کو د° سے تعبیر کیا جاتا
ہے، م دقیقوں کے زاویہ کو م′ سے اور ن ثانیوں کے زاویہ کو ن″
سے۔ اس طرح زاویہ د° م′ ن″ سے مراد وہ زاویہ ہے جس میں د درجے
+ م دقیقے + ن ثانئے شامل ہیں اور وہ زاویہ قائمہ کے

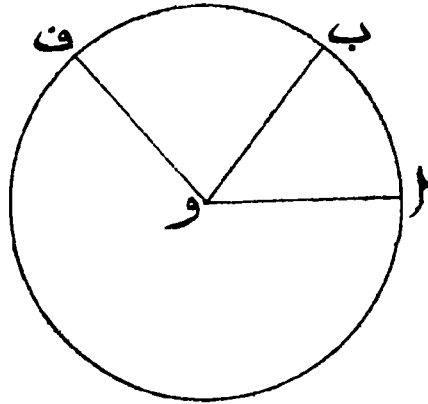
$$\frac{د}{۹۰} + \frac{م}{۶۰ \times ۹۰} + \frac{ن}{۶۰ \times ۶۰ \times ۹۰}$$ کے مساوی ہے۔

زاویوں کی عددی پیمائش کا یہ نظام ستینی نظام کہلاتا ہے۔ مثلاً زاویہ ۲۳° ۱۴′ ۵۶٫۴″، زاویہ قائمہ کا $\frac{۲۳}{۹۰} + \frac{۱۴}{۶۰ \times ۹۰} + \frac{۵۶٫۴}{۶۰ \times ۶۰ \times ۹۰}$ ہے۔

(4) یہ تجویز پیش کی گئی تھی کہ زاویوں کی پیمائش کا اعشاری نظام استعمال کیا جائے۔ اس نظام میں زاویہ قائمہ سو مرتبوں (Grades) میں تقسیم کیا جاتا ہے، مرتبہ سو دقیقوں میں اور دقیقہ سو ثانیوں میں، تب گ مرتبوں م دقیقوں اور ن ثانیوں کے زاویہ کو گ م ن لکھا جاتا ہے۔ مثلاً زاویہ ۳۴ گ ۹ م ۲٫۴ ن زاویہ قائمہ کے ۰٫۳۴۰۹۰۲۴ کے مساوی ہے۔ لیکن یہ نظام کبھی بھی استعمال نہیں ہوا، خصوصاً اس وجہ سے کہ وقت کو طول بلد کے مرتبوں میں تبدیل کرنا ذرا تکلیف دہ ہے تاوقتیکہ دن کی تقسیم موجودہ صورت کے علاوہ کوئی اور نہ کی جائے۔ اگر مرتبوں کا نظام اختیار کیا جاتا تو دن ۲۴ گھنٹوں کی بجائے چالیس گھنٹوں میں تقسیم کیا جا سکتا تھا اور گھنٹہ ایک سو دقیقوں میں اور یہ امر وقت پیماؤں میں تغیر کرنے کو مستلزم ہوتا۔ وقت کے اس نظام کا ایک گھنٹہ طول بلد کے $\frac{۵}{۲}$ مرتبوں کے فرق کے متناظر ہے، جو کسری ہونے کی وجہ سے تکلیف دہ ہے۔

یہ ایک دلچسپ واقعہ ہے کہ بابلیوں (Babylonians) نے بھی چار قائمہ زاویوں کی ۳۶۰ حصوں میں تقسیم کو استعمال کیا تھا۔ انھوں نے چار قائمہ کو اس تعداد میں کیوں تقسیم کیا اس بارے میں بہت قیاس آرائیاں کی گئی ہیں۔

زاویوں کی دائری پیمائش

۵۔ تمام خالص عملی مقاصد میں زاویوں کی عددی پیمائش کا ستینی نظام بالعموم استعمال کیا جاتا ہے لیکن نظری مقاصد کے لئے زاویہ کی ایک مختلف اکائی لینا زیادہ سہولت بخش ہے۔ کسی دائرہ میں جس کا مرکز و ہے فرض کرو کہ ا ب ایک قوس ہے جس کا طول

دائرے کے نیم قطر کے مساوی ہے تو ہم ثابت کریں گے کہ زاویہ او ب کی مقدار مستقل ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہے۔ اس زاویہ کو نیم قطری یا دائری ناپ کی اکائی کہا جائے گا اور کسی دوسرے زاویہ کی مقدار کو اُس نسبت سے بیان کیا جائے گا جو اس کو اکائی زاویہ کے ساتھ ہو اور یہ نسبت زاویہ کا دائری ناپ کہلائیگی۔

(۵)

۶۔ اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ نیم قطری ایک مستقل زاویہ ہے ہم حسب ذیل دو مسئلے مان لیں گے:۔

(ا) ایک ہی دائرہ میں مختلف قوسوں کے طول ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کے محاذی مرکز پر بننے والے زاویوں میں ہوتی ہے۔

(ب) دائرے کے پورے محیط کا طول قطر کے ساتھ ایک ایسی نسبت رکھتا ہے جو سب دائروں کے لئے ایک ہی ہے۔

مسئلہ (ا) اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ میں ہے اور مسئلہ (ب) کا ثبوت اس باب کے ختم پر دیا گیا ہے۔ (ا) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{\text{قوس اب}}{\text{دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{زاویہ اوب}}{\text{۴ قائمہ زاویے}}$$

چونکہ قوس اب دائرہ کے نیم قطر کے مساوی ہے ان نسبتوں میں سے پہلی نسبت مسئلہ (ب) کی رو سے تمام دائروں کے لئے ایک

ہی ہے، اس لئے زاویہ ا و ب مستقل مقدار کا ہے اور کسی خاص دائرہ پر منحصر نہیں ہے۔

۷۔ آگے چل کر یہ بتایا جائے گا کہ دائرہ کے محیط اور اس کے قطر میں جو نسبت ہوتی ہے وہ ایک غیر منطق عدد ہے، یعنی ہم صحیح اعداد م اور ن معلوم نہیں کر سکتے ایسے کہ م/ن ٹھیک ٹھیک اس نسبت کے مساوی ہو۔ ہم کسی آئندہ باب میں وہ مختلف طریقے بیان کریں گے جو اس نسبت کی قیمت تقریبی طور پر محسوب کرنے میں استعمال ہوتے ہیں۔ یہ نسبت بالعموم π سے تعبیر کیجاتی ہے۔ فی الحال یہ کہنا کافی ہے کہ π صرف ایک غیر مختتم غیر متوالی اعشاریہ کی شکل میں حاصل کیا جا سکتا ہے اور اس کی قیمت اعشاریہ کے بیس مقامات تک یہ ہے

۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶

اکثر تقریبی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹ کا استعمال کرنا کافی ہوگا۔ نسبتیں

$\frac{۲۲}{۷}$ = ۳٫۱۴۲۸۵۷، $\frac{۳۵۵}{۱۱۳}$ = ۳٫۱۴۱۵۹۲۹ بھی π کی تقریبی قیمتوں کے طور پر استعمال کیجا سکتی ہیں کیونکہ وہ علی الترتیب اعشاریہ کے دو اور چھ مقامات تک π کی صحیح قیمت کے مطابق ہیں۔

۸۔ ہم بتا چکے ہیں کہ نیم قطری کو چار قائمہ زاویوں کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ایک دائرہ کے نصف قطر کو اس کے محیط کے ساتھ ہے

پس نیم قطری $\frac{۲}{\pi}$ × ایک زاویہ قائمہ کے مساوی ہے؛ اب چونکہ زاویہ قائمہ °۹۰ کا ہوتا ہے اس لئے π کی تقریبی قیمت ۳٫۱۴۱۵۹۲۷ استعمال کرنے سے، ہمیں نیم قطری کی تقریبی قیمت درجوں میں °۵۷٫۲۹۵۷۷۹۶ حاصل ہوتی ہے یعنی درجہ کے اعشاری حصہ کو دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرنے سے °۵۷ ′۱۷ ″۴۴٫۸ —

گلیشر (Glaisher) نے نیم قطری کی قیمت ثانیوں میں اعشاریہ

کے ۱۲۸ مقامات تک صحیح محسوب کی ہے[1]۔ $\frac{1}{\pi}$ کی قیمت اعشاریہ کے ۱۴۱ مقامات تک حاصل کیجا چکی ہے[2]۔

۹۔ زاویہ قائمہ کا دائری ناپ $\frac{1}{2}\pi$ ہے، اور دو قائمہ زاویوں کا π،

اور اب ہم درجوں میں دیئے ہوئے کسی زاویہ کا دائری ناپ معلوم کر سکتے ہیں، اور اس کے برعکس نیم قطری میں دیئے ہوئے کسی زاویہ کو درجوں میں بیان کر سکتے ہیں؛ اگر ایک زاویہ میں د درجے ہوں اور اس کا دائری ناپ ط ہو تو $\frac{ط}{\pi} = \frac{د}{۱۸۰}$ کیونکہ ان میں سے ہر ایک نسبت اُس نسبت کو ظاہر کرتی ہے جو دئے ہوئے زاویہ کو دو قائموں کے ساتھ ہے؛ پس د درجوں کے زاویہ کا دائری ناپ $\frac{\pi}{۱۸۰}$ د ہے اور دائری ناپ ط کے زاویہ میں درجوں کی تعداد $\frac{۱۸۰}{\pi}$ ط ہے، اگر زاویہ درجوں دقیقوں اور ثانیوں میں دیا جائے جیسے $د^{\circ}$ $م'$ $ن''$ تو اس کا دائری ناپ یہ ہے

$$(د + م/۶۰ + ن/۳۶۰۰)\pi/۱۸۰$$

۱° کا دائری ناپ ۰٫۰۱۷۴۵۳۲۹.... ہے، $۱'$ کا ۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲.... اور $۱''$ کا ۰٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۰....

۱۰۔ قوس ا ف کے محاذی دائرہ کے مرکز پر کے زاویہ ا و ف کا دائری ناپ

$$\frac{قوس\ ا\ ف}{دائرہ\ کا\ نصف\ قطر}$$

---

[1] دیکھو کوارٹرلی جرنل جلد چہارم مضمون On the calculation of the value of the theoritical unit angle to a great number of places.

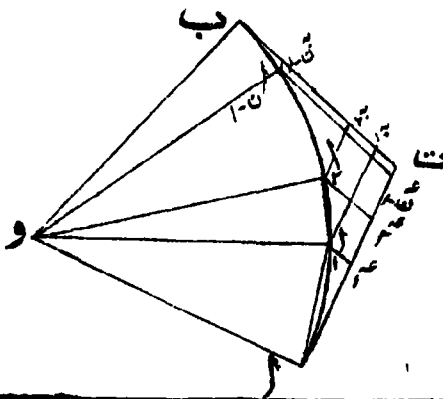
[2] دیکھو Grunert's Archiv جلد اول سنہ ۱۸۴۱ء۔

کے $\frac{\text{زاویہ او ف}}{\text{زاویہ او ب}}$ یعنی $\frac{\text{قوس اف}}{\text{قوس اب}}$ نسبت کیونکہ یہ، ہے مساوی کے
مساوی ہے۔

قوس اف پورے محیط سے بڑی ہو سکتی ہے اور اس کو مثبت یا منفی طور پر ناپا جا سکتا ہے اُس سمت کی بموجب جس میں وہ ابتدائی نقطہ ا سے ناپی گئی ہے؛ اس طرح کسی مقدار کے زاویہ کا دائری ناپ وہ نسبت ہے جو اس قوس کے طول کو جس کے محاذی زاویہ بنتا ہے دائرے کے نیم قطر کے ساتھ ہے۔ نیم قطر ر والے دائرہ کی قوس کا طول رطہ ہوتا ہے جبکہ طہ اس زاویہ کا دائری ناپ ہو جو اس قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر بنتا ہے۔ اس طرح دائرہ کا پورا محیط ۲ π ر ہے۔

دائری قوس کا طول

(7)

۱۱۔ اوپر یہ مان لیا گیا ہے کہ دائری قوس کا طول وجود رکھتا ہے اور قوس کی عددی پیمائش ہو سکتی ہے، اس امر کی اب تحقیق کیجائے گی۔ طول کا اصلی تخیل ایک خطی وقفہ کا تخیل ہے یعنی خط مستقیم کا ایک محدود حصہ، اور منحنی کی قوس کے طول (مثلاً دائری قوس کا طول) کے تخیل کو اس سے ماخوذ سمجھنا چاہئیے۔ ہم تسلیم کریں گے کہ خط مستقیم کے ایک دے ہوئے محدود حصہ کا طول وجود رکھتا ہے اور اسے ایک محدود منطق یا غیر منطق عدد سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جو طول کی کسی مقررہ اکائی پر منحصر ہوتا ہے۔ اب دائری قوس اب کے طول کو معلوم کرنے کے لئے ہم حسب ذیل

عمل کرتے ہیں:۔ فرض کرو کہ قوس ا ب متعدد نقطوں $ا_1$، $ا_2$، ...، $ا_{ن-1}$ پر تقسیم کی گئی ہے؛ اندرونی نا بند کثیر ضلعی ا $ا_1$ $ا_2$ ... $ا_{ن-1}$ ب پر غور کرو۔ اس کثیر ضلعی کے ضلعوں کے طولوں کے مجموعہ ا $ا_1$ + $ا_1$ $ا_2$ + ... + $ا_{ن-1}$ ب کی ایک محدود قیمت $ف_1$ ہے۔ پھر قوس ا ب کے اندر ایک نیا کثیر ضلعی ا $اَ_1$ $اَ_2$ ... $اَ_{نَ-1}$ ب بناؤ جس میں نَ > ن اور اس کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع کثیر ضلعی ا $ا_1$ $ا_2$ ... ب کے بڑے سے بڑے ضلع سے چھوٹا ہو؛ فرض کرو کہ اس نئے نا بند کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ $ف_2$ ہے۔ اسی طرح قوس ا ب کی متواتر تقسیم در تقسیم جاری رکھنے سے ہمیں اندرونی نا بند کثیر ضلعیوں کا ایک تواتر ملتا ہے جنکے ضلعوں کے طولوں کے مجموعے اعداد $ف_1$، $ف_2$، ... $ف_ن$ ... کے ایک تواتر سے تعبیر ہو سکتے ہیں اور یہ تواتر غیر محدود طور پر جاری رکھا جا سکتا ہے۔ اگر عدد $ف_ن$ کی ایک معین انتہا ل ہو جو قوس ا ب کی متواتر تقسیم در تقسیم کے طریقہ پر منحصر نہ ہو اور صرف اس شرط کے تحت ہو کہ $ف_ن$ کے جواب میں نا بند کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جبکہ ن لا انتہا بڑا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوس ا ب کا طول ل ہے۔ یہ دکھانے کے لئے کہ دائری قوس طول رکھتی ہے یہ دکھانا ضروری ہے کہ یہ انتہا ل موجود ہے، اور اب ہم اسے ثابت کریں گے۔ تعریف سے یہ واضح ہے کہ اگر ا ب ج ایک قوس ہو اور ا ب، ب ج کے طول معین ہوں تو ا ج کا طول بھی معین ہوگا، اور ا ب ج کا طول قوس ا ب، ب ج کے طولوں کا مجموعہ ہوگا۔ اس لئے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ کوئی قوس جو نصف دائرہ سے کم ہے معین طول رکھتی ہے۔ اول ہم کثیر الاضلاعوں کے اس مخصوص تواتر پر غور کرتے ہیں جس میں ہر کثیر ضلعی کے راس تواتر کے

(8)

باقی سب کثیر ضلعوں کے راس بھی ہیں۔ اِن نا بند کثیر الاضلاعوں کے طولوں کو ف_1، ف_2، ... $\text{ف}_\text{ن}$، ... سے تعبیر کرکے یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$\text{ف}_1 < \text{ف}_2 < \dots < \text{ف}_\text{ن} \dots$$

کیونکہ مبادی علم ہندسہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ $\text{ل}_\text{ر}\,\text{ل}_{\text{ر}+1}$ طول میں $\text{ل}_\text{ر}$ اور $\text{ل}_{\text{ر}+1}$ کو ملانے والے ایک نابند کثیر ضلعی کے ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہے نیز اعداد ف_1، ف_2، ... $\text{ف}_\text{ن}$ ... سب کے سب ایک مستقل عدد سے کم ہیں۔ کیونکہ فرض کرو کہ قوس ا ب کے سروں ا ب پر مماس ت ا، ت ب ہیں، ب ت کے متوازی $\text{ل}_1\text{ع}_1$، ... $\text{ل}_{\text{ن}-1}\text{ع}_{\text{ن}-1}$ کھینچو اور نیز ا ت کے متوازی $\text{ل}_1\text{ب}_1$، $\text{ل}_2\text{ب}_2$، ... $\text{ل}_{\text{ن}-1}\text{ب}_{\text{ن}-1}$ کھینچو۔

$$\text{ا}\,\text{ل}_1 < \text{ا}\,\text{ع}_1 + \text{ل}_1\text{ع}_1 < \text{ا}\,\text{ع}_1 + \text{ت}\,\text{ب}_1$$

اور $\quad \text{ل}_1\text{ل}_2 < \text{ع}_1\text{ع}_2 + \text{ب}_1\text{ب}_2$ وغیرہ

پس $\quad \text{ا}\,\text{ل}_1 + \text{ل}_1\text{ل}_2 + \dots + \text{ل}_{\text{ن}-1}\text{ب} < \text{ا}\,\text{ت} + \text{ب}\,\text{ت}$

اسلئے $\quad \text{ف}_\text{ن} < \text{ا}\,\text{ت} + \text{ب}\,\text{ت}$

اب انتہاؤں کے نظریہ کے ایک اساسی اصول کی بموجب، چونکہ عددوں ف_1، ف_2، ... $\text{ف}_\text{ن}$ ... کا تواتر ایسا ہے کہ ہر ایک اپنے بعد والے عدد سے کم ہے اور نیز ان میں سے سب عدد ایک مستقل عدد سے کم ہیں اسلئے تواتر کی ایک انتہا ل ہے ایسی کہ اگر حہ ایک اختیاری مثبت عدد خواہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک خاص قیمت ن_1 ایسی دریافت ہوسکتی ہے کہ اس سے بڑی ن کی تمام قیمتوں کے لئے $\text{ف}_\text{ن}$ ل سے

فرق صہ سے چھوٹا ہو۔

اگر ا، ب کو ملانے والے کثیر ضلعی جن کے طول ف، ف، ... ف،
.... ہیں خواہ کیسے ہی ہوں اور اگر وہ اس شرط کے ماتحت نہ ہوں
کہ ہر ایک کے راس باقی دوسروں کے راس ہیں لیکن صرف اس شرط
کے ماتحت ہوں کہ ن جن کثیر ضلعی کا بڑے سے بڑا ضلع گھٹتا ہے جیسے
ن بڑھتا ہے اور اس کی انتہا صفر ہے تو ہم اس صورت میں تواتر
ف، ف، ... ، ... کا متعابلہ متذکرہ خاص تواتر کے ساتھ کرتے
ہیں جس کے متعلق یہ دکھایا جا چکا ہے کہ کثیر ضلعیوں کے طولوں کی ایک
معین انتہا ل موجود ہے۔ فرض کرو کہ اس خاص تواتر ف، ف، ....
سے متعلق ایک خاص کثیر ضلعی ا ا ا ... ا ب ایسا ہے جس کا طول
ل ۔ صہ سے بڑا ہے۔

اب ایک صحیح عدد نَ معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ اگر ن ≥ نَ
تو کثیر ضلعی ا عہ بہ جہ ..... کہ .... ب میں جس کا طول ف ہے بڑے
سے بڑا ضلع کثیر ضلعی ا ا ا ... ا ب کے چھوٹے سے چھوٹے ضلع
سے کم ہے اور نیز صہ سے کم ہے۔ تب نقطوں عہ، بہ، جہ، ... میں سے
بعض نقطے قوسوں ا ا، ا ا ... میں سے ہر ایک میں واقع ہیں۔ فرض کرو
کہ ا ا میں عہ، بہ، جہ واقع ہوتے ہیں، تب

ا عہ + عہ بہ + بہ جہ + جہ ا > ا ا

یہ اور اس قسم کی نامساواتیں ا صفہ + ثمہ صہ + ... +
کہ ا > ا ا وغیرہ استعمال کرنے سے اور چونکہ جہ ا، ا صفہ، ....

سب کے سب $\frac{صہ}{۲ر}$ سے کم ہیں ہیں حاصل ہوتا ہے

$$ف_ن + صہ > ا ا_۱ + ا_۱ ا_۲ + \dots + ا_{ر-۱} ب > ل - صہ،$$

اسلئے $ف_ن > ل - ۲ صہ$، بشرطیکہ $ن \geqslant \bar{ن}$

پھر کثیر ضلعی $ا\ ا_۱\ ا_۲ \dots ب$ پر جو اُس تواتر کا ہے جن کے طول $ف_۱$، $ف_۲$، … ہیں غور کرو جبکہ یہ کثیر ضلعی اتنے آگے کا ہے کہ اس کا بڑے سے بڑا ضلع $ا د$، $ب ج$ … $ک ب$ کے چھوٹے سے چھوٹے ضلع سے کم ہے اور نیز $\frac{صہ}{۲ س}$ سے کم ہے جہاں اس آخری کثیر ضلعی میں ضلعوں کی تعداد س ہے۔ پہلے کی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ف_ن < صہ + ا ا'_۱ + ا'_۱ ا'_۲ + \dots < ل + صہ$$

لیکن یہ بتایا جا چکا ہے کہ اگر $ن \geqslant \bar{ن}$ تو $ف_ن$، $ل + صہ$ اور $ل - ۲ صہ$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور اس لئے $ف_ن$ اور ل میں ۲ صہ سے کم فرق ہے۔ اب چونکہ صہ کا انتخاب اختیاری ہے اور اس کی ہر قیمت کے جواب میں ایک صحیح عدد $\bar{ن}$ حاصل ہوتا ہے اسلئے یہ ثابت ہوا کہ ن کو لا انتہا بڑھانے پر $ف_ن$ کی وہی انتہا ل ہوتی ہے جو کثیر الاضلاعوں کے اُس خاص تواتر کی ہے جس پر ہم نے پہلے غور کیا ہے۔

پس یہ ثابت ہوا کہ دائری قوس کا طول ایک معین عدد سے ناپا جا سکتا ہے جبکہ طول کی کوئی اکائی مان لی جائے۔

پورے دائرہ کا محیط ھ بھی اُن اندرونی بند کثیر الاضلاعوں کے گھیروں کے تواتر کی انتہا معلوم کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے جبکہ بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جائے جیسے تواتر آگے بڑھے۔

اب اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳۳ کے مطابق یہ ثابت کیا جائیگا

کہ ایک ہی دائرے کی مختلف قوسوں کے طولوں میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان قوسوں کے محاذی بننے والے زاویوں میں ہے۔
یہ ثابت کرنے کے لئے کہ دائروں کے محیط ایسے بدلتے ہیں جیسے ان کے قطر فرض کرو کہ دو دائرے ہیں جن کے قطر ق اور قَ ہیں اگر دو متشابہ کثیر ضلعی ان دائروں کے اندر بنائے جائیں تو متشابہ مستقیم الاضلاع اشکال کے خواص کی بناء پر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ان کثیر الاضلاعوں کے گھیرے ایک دوسرے کے ساتھ وہی نسبت رکھتے ہیں جو ق اور قَ میں ہے۔ اب دائروں کے محیط م اور مَ کو ان انتہاؤں کے برابر سمجھا جا سکتا ہے جو کثیر الاضلاعوں کے دو تواتروں کے گھیروں فن، فَن کی ہیں جبکہ ن کے متناظر کثیر ضلعی ن کی ہر قیمت کے لئے، اس کثیر ضلعی کے متشابہ ہو جو ن کے جواب میں ہے۔ اب (10)

چونکہ فن : فَن = ق : قَ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فن کی انتہا کو فَن کی انتہا کے ساتھ جو نسبت ہے وہ نسبت ق : قَ کے مساوی ہے؛ اور اس لئے

$$م : مَ = ق : قَ$$

دائرہ کے قطاع کا رقبہ

۱۴۔ فرض کرو کہ دائرہ کا مرکز و ہے ۔ اس کی کسی قوس اب سے جو قطاع محدود ہوتا ہے اس کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ مثلثوں و ا ا۱، و ا۱ ا۲ ... و ان-۱ ب کے رقبوں کے مجموعے کی انتہا ہے جبکہ کثیر ضلعی ا ا۱ ا۲ ... ان-۱ ب کے ضلعوں کی تعداد لا انتہا بڑی ہو اور اس کا بڑے سے بڑا ضلع لا انتہا چھوٹا ہو جیسا کہ دفعہ (۱۱) میں بتایا جا چکا ہے۔ یہ ثابت کرنا لازم ہوگا کہ یہ انتہا موجود ہے اور ایک

معین عدد کے برابر ہے۔

فرض کرو کہ و سے ضلعوں $\text{ا ا}_{\text{۱}}$، $\text{ا}_{\text{۱}}\text{ا}_{\text{۲}}$ ... $\text{ا}_{\text{ن-۱}}\text{ب}$ پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول $\text{ق}_{\text{۱}}$، $\text{ق}_{\text{۲}}$ ... $\text{ق}_{\text{ن}}$ ہیں، تب مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ ہے

$$\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\text{ق}_{\text{۱}}\times\text{ا ا}_{\text{۱}}+\text{ق}_{\text{۲}}\times\text{ا}_{\text{۱}}\text{ا}_{\text{۲}}+\cdots+\text{ق}_{\text{ن}}\times\text{ا}_{\text{ن-۱}}\text{ب}\right)$$

اور یہ مجموعہ، $\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{قَ}\times\text{ف}_{\text{ن}}$ اور $\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{قً}\times\text{ف}_{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے جہاں قَ اور قً عددوں $\text{ق}_{\text{۱}}$، $\text{ق}_{\text{۲}}$ ... $\text{ق}_{\text{ن}}$ میں سے علی الترتیب بڑے سے بڑے اور چھوٹے سے چھوٹے عدد ہیں اور $\text{ف}_{\text{ن}}$ کثیر ضلعی کے ضلعوں کا مجموعہ ہے۔ $\text{ف}_{\text{ن}}$ کی انتہا موجود ہے کیونکہ یہ قوس اب کا طول ہے۔ نیز عددوں قَ، قً کی ایک ہی انتہا ہے اور وہ دائرہ کا نصف قطر ہے کیونکہ ان میں اور نصف قطر میں کثیر ضلعی کے بڑے سے بڑے ضلع کے نصف سے کم کا فرق ہے۔ پس قطاع کا رقبہ ایک محدود عدد ہے جو دائرہ کے نصف قطر ر اور قوس اب کے طول ر ط کے نصف حاصل ضرب کے مساوی ہے، جہاں ط، زاویہ او ب کا دائری ناپ ہے۔ اس طرح رقبہ او ب = $\tfrac{\text{۱}}{\text{۲}}$ ر۲ ط۔ پورا دائرہ ایک قطاع خیال کیا جاسکتا ہے جس کو محدود کرنے والی قوس پورا محیط ہے؛ پس پورے دائرہ کا رقبہ π ر۲ ہے۔

باب اول پر مثالیں

۱۔ پیمایش کی اکائی کیا ہونی چاہیے کہ اس کے لحاظ سے کسی زاویہ کا عددی ناپ اُس فرق کے مساوی ہو سکے جو درجوں اور دائری ناپ میں بیان کرنے پر اس کے عددی ناپوں کے درمیان ہوتا ہے۔

۲۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کے ناپ، اکائیوں ۱°، ۱'، ۱" کے لحاظ سے ۲، ۱، ۳ کی نسبت میں ہوں تو زاویے معلوم کرو۔

۳۔ ن ضلعوں والے ایک منتظم کثیر ضلعی کے ایک زاویے میں درجوں کی تعداد معلوم کرو
(۱) جبکہ وہ محدب ہو، (۲) جبکہ اس کا گھیرا اندرونی دائرہ کو م مرتبہ احاطہ کرے۔

۴۔ ایک مثلث کے دو زاویے ۲۵° ۳۵' ۱۵"، ۱۴° ۲۲' ۵۰" ہیں تیسرا زاویہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے اس کی اس قوس کا طول اعشاریہ کے پانچ مقامات تک معلوم کرو جس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر ۱° کا زاویہ بنتا ہے۔

۶۔ ایک زاویے کو مرتبوں اور درجوں میں ناپا گیا ہے اور معلوم ہوا کہ ان کا فرق $\frac{\text{زاویے کا دائری ناپ}}{2\pi}$ کے مساوی ہے۔ زاویہ معلوم کرو۔

۷۔ ایک مستوی چار ضلعی کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑے زاویے اور سب سے چھوٹے زاویہ کا فرق ایک زاویہ قائمہ ہے۔ ہر زاویہ کو درجوں میں ناپو اور نیز دائری ناپ میں۔

۸۔ دو مثلثوں میں سے ہر ایک کے زاویے سلسلہ ہندسیہ میں ہیں، ایک مثلث کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ دوسرے مثلث کے چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا تین گنا ہے اور ان کے بڑے سے بڑے زاویوں کا مجموعہ ۲۴۰° ہے۔ زاویوں کا دائری ناپ معلوم کرو۔

۹۔ اگر ۸ فٹ قطر کے ایک دائرہ کی ۱۰ فٹ طول کی قوس ۱۴۳° ۱۴' ۲۲" کا زاویہ مرکز پر بنائے تو π کی قیمت اعشاریہ کے چار مقامات تک معلوم کرو۔

۱۰۔ دو منتظم شکلیں معلوم کرو ایسی کہ ایک کے ایک زاویے کے درجوں کی تعداد کو دوسرے کے ایک زاویے کے درجوں کی تعداد سے دہی

نسبت ہو جو ایک کے ضلعوں کی تعداد کو دوسرے کے ضلعوں کی تعداد سے ہے۔

۱۱ — ا ب ج ایک مثلث ہے ایسا کہ جب اس کے ہر زاویہ کو یکے بعد دیگرے پیمائش کی اکائی قرار دیجاتی ہے اور دوسرے دو زاویوں کے مجموعہ کے ناپ معلوم کئے جاتے ہیں تو یہ ناپ سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث کے زاوئے سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔ نیز ثابت کرو کہ ان میں سے صرف ایک زاویہ، زاویہ قائمہ کے $\frac{2}{3}$ سے بڑا ہو سکتا ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ منتظم کثیر الاضلاعوں کے گیارہ اور صرف گیارہ زوج ایسے ہیں کہ ہر زوج میں ایک کثیر الاضلاع کے ایک زاویہ کے درجوں کی تعداد دوسرے کے ایک زاویہ میں مرتبوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ نیز یہ ثابت کرو کہ صرف چار زوج ایسے ہیں جن میں یہ زاوئے صحیح عددوں سے بیان ہوتے ہیں۔

۱۳ — سورج کا ظاہری زاوئی قطر نصف درجہ ہے۔ یہ دیکھا گیا کہ ایک سیارہ اسکی قرص پر سے ایک خط مستقیم میں جو قرص کے مرکز سے اس کے نصف قطر کے $\frac{3}{5}$ فاصلہ پر ہے سیدھا گذر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سیارہ کے راستہ کے اس محدود حصہ کا سورج پر جو ظل پڑتا ہے اس کے محاذی زمین پر $\frac{\pi}{450}$ کا زاویہ بنتا ہے۔

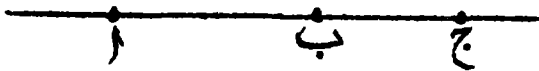
———(o)———

(12)

دوسرا باب

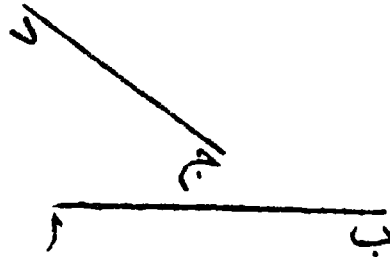
خطوں کی پیمائش ظل

۱۳ — اگر ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر جسے دونوں جانب لاانتہا طویل فرض کیا جا سکتا ہے ایک دیا ہوا طول کسی مفروضہ نقطہ سے ناپنا مطلوب ہو تو یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کس سمت میں یہ دیا ہوا طول ناپا جائے۔ ابہام سے بچنے کے لئے ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خط مستقیم پر ایک سمت میں ناپے ہوئے طول مثبت عدد سے تعبیر ہونگے اور اس لئے اسکی مخالف سمت میں ناپے ہوئے طول منفی عدد سے۔ پس کسی ایسے خط میں مثبت سمت کا مقرر کرنا ضروری ہے۔ شکل میں فرض کرو کہ

ا ب ج

ہم اس بات پر متفق ہوتے ہیں کہ خطوط جو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپے جائیں مثبت ناپ رکھتے ہیں، پس طول ا ب کو مثبت شمار کیا جائیگا اور طول ب ا کو منفی یعنی ا ب = - ب ا۔

۱۴ — اگر خط مستقیم پر کوئی تیسرا نقطہ ج ہو تو اب = اج + ج ب کیونکہ اگر ج (جیسا کہ شکل میں ہے) ب سے پرے واقع ہو تو خط ج ب منفی ہے اور اسلئے اس کی عددی قیمت، ا ج کی قیمت میں سے

تفریق ہو جاتی ہے۔ اگر متعدد خطوط مستقیم ہوں جو ایک ایسے نقطہ کی حرکت سے تکوین پائیں جو ا سے نکلتا ہے اور اپنی حرکت ب پر ختم کرتا ہے تو اِن خطوط مستقیم کے طولوں کا جبری مجموعہ، اب کے طول کے مساوی ہوگا۔

۱۵ — جب خط مستقیم و ف ابتدائی محل و ا سے گھوم کر دفعہ ۲ کی بہ جب ایک زاویہ کی تکوین کرتا ہے تو ہم یہ فرض کرلیں گے کہ اثنائے گردش میں خط مستقیم و ف میں مثبت سمت نہیں بدلتی، اس طرح وہ زاویہ جو و ف کے کسی محل میں رُک جانے سے تکوین پاتا ہے حدود کی خطوں کی دو مثبت سمتوں کا درمیانی زاویہ ہوتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے (18)

کہ اگر دو خطوط مستقیم کی مثبت سمتیں اب، ج د ہوں تو اب اور د ج کا درمیانی زاویہ، اب اور ج د کے درمیانی زاویے سے بقدر دو قائمہ زاویوں کے چھوٹا یا بڑا ہوگا، کیونکہ کوئی خط محل اب سے گھومنے لگے تو اسکو د ج پر منطبق ہونے کے لئے جس زاویہ میں سے گھومنا ہوگا وہ اس زاویہ سے بقدر ۱۸۰° کے بڑا یا چھوٹا ہوگا جس میں سے اس کو ج د پر منطبق ہونے کے لئے گھومنا پڑتا ہے۔

اگر ہم اُن تمام ہم اختتامی زاویوں پر غور کریں جو اب اور ج د، اور اب اور د ج سے علی الترتیب محدود ہیں تو (اب، ج د) = (اب، د ج) + ۱۸۰° جبکہ زاویے درجوں میں ناپے جائیں۔

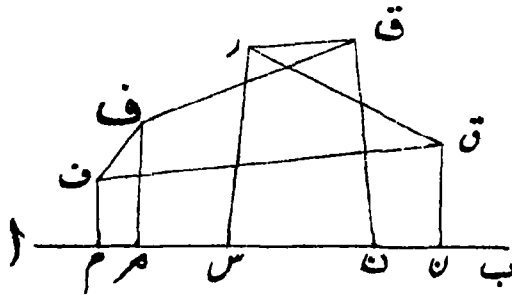
۱۶ — جب کوئی خط مستقیم اپنے متوازی حرکت کرے تو ہم

فرض کرینگے کہ اس کی مثبت سمت نہیں بدلتی، اس طرح اگر اب، ج د غیر قاطع خطوط مستقیم ہوں تو ان کا درمیانی زاویہ، اب اور اس خط مستقیم کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوگا جو ا سے ج د کے متوازی کھینچا گیا ہے۔ عام ہندسی مقاصد کے لئے اب اور ج د کا درمیانی زاویہ اب اور متوازی خط کے درمیان کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ بلا لحاظ علامت لیا جاتا ہے۔

ظل

۱۷ - اگر کسی خط مستقیم ف ق کے سروں ف، ق سے کسی دوسرے خط مستقیم اب پر عمود ف م، ق ن کھینچے جائیں تو حصہ م ن کو، اس کی مناسب علامت کے ساتھ، خط مستقیم اب پر خط مستقیم ف ق کا ظل کہتے ہیں۔

یہ واضح رہے کہ ف ق اور اب کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے۔ ق ف کا ظل ن م ہے اور اس لئے اس کی علامت ف ق کے ظل کی علامت سے مختلف ہے۔

(14) اگر نقطوں ف اور ق کو کسی شکستہ خط سے ملایا جائے جیسے ف ف ق ر ق تو اب پر ف ف، ف ق، ق ر ق کے ظلوں کا مجموعہ اب پر ف ق کے ظل کے مساوی ہوگا۔ کیونکہ ظلوں کا مجموعہ ہے م م + م ن + ن س + س ن اور یہ دفعہ ۱۴ کی بموجب م ن

کے مساوی ہے اس طرح ہمیں ظِلوں کی یہ بنیادی خاصیت حاصل ہوتی ہے:۔ کسی ثابت خط مستقیم پر، دو نقطوں ف و ق کو ملانے والے کسی شکستہ خط کے حصوں کے ظِلوں کا مجموعہ صرف ف اور ق کے محلوں پر منحصر ہوتا ہے اور ف، ق جس طریقہ سے ملائے گئے ہیں اُس پر منحصر نہیں ہوتا۔

اس مسئلہ کی ایک مخصوص صورت حسب ذیل ہے:۔ کسی خط مستقیم پر کسی بند کثیرالاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے ضِلعوں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ شکل بالا میں اگر نقطے ف اور ق ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں تو ان کو ملانے والا شکستہ خط ایک بند کثیرالاضلاع ہو جاتا ہے، اور چونکہ ف ق کا ظِل صفر ہے کثیرالاضلاع کے ترتیب وار اضلاع کے ظِلوں کا مجموعہ صفر ہے۔ کثیرالاضلاع کا ایک مستوی میں ہونا ضروری نہیں ہے، اور نیز اس میں کئی متداخلہ زاوئے ہو سکتے ہیں۔

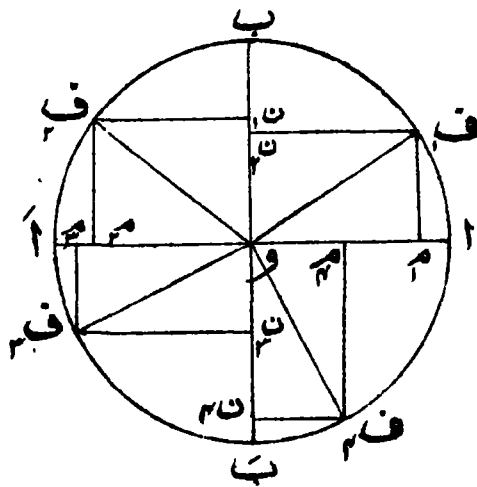
---

(15)

تیسرا باب

دائری تفاعل ۔ دائری تفاعلوں کی تعریفات

۱۸ ــــ زاوئی اور خطی مقداروں کی پیمایش کا طریقہ بتادینے کے بعد اب ہم دائری تفاعلوں یا مثلثی نسبتوں کی تعریف کرسکتے ہیں۔

فرض کرو کہ وف ابتدائی محل و ا سے نکلتا ہے اور اس کی گردش سے کسی مقدار ا کے زاویہ ا و ف کی تکوین دفعہ ۲ کی بموجب ہوتی ہے۔ زاویوں کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۲ میں بیان کی گئی ہے۔ فرض کرو کہ ب و ب، ا و ا پر عمود نکالا گیا ہے۔ ہم فرض کرتے

ہیں کہ آ و ا اور بَ و ب میں مثبت سمتیں علی الترتیب و سے ا کی طرف اور و سے ب کی طرف ہیں۔ نیز گھومنے والے خط کی مثبت سمت (16) سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے جو دفعہ ۱۵ میں بیان کی گئی ہے۔

ابتدائی خط پر و ف کے ظل کو جو نسبت طول و ف سے ہے اُس کو زاویہ ا کی جیب التمام کہتے ہیں، اور اِسے جم ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

خط مستقیم و ب پر، جو ابتدائی خط کے ساتھ +۹۰ درجہ کا زاویہ بناتا ہے، و ف کے ظل کو جو نسبت طول و ف سے ہے اُس کو زاویہ ا کی جیب کہتے ہیں، اور اِسے جب ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

و ب پر و ف کے ظل کو جو نسبت و ا پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا مماس کہتے ہیں، اور اِسے مس ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

و ا پر و ف کے ظل کو جو نسبت و ب پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا مماس التمام کہتے ہیں، اور اِسے مم ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

و ف کو جو نسبت و ا پر و ف کے ظل سے ہے اُس کو زاویہ ا کا قاطع کہتے ہیں، اور اِسے قط ا سے تعبیر کرتے ہیں۔

وف کو جو نسبت وب پر وف کے ظل سے ہے اسکو زاویہ ا کا قاطع التمام کہتے ہیں، اور اسے قم ا سے تعبیر کرتے ہیں

پس

$$\text{جم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{وف}} \text{، } \text{جب ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وف}} \text{، } \text{مس ا} = \frac{\text{ون}}{\text{وم}}$$

$$\text{مم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{ون}} \text{، } \text{قط ا} = \frac{\text{وف}}{\text{وم}} \text{، } \text{قم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{ون}}$$

اگر نسبتوں کے تمام طول اپنی اپنی مناسب علامت کے ساتھ لئے جائیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ ان میں وف کی علامت ہمیشہ مثبت رہتی ہے لیکن وم اور ون میں سے ہر ایک کی علامت زاویہ ا کی مقدار کی بموجب مثبت یا منفی ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مف، ون کے مساوی ہے اور اس کی علامت بھی وہی ہے جو ون کی ہے، اس طرح

$$\text{جب ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وف}} \text{، } \text{مس ا} = \frac{\text{مف}}{\text{وم}} \text{، } \text{مم ا} = \frac{\text{وم}}{\text{مف}} \text{، } \text{قم ا} = \frac{\text{وف}}{\text{مف}}$$

شکل میں زاویہ ا کی چار مقداریں ہیں اوف$_1$، اوف$_2$، اوف$_3$، اوف$_4$ جو ف کے چار مقامات ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$، ف$_4$ کے متناظر ہیں۔

کسی مثبت یا منفی طول اب کا ظل ایک خط مستقیم ج د پر، اس طرح معلوم کیا جاتا ہے کہ اب کو اسکی ٹھیک علامت کے ساتھ لیکر اسکو اس زاویہ کی جیب التمام سے ضرب دیا جاتا ہے جو ان خطوں کی مثبت سمتوں کے درمیان ہے جن پر اب اور ج د واقع ہیں۔ اس طرح ظل اپنی ٹھیک علامت کے ساتھ معلوم ہوتا ہے۔

یہ بات مشاہدہ طلب ہے کہ شکل بالا میں وف کی علامت جیسے وہ ابتدائی محل و ا سے گھومتا ہے ہمیشہ مثبت رہتی ہے اور وف جب و ا پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت اس کی علامت و ا کی علامت سے

مخالف ہوتی ہے۔

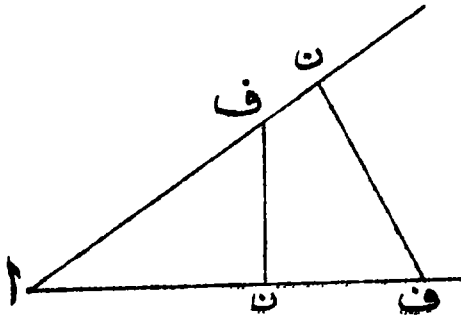
(17) **۱۹ــ** وہ چھ نسبتیں جن کی تعریف اوپر کی گئی ہے **دائری تفاعل** ہیں۔ ان کو مثلثی نسبتیں یا مثلثی تفاعل بھی کہا جاتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک صرف زاویہ ا کی مقدار پر منحصر ہے اور **وف** کے مطلق طول پر منحصر نہیں۔ یہ نتیجہ متشابہ مثلثوں کی اس خاصیت سے اخذ کیا گیا ہے کہ تمام متشابہ مثلثوں میں ضلعوں کی نسبتیں ایک ہی ہوتی ہیں، اس لئے جب **وف** کا کوئی اور طول لیا جاتا ہے تو ہمیں اسی زاویہ کے لئے حسب سابق وہی نسبتیں حاصل ہوتی ہیں۔ پس یہ چھ نسبتیں صرف زاوئی مقدار ا کے تفاعل ہیں، ہم ا کو ستینی نظام یا دائری ناپ سے پیمائش کر سکتے ہیں ہم بالعموم بڑے حروف ا، ب، ج .... ان زاویوں کے لئے استعمال کرینگے جن کی پیمائش درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں ہوئی ہو اور حروف عہ، بہ، طہ، فہ .... ایسے زاویوں کے لئے جن کی پیمائش دائری ناپ میں ہوئی ہو، اس طرح جب ا سے اس زاویہ کی جیب مراد ہو گی جس کا ناپ درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں ا ہے اور جب عہ سے اس زاویہ کی جیب جس کا دائری ناپ عہ ہے۔ ان چھ دائری تفاعلوں میں دو اور شامل کئے جا سکتے ہیں جو بعض اوقات استعمال کئے جاتے ہیں، ایک سہم الجیب ہے جیکو سہہ ا لکھتے ہیں، دوسرا سہم التمام ہے جس کو سہم ا لکھتے ہیں ان کی تعریف مساواتوں

سہہ ا = ۱ - جم ا، سہم ا = ۱ - جب ا

سے کیجاتی ہے۔

نظری تحقیقاتوں میں سہم الجیب اور سہم التمام شاذ و نادر ہی استعمال ہوتی ہیں۔ لیکن جہاز رانی میں جو ضابطے استعمال ہوتے ہیں ان میں سہم الجیب اکثر واقع ہوتی ہے۔

۲۰ــ حادہ زاویے کی صورت میں دائری تفاعلوں کی تعریف

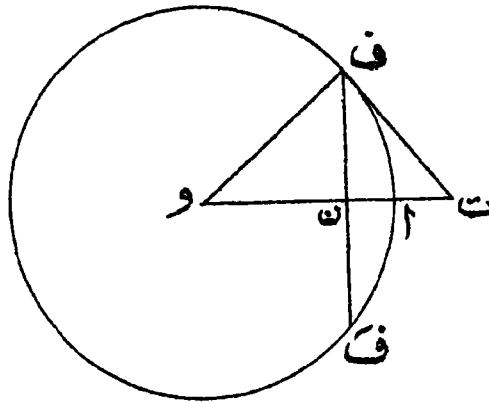
حسب ذیل شکل میں بیان کیجا سکتی ہیں:- فرض کرو کہ دئیے ہوئے زاوئے کو محدود کرتے والے خطوں میں سے کسی خط پر ف کوئی نقطہ ہے،

(18) ف سے دوسرے خط پر ف ان عمود کھینچو تو مثلث قائم الزاویہ ف ا ن حاصل ہوتا ہے جس کا زاویہ ف ا ن دیا ہوا زاویہ ا ہے۔ تب مثلثی نسبتوں کی حسب ذیل تعریف کی جاتی ہے:-

جم ا = $\frac{\text{ا سے متصل ضلع}}{\text{وتر}}$ ، جب ا = $\frac{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}{\text{وتر}}$

مس ا = $\frac{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}{\text{ا سے متصل ضلع}}$ ، مم ا = $\frac{\text{ا سے متصل ضلع}}{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}$

قط ا = $\frac{\text{وتر}}{\text{ا سے متصل ضلع}}$ ، قم ا = $\frac{\text{وتر}}{\text{ا کے مقابل کا ضلع}}$

۲۱ — حال حال تک دائری تفاعلوں کی تعریف نسبتوں کے ذریعہ سے نہیں بلکہ طولوں کے ذریعہ سے کیجاتی تھی جو ایک خاص نصف قطر کے دائرہ کی قوسوں کے لحاظ سے لئے جاتے تھے۔ فرض کرو کہ دئیے ہوئے دائرہ کی ایک قوس ف ا ہے۔ ف ن، و ا پر عمود کھینچو، اور فرض کرو کہ ف پر کا مماس

ف ت ہے، خط ف ن کو ف ا کی جیب کہا جاتا تھا، و ن کو اسکی جیب التمام، ف ت کو اس کا مماس، و ت کو اس کا قاطع، اور ا ن کو اسکی سہم الجیب۔ اس نظام میں جیب، جیب التمام، مماس، وغیرہ کی مقداریں نہ صرف زاویہ ف و ا

پر منحصر ہوتی تھیں بلکہ دائرہ کے نصف قطر پر بھی، جس کی تخصیص اس لئے ضروری تھی۔ ان تفاعلوں کی تعریف کا موجودہ طریقہ جس میں ان کو نسبتوں کے طور پر بیان کیا جاتا ہے یہ فائدہ رکھتا ہے کہ یہ تفاعل کسی دائرہ کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتے اور اس لئے وہ صرف زاویہ کی مقدار کے تفاعل ہوتے ہیں۔ قوس کی جیب کو سب سے اول عرب کے عالم ریاضی البطونی نے استعمال کیا تھا (۸۵۰ء تا ۹۱۸ء)۔ یونان کے علماء ریاضی قوس ف ا کی جیب کے لئے ف ن کی بجائے دوہری قوس کے وتر ف فَ کو استعمال کیا کرتے تھے۔

(19)

دائری تفاعلوں کے درمیان رشتے

۲۲ — دائری تفاعلوں کی تعریفات سے ہمیں حسب ذیل رشتے فوراً مل جاتے ہیں:

(۱) جم ا قط ا = ۱ ، (۲) جیب ا قم ا = ۱

(۳) مس ا مم ا = ۱،　　(۴) مس ا = جب ا : جم ا،

مم ا = جم ا : جب ا

رشتوں (۱)، (۲)، (۳) کو الفاظ میں یوں بیان کیا جاسکتا ہے کہ کسی زاویے کا قاطع، قاطع التمام، اور مماس التمام علی الترتیب اس زاویے کی جیب التمام، جیب، اور مماس کے معکوس ہیں۔ رشتہ (۴) سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی زاویہ کا مماس وہ نسبت ہے جو اسکی جیب کو اس کی جیب التمام سے ہے اور رشتہ (۳) کی رو سے یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ کسی زاویہ کا مماس التمام وہ نسبت ہے جو اس کی جیب التمام کو اس کی جیب سے ہے۔

۲۳۔ دفعہ ۱۸ کی شکل میں وف پر کا مربع، فیثاغورث کے مسئلہ کی رو سے، اس کے ظِل وم اور مف کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے، پس چونکہ نسبتیں $\frac{\text{وم}}{\text{وف}}$ اور $\frac{\text{مف}}{\text{وف}}$ علی الترتیب زاویہ ا کی جیب التمام اور جیب ہیں اسلئے (جم ا)^2 + (جب ا)^2 = ۱، جسکو بالعموم یوں لکھا جاتا ہے

جم^2 ا + جب^2 ا = ۱

اگر اس مساوات کی طرفین کو جم^2 ا پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۱) اور (۴) کو یاد رکھا جائے تو ۱ + مس^2 ا = قط^2 ا، اسی طرح اگر مساوات کی طرفین کو جب^2 ا پر تقسیم کیا جائے اور رشتوں (۲) اور (۴) کو یاد رکھا جائے تو ۱ + مم^2 ا = قتم^2 ا، اس طرح یہ تین متماثلات

جم^2 ا + جب^2 ا = ۱،
۱ + مس^2 ا = قط^2 ا،　　. . . . . . (۵)
۱ + مم^2 ا = قتم^2 ا

دائری تفاعلوں کے درمیان ایک ہی رشتہ کی مختلف شکلیں ہیں۔

۲۴ — یہ پانچ غیر تابع رشتے جو چھ دائری تفاعلوں کے درمیان اوپر حاصل ہوئے ہیں ان کی مدد سے ہم ان چھ دائری تفاعلوں میں سے کسی پانچ تفاعلوں کو چھٹے تفاعل کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ طالب علم کو جدول ذیل کی صحت کی تصدیق خود کر لینی چاہیے جس میں لا سے مراد وہ دائری تفاعل ہے جو اس کے ستون کے سرے پر لکھا ہے اور جملوں کی قیمت ہر افقی خط کے شروع میں درج ہے ۔

(20)

	جب ا = لا	جم ا = لا	مس ا = لا	مم ا = لا	قط ا = لا	قم ا = لا
جب ا =	لا	$\sqrt{۱-\text{لا}^۲}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^۲}}$	$\frac{۱}{\sqrt{۱+\text{لا}^۲}}$	$\frac{\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}{\text{لا}}$	$\frac{۱}{\text{لا}}$
جم ا =	$\sqrt{۱-\text{لا}^۲}$	لا	$\frac{۱}{\sqrt{۱+\text{لا}^۲}}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^۲}}$	$\frac{۱}{\text{لا}}$	$\frac{\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}{\text{لا}}$
مس ا =	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$	$\frac{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}{\text{لا}}$	لا	$\frac{۱}{\text{لا}}$	$\sqrt{\text{لا}^۲-۱}$	$\frac{۱}{\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}$
مم ا =	$\frac{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}{\text{لا}}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$	$\frac{۱}{\text{لا}}$	لا	$\frac{۱}{\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}$	$\sqrt{\text{لا}^۲-۱}$
قط ا =	$\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$	$\frac{۱}{\text{لا}}$	$\sqrt{۱+\text{لا}^۲}$	$\frac{\sqrt{۱+\text{لا}^۲}}{\text{لا}}$	لا	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}$
قم ا =	$\frac{۱}{\text{لا}}$	$\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$	$\frac{\sqrt{۱+\text{لا}^۲}}{\text{لا}}$	$\sqrt{۱+\text{لا}^۲}$	$\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}$	لا

اس جدول میں جذر المربعوں کی علامتوں کے ابہام غیر متعین چھوڑ دئے گئے ہیں۔ اس جدول کی تصدیق یوں کی جا سکتی ہے :- فرض کرو کہ قط ا = لا دیا گیا ہے تو دفعہ ۲۲ کے رشتہ (۱) سے جم ا = $\frac{۱}{\text{لا}}$، رشتہ (۵) کی دوسری شکل سے مس ا = $\sqrt{\text{لا}^۲-۱}$ اور پھر رشتہ (۳) سے مم ا = $\frac{۱}{\sqrt{\text{لا}^۲-۱}}$

پھر رشتہ (۵) کی پہلی شکل سے جب ا $= \sqrt{1 - \frac{1}{\text{لا}^2}} = \frac{\sqrt{\text{لا}^2 - 1}}{\text{لا}}$ ، پھر (۲) سے قم ا $= \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - 1}}$ ، اس طرح جدول کے پانچویں ستون کی صحت کی تصدیق ہو چکی۔

دائری تفاعلوں کی قیمتوں کے حدود

۲۵۔ ایک خط مستقیم کا ظل دوسرے خط مستقیم پر ظلول خط سے طول میں بڑا نہیں ہو سکتا، پس کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام عدداً اکائی سے بڑی نہیں ہو سکتی، ان میں سے ہر ایک کی ۱+ اور ۱- کے درمیان (بشمول ہر دو اعداد) کوئی قیمت ہو سکتی ہے، قاطع اور قاطع التمام چونکہ جیب التمام اور جیب کے متکافی ہیں اس لئے وہ حدود ۱± کے درمیان واقع نہیں ہو سکتیں، اور اس لئے وہ عدداً اکائی سے بڑی یا اکائی کے مساوی ہوتی ہیں۔ مماس یا مماس التمام چونکہ دو ظلوں کی نسبت ہے جن میں سے ایک اپنی بڑی سے بڑی قیمت اختیار کرتا ہے جبکہ دوسرا معدوم ہوتا ہے اس لئے مماس یا مماس التمام کی ∞± کے درمیان کوئی قیمت ہو سکتی ہے سہم الجیب صفر اور ۲ کے درمیان کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے۔

دائری تفاعلوں کے خواص

(21)

۲۶۔ اگر زاویئے ا و ف، ا و ف علی الترتیب ا اور ا- ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ و ا پر و ف اور و ف کے ظل و م مساوی ہیں لیکن و ف پر ان کے ظل و ن اور و ن مقدار میں مساوی مگر علامت میں مختلف ہیں اس لئے

جم (−ا) = جم ا ، اور جب (−ا) = − جب ا (۶)

جن سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ،

مس (−ا) = − مس ا ، مم (−ا) = − مم ا

قط (−ا) = قط ا ، قم (−ا) = − قم (ا)

اگر کسی متغیر کا تفاعل اپنی مقدار نہ بدلے جبکہ متغیر کی علامت تبدیل کی جائے تو ایسے تفاعل کو جفت تفاعل کہتے ہیں، لیکن اگر تفاعل کی وہی عددی قیمت ہو جو پہلے تھی مگر مختلف علامت کے ساتھ تو تفاعل کو طاق تفاعل کہتے ہیں، مثلاً لا^{۲}، لا کا جفت تفاعل ہے اور لا^{۳} لا کا طاق تفاعل ہے، لیکن لا^{۲} + لا^{۳} نہ جفت ہے اور نہ طاق کیونکہ اسکی عددی قیمت بدلجاتی ہے جبکہ لا کی علامت تبدیل کیجاتی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ کسی زاویہ کی جیب التمام اور قاطع جفت تفاعل ہیں اور جیب، مماس، مماس التمام، اور قاطع التمام طاق تفاعل ہیں

سہم الجیب جفت تفاعل ہے لیکن سہم التمام نہ جفت ہے نہ طاق

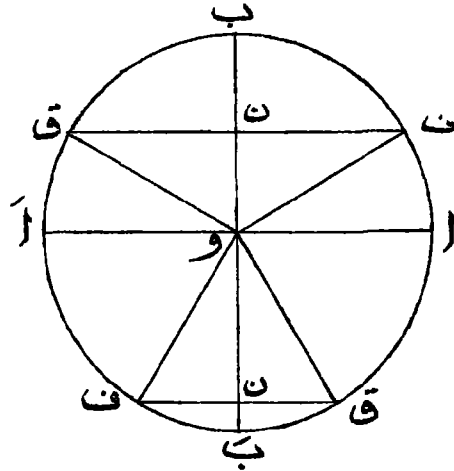
۲۷۔ کسی زاویئے کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں حادودی خط و ف کے محل پر بلحاظ دوسرے حادودی خط و ا کے منحصر ہوتی ہیں، اس لئے تمام ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ف) کے دائری تفاعل وہی ہوتے ہیں جو زاویہ ا کے ہیں، بعینی بہ الفاظ دیگر تمام زاویوں ن × ۳۶۰ + ا کے دائری تفاعل وہی ہوتے ہیں جو ا کے ہیں جبکہ ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہو۔ اگر عہ اس زاویہ کا دائری ناپ ہو جس میں ا درجے ہیں تو دائری ناپ میں تمام زاویوں ۲ ن π + عہ کے دائری تفاعل وہی ہیں جو زاویہ عہ کے ہیں۔ نیز چونکہ زاویوں ۲ ن π ۔ عہ سب کے سب ایک ہی دائری تفاعل رکھتے ہیں اس لئے

جب (۲ ن π ۔ عہ) = جب (۔ عہ) = ۔ جب عہ،

اور جم (۲ ن π ۔ عہ) = جم (۔ عہ) = جم عہ

اوپر کی بحث میں جو خواص حاصل ہوئے ہیں وہ ذیل کی مساواتوں میں شامل ہیں:۔

جب (۲ ن π ± عہ) = ± جب عہ
جم (۲ ن π ± عہ) = جم عہ ․․․․․ (۶)

۲۸۔ اگر زاویہ ۱۸۰ ۔ ا یا π ۔ عہ، و ق سے محدود ہو تو و ق، و ا کے ساتھ وہی زاویہ بناتا ہے جو و ف، و ا کے ساتھ بناتا ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ و ا پر و ف اور و ق کے ظل مساوی مگر علامت میں مختلف ہیں اور و ب پر و ف اور و ق کے ظل مساوی اور ہم علامت ہیں، اس لئے جب (π ۔ عہ) = جب عہ

اور جم (π - عہ) = - جم عہ، یہ مساواتیں درست رہتی ہیں خواہ عہ کچھ ہی ہو، اس طرح عہ کو - عہ میں تبدیل کیا جاسکتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

جب (π + عہ) = جب (- عہ) = - جب (عہ)،

اور جم (π + عہ) = - جم (- عہ) = - جم عہ

(23) پس مساواتوں کا یہ نظام

جب (π ± عہ) = ∓ جب عہ،
جم (π ± عہ) = - جم عہ } " " " (۷)

حاصل ہوتا ہے اور ان سے ہم حاصل کرتے ہیں

مس (π ± عہ) = ± مس عہ " " " " (۸)

نیز
جب (۲ن + ۱ π ± عہ) = جب (π ± عہ) = ∓ جب عہ
جم (۲ن + ۱ π ± عہ) = جم (π ± عہ) = - جم عہ
مس (۲ن + ۱ π ± عہ) = مس (π ± عہ) = ± مس عہ } (۹)

۴۹ — دفعہ ۲۸ کی شکل میں و ف جو زاویہ، و ب کے ساتھ بناتا ہے وہ ۹۰° + عہ ہے، اس لئے زاویہ ۹۰ + عہ یا ½ π + عہ کی جیب التمام وہ نسبت ہے جو و ب پر و ف کے ظل کو و ف سے ہے، پس چونکہ و بَ پر کا ظل مختلف علامت کے ساتھ، و ب پر کے ظل کے مساوی ہے اس لئے جم (½ π + عہ) = − جب عہ، ½ π + عہ کو عہ میں تبدیل کرنے سے جم عہ = − جب (عہ − ½ π)، پس (۶) کی رو سے

جم عہ = جب (½ π − عہ)

اِن مساواتوں میں اگر ہم چاہیں تو عہ کی علامت بدل سکتے ہیں کیونکہ عہ یا مثبت ہوگا یا منفی، پس ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

جب (½ π ± عہ) = جم عہ
جم (½ π ± عہ) = ∓ جب عہ　.. .. .. (۱۰)
مس (½ π ± عہ) = ∓ ظم عہ

نیز (۶) اور (۹) کی رو سے

جب (م + ½ π ± عہ) = (−۱)^م جب (½ π ± عہ)
جم (م + ½ π ± عہ) = (−۱)^م جم (½ π ± عہ)
مس (م + ½ π ± عہ) = مس (½ π ± عہ)

اس لئے

جب (م + ½ π ± عہ) = (−۱)^م جم عہ،
جم (م + ½ π ± عہ) = ∓ (−۱)^م جب عہ　.. .. (۱۱)
مس (م + ½ π ± عہ) = ∓ ظم عہ

زاویہ ۲π - عہ کو زاویہ عہ کا تکملہ کہتے ہیں اور زاویہ ½ π - عہ کو زاویہ عہ کا متمم کہتے ہیں۔

ہم بتا چکے ہیں کہ کسی زاویہ کی جیب اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب التمام اس کے تکمیلی زاویہ کی جیب التمام کے مساوی مگر مختلف علامت کے ساتھ، نیز کسی زاویہ کی جیب اس کے متمم زاویہ کی جیب التمام کے مساوی ہوتی ہے اور کسی زاویہ کی جیب التمام اس کے متمم زاویہ کی جیب کے مساوی۔

(24) ضوابط (۶) تا (۱۱) کی مدد سے ہم کسی زاوئے کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جبکہ صفر اور ½ π کے درمیان اُس زاویہ کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہوں جو دئے ہوئے زاویہ سے بقدر ½ π کے ضعف کے بڑا یا چھوٹا ہو، یا ہم اُس وقت بھی معلوم کر سکتے ہیں جبکہ دئے ہوئے زاوئے کے متمم زاوئے کے دائری تفاعل معلوم ہوں۔

دائری تفاعلوں کی دوریت

۴۔ جب متغیر لا کے تفاعل ف (لا) کی یہ خاصیت ہو کہ لا کی ہر قیمت کے لئے

ف (لا) = ف (لا + ک)

جہاں ک مستقل ہے تو تفاعل ف (لا) کو دوری تفاعل کہتے ہیں، نیز اگر ک وہ چھوٹے سے چھوٹا مستقل ہو جسکے لئے یہ تفاعل یہ خاصیت رکھتا ہے تو ک کو تفاعل کا دور کہتے ہیں۔

اب یہ فوراً مستنبط ہوتا ہے کہ اگر ف (لا) = ف (لا + ک) تو ف (لا) = ف (لا + ن ک) جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ اگر لا کی اُن تمام قیمتوں کے لئے جو لا کی دو قیمتوں کے درمیان (جن کا فرق ک ہے) واقع ہیں تفاعل کی قیمتیں دی گئی ہوں تو لا کی باقی سب قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں، تفاعل کی یہ قیمتیں فی الحقیقت اُن قیمتوں کی صرف تکرار ہونگی جو مذکورہ وقفہ میں دی گئی ہیں۔

جب عہ اور جم عہ کی خاصیت (۶) سے واضح ہے کہ یہ تفاعل عہ کے دَوری تفاعل ہیں، اور ان کا دور ۲ π ہے، یا اگر زاویہ کی پیمائش درجوں میں ہو تو جب ا اور جم ا، ا کے دَوری تفاعل ہیں اور دَور ۳۶۰° ہے۔ خاصیت (۷) سے یہ امر واضح ہے کہ یہ تفاعل ایسے ہیں کہ ان کی قیمتیں زاویہ کی اُن قیمتوں کے لئے جن میں نصف مکمل دَور کا فرق ہے مساوی ہیں مگر علامت میں مختلف۔ خاصیت (۸) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مماس دَوری تفاعل ہے، اس کا مکمل دَور π ہے جو جیب اور جیب التمام کے دَور کا نصف ہے۔ ظاہر ہے کہ قاطع یا قاطع التمام کا دور ۲ π ہے اور مماس التمام کا π۔ آیندہ چل کر یہ معلوم ہوگا کہ دائری تفاعلوں کی اہمیت علم تحلیل کے نظریہ میں صرف اِن کی اِس خاصیت "دَوریت" کی وجہ سے ہے۔

دائری تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں تبدیلیاں

۳۱ — اب ہم کسی زاویہ کے دائری تفاعلوں کی علامت اور مقدار میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں جبکہ زاویہ صفر سے چار قائمہ زاویوں تک بڑھتا ہے اُن کو معلوم کریں گے۔

(۱) کسی زاویہ کی جیب کی قیمت میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں اُن کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دفعہ (۱۸) کی شکل میں ظل و ن کی مقدار اور علامت کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیئے۔ جب زاویہ ا

(25)

صفر ہوتا ہے تو ون صفر ہوتا ہے اور جیسے ل، ۹۰° تک بڑھتا ہے
ون مثبت رہتا ہے اور بڑھتا ہے تا آنکہ ل = ۹۰° اور اس صورت میں
ون، وف کے مساوی ہوتا ہے، اس لئے جب ا مثبت ہے اور
صفر سے ایک تک بڑھتا ہے۔ پھر جیسے ا، ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے
ون مثبت رہتا ہے اور گھٹتا ہے یہاں تک کہ ا، ۱۸۰° کے مساوی
ہوتا ہے تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے، اس لئے جب ا مثبت ہے اور ایک سے
صفر تک گھٹتا ہے۔ پھر جیسے ا، ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے تو
ون منفی ہوتا ہے اور عدداً بڑھتا ہے یہاں تک کہ اگر ا، ۲۷۰° ہو تو
ون = - وف، اس لئے جب ل منفی ہے اور صفر سے -۱ تک بدلتا
ہے۔ پھر جیسے ا، ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے تو ون منفی ہوتا ہے
اور عدداً گھٹتا ہے یہاں تک کہ اگر ا، ۳۶۰° ہو تو وہ پھر صفر ہو جاتا ہے
اس طرح جب ل منفی ہے اور -۱ سے صفر تک بدلتا ہے۔

(۲) جیب التمام کی صورت میں ہمیں ظل وم کی علامت اور مقدار
کی تبدیلیوں کا مشاہدہ کرنا چاہیئے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے ا، صفر سے
۹۰° تک بڑھتا ہے جم ا مثبت رہتا ہے اور ایک سے صفر تک گھٹتا ہے،
جیسے ل، ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے جم ا منفی رہتا ہے اور صفر سے -۱
تک تبدیل ہوتا ہے، جیسے ا، ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے جم ا منفی
رہتا ہے اور -۱ سے صفر تک تبدیل ہوتا ہے، اور جیسے ا، ۲۷۰° سے
۳۶۰° تک بڑھتا ہے جم ل مثبت رہتا ہے اور صفر سے ایک تک بڑھتا ہے۔

(۳) کسی زاویہ کے مماس کی تبدیلیوں کو معلوم کرنے کے لئے
ہمیں نسبت $\frac{\text{ون}}{\text{وم}}$ پر غور کرنا چاہیئے، جب یہ زاویہ صفر ہوتا ہے تو یہ نسبت
صفر ہوتی ہے اور جیسے یہ زاویہ صفر سے ۹۰° تک بڑھتا ہے یہ نسبت
مثبت رہتی ہے اور بڑھتی ہے، جب یہ زاویہ ۹۰° کا ہوتا ہے تو ظل وم
صفر ہے اور ون اکائی کے مساوی ہے، پس مس ۹۰° = ∞، پھر جیسے

ا، ۹۰° سے ۱۸۰° تک بڑھتا ہے مماس منفی رہتا ہے اور −∞ سے صفر تک بدلتا ہے، جیسے ا، ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے مس ا مثبت رہتا ہے کیونکہ ون اور وم دونوں منفی ہیں اور وہ بڑھتا ہے حتیٰ کہ وہ لامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ ا = ۲۷۰°، جیسے ا، ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے مماس منفی رہتا ہے اور −∞ سے صفر تک تبدیل ہوتا ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ مس ا، قیمت ۹۰° میں سے گزرتے وقت +∞ سے −∞ تک تبدیل ہوتا ہے اور ۲۷۰° میں سے گزرتے وقت −∞ سے +∞ تک بدلتا ہے، اس کی توضیح کے لئے صرف یہ بتا دینا ضروری ہے کہ اگر کوئی متغیر لا، صفر میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلے تو اس کا متکافی $\frac{۱}{لا}$، ∞ میں سے گزرتے وقت اپنی علامت بدلتا ہے۔

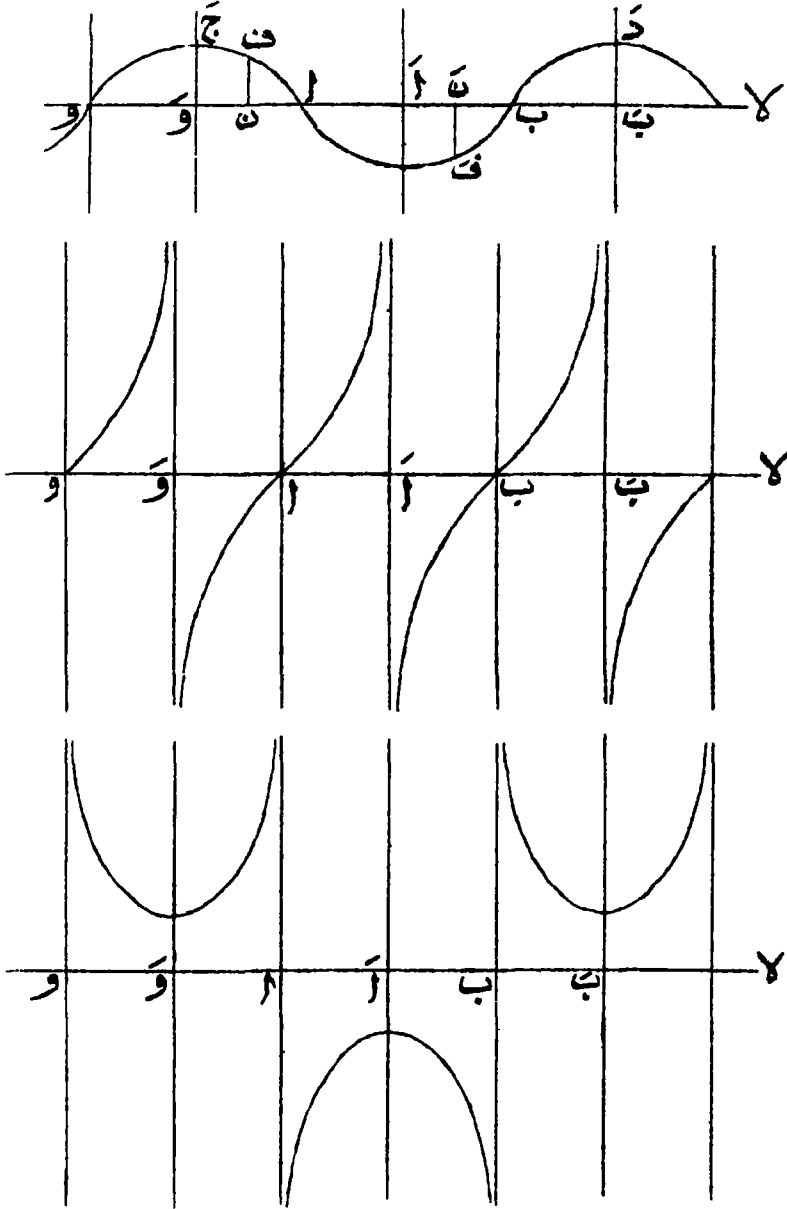
(۴) اب چونکہ قاطع التمام، قاطع اور مماس التمام علی الترتیب جیب، جیب التمام اور مماس کے متکافی تفاعل ہیں اس لئے ان کی قیمتوں کی تبدیلیاں اوپر سے اخذ کیجا سکتی ہیں۔ ان کی قیمتیں، ا = ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰° کے لئے حسب ذیل جدول میں دی گئی ہیں جس میں وہ نتیجے بھی شامل ہیں جو جیب، جیب التمام، اور مماس کے لئے اوپر حاصل ہو چکے ہیں۔ (26)

	۰°	۰ تا ۹۰°	۹۰°	۹۰ تا ۱۸۰°	۱۸۰°	۱۸۰ تا ۲۷۰°	۲۷۰°	۲۷۰ تا ۳۶۰°	۳۶۰°
جب	۰	+	۱	+	۰	−	−۱	−	۰
جم	۱	+	۰	−	−۱	−	۰	+	۱
مس	۰	+	±∞	−	۰	+	±∞	−	۰
مم	∓∞	+	۰	−	∓∞	+	۰	−	∓∞
قط	۱	+	±∞	−	−۱	−	∓∞	+	۱
قم	∓∞	+	۱	+	±∞	−	−۱	−	∓∞

دائری تفاعلوں کی ہندسی تعبیر

۳۲ — دائری تفاعلوں کی قیمت کی تبدیلیوں کی ہندسی تعبیر حاصل کرنے کے لئے ہم یہ فرض کریں گے کہ کسی زاویہ کا دائری ناپ لا، ایک ثابت خط مستقیم پر ایک ثابت نقطہ سے کسی مستقل پیمانہ کی بموجب طول لا لینے سے تعبیر ہوتا ہے، اور تفاعل کی عددی قیمت اُس متناظر مُعین کے طول سے تعبیر ہوتی ہے جو دئے ہوئے خط مستقیم پر طول لا کے سرے میں سے عمود وار کھینچا گیا ہے، تب اس مُعین کے سرے سے جو منحنی مرتسم ہوتا ہے وہ دائری تفاعل کی ترسیم کو تعبیر کریگا۔

اگلے صفحہ پر تین شکلیں ہیں جن میں سے پہلی شکل میں جب لا اور جم لا کی ترسیمیں دکھائی گئی ہیں۔ اگر و مبدا ہو جہاں سے طول لا ثابت خط مستقیم و لا پرناپا گیا ہے اور وا = π، وب = ۲π، وَوَ = ½ π، وَجَ = ا تو منحنی و ف ا ف ب ایسا ہے کہ اس کا کوئی معین، جب لا کی اُس قیمت کو تقریباً تعبیر کرتا ہے جو صفر اور ۲ π کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت کے جواب میں ہے۔ اگر وَ کو مبدا لیا جائے اور وَبَ = ۲π تو منحنی جَ ف فَ ذَ جم لا کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے لا کی اُن قیمتوں کے جواب ہیں جو صفر اور ۲ π سے درمیان ہیں، یہ نتیجہ رشتہ جم لا = جب (½ π + لا) سے حاصل ہوا ہے۔ و ب کے آگے منحنی وف ئ ک دبا، مبدا کے ہر دو جانب، لا انتہا مرتبہ تکرار پائے گا۔ اسی طرح دوسری شکل میں مس لا اور مم لا کی ترسیمات دکھائی گئی ہیں، و مبدا ہے مس لا کے لئے اور وَ مبدا ہے مم لا کے لئے، وَ، ا، ب میں سے گزرنے والے مُعین منحنی کے متقارب ہیں، اِن نقطوں پر تفاعل لا متناہی قیمت میں سے گزرتے وقت علامت بدلتے ہیں۔ تیسری شکل میں قط لا اور قم لا کی ترسیمات دی گئی ہیں، و مبدا ہے قم لا کے لئے اور وَ مبدا ہے

قط لا کے لئے، د، ا، ب میں سے گزرنے والے معین اس منحنی کے متقارب ہیں۔

(28)

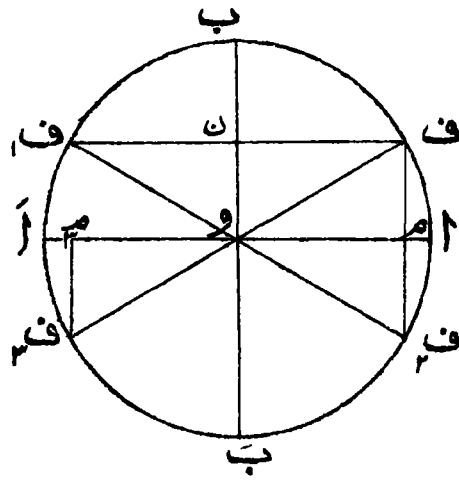
مثال:- حسب ذیل تفاعلوں کی ترسیمات کھینچو۔

(۱) جب لا + جم لا　　(۲) جم (π جب لا) × جم (π جم لا)

(۳) مس لا + قط لا　　(۴) جب (π جم لا) / جم (π جب لا)

(۵) جب² لا − ۲ جم لا　　(۶) جب ($\frac{1}{2}$ π + $\frac{1}{3}$ π جم لا)

وہ زاوئے جن کا دائری تفاعل وہی ہے

۳۳- اب ہم اُن تمام زاویوں کے لئے جملے معلوم کریں گے جن کے ایک دائری تفاعل کی قیمت اِن سب زاویوں کے لئے ایک ہی ہے۔

(۱) اگر شکل میں دیا ہوا زاویہ ا و ف ہو اور ف ف۱، و ا کے متوازی کھینچا جائے تو زاوئے (و ا، و ف) اور (و اَ و ف۱) ہی صرف وہ زاویے ہیں جن کی جیب وہی ہے جو زاویہ ا و ف کی ہے، کیونکہ صرف یہی وہ زاویے ہیں جن کے لئے و ب پر نصف قطر کا ظل و ن کے مساوی ہے، یہ زاویے ۲ ن π + عہ اور ۲ ن π + π - عہ ہیں جہاں عہ زاویہ ا و ف کا دائری ناپ ہے اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے،

یہ دونوں جملہ م π + (−۱)^م عہ میں شامل ہیں جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے، پس یہ جملہ اُن تمام زاویوں کو بیان کرتا ہے جن کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے۔

(۲) پھر ف₂ و ب کے متوازی کھینچو تو زاویے (ز ا، و ب) اور (و ا، و ف₂) ہی صرف دو زاویے ہیں جن کی جیب التمام وہی ہے جو زاویہ ا و ف کی ہے کیونکہ صرف یہی وہ زاویے ہیں جن کے لئے و ف کا ظل و ا پر و ھ کے مساوی ہے، یہ دونوں زاویے ضابطہ ۲م π ± عہ میں شامل ہیں، جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

(29)

(۳) اگر ف و کو ف₃ تک خارج کیا جائے تو زاویے (و ا، و ف) اور (و ا، و ف₃) ہی صرف دو زاویے ہیں جن کا ماس وہی ہے جو زاویہ عہ کا ہے، یہ زاویے علی الترتیب ۲ن π + عہ اور ۲ن π + π + عہ ہیں اور اس لئے دونوں ضابطہ م π + عہ میں شامل ہیں، جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

(۴) اب چونکہ جن زاویوں کا قاطع التمام ایک ہی ہو ان کی جیب بھی ایک ہی ہوتی ہے اس لئے م π + (−۱)^م عہ میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا قاطع التمام وہی ہے جو عہ کا ہے؛ اسی طرح ۲م π ± عہ میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا قاطع وہی ہے جو عہ کا ہے، اور م π + عہ میں وہ تمام زاویے شامل ہیں جن کا ماس التمام وہی ہے جو عہ کا ہے۔

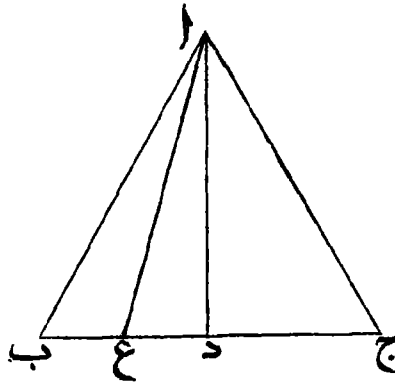
اوپر کی ہر صورت میں م یا ن کی قیمتوں میں صفر بھی داخل ہے۔

بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں

۴۳— چند اہم زاویوں کے دائری تفاعلوں کی قیمتیں سادہ ہندسی طریقوں سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

(۱) زاویہ ۴۵° یا ¼ π، قائم الزاویہ مثلث متساوی الساقین کا ایک حادہ زاویہ ہے، اس زاویہ کی جیب اور جیب التمام صریحاً ایک

دوسرے کے مساوی ہیں، اور چونکہ ان کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے مساوی ہے، ان میں سے ہر ایک $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے مساوی ہے، اس زاویہ کا مماس ایک ہے۔

(۲) مثلث متساوی الاضلاع کا ہر زاویہ ۶۰° یا $\frac{1}{3}\pi$ ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ا ب ج متساوی الاضلاع مثلث ہے، ب ج پر عمود ا د کھینچو تو زاویہ ب کی جیب التمام $\frac{\text{ب د}}{\text{ا ب}}$ ہے اور یہ $\frac{1}{2}$ کے مساوی ہے، اسی زاویہ کی جیب، $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ہے۔ ۶۰° کا متمم ۳۰° یا $\frac{1}{6}\pi$ ہے، پس جم ۳۰° $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$ اور جیب ۳۰° $= \frac{1}{2}$، نیز مس ۶۰° $= \sqrt{3}$ اور مس ۳۰° $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ (30)

(۳) زاویہ د ا ب کا نصف ا ع کھینچو تو زاویہ د ا ع = ۱۵° یا $\frac{1}{12}\pi$،

اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ ۳ کی رو سے

$$\frac{\text{د ع}}{\text{ع ب}} = \frac{\text{د ا}}{\text{ا ب}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

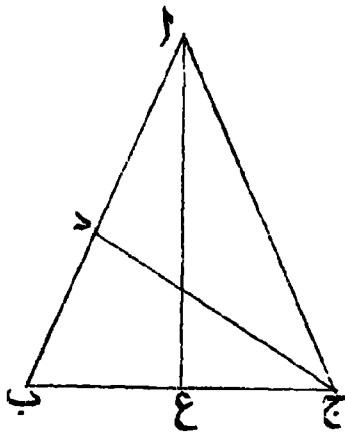
$$\therefore \frac{\text{د ع}}{\text{د ب}} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

اور ان سے $\frac{\text{د ع}}{\text{د ا}}$ یعنی مس ۱۵° $= \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\,(۲+\sqrt{۳})} = ۲ - \sqrt{۳}$ ، پس

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } ۱۵° = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴} \text{ ، جم } ۱۵° = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

ہم ان قیمتوں سے ۱۵° کے متمم زاویہ ۷۵° یا $\frac{۵}{۱۲}\pi$ کی جیب، جیب التمام اور مماس حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ہم پھر زاویہ د ا ع کی تنصیف کریں تو ہمیں ۳۰ ۲° یا $\frac{\pi}{۲۴}$ کا مماس حاصل ہونا چاہیئے اور ہم اس طریقہ کو جاری رکھ کر شکل $\frac{\pi}{۳ \times ۲^{ن}}$ کے تمام زاویوں کے مماس حاصل کر سکتے ہیں جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے، لیکن ہم آئندہ ایسے ضابطے حاصل کریں گے جن کی مدد سے ان زاویوں کے تفاعلوں کو یکے بعد دیگرے محسوب کیا جا سکتا ہے، اس طرح ہندسی عمل کو جاری رکھنے کی ضرورت باقی نہیں رہتی۔

اس کے مشابہ ہندسی طریقہ سے شکل $\frac{\pi}{۲^{ن}}$ کے زاویوں کے دائری تفاعل حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۴) فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہے جس میں قاعدہ پر کے زاویوں میں سے ہر ایک اس پر کے زاویہ کا دو چند ہے یعنی قاعدہ پر کا ہر زاویہ ۷۲° یا $\frac{۲}{۵}\pi$ ہے، اور

(31)

زاویہ راس ۳۶° یا $\frac{۱}{۵}\pi$ ۔ اگر اب کو د پر تقسیم کیا جائے اس طور پر کہ اب × ب د = اد^{۲} تو اقلیدس مقالہ چہارم مسئلہ ۱۰ میں یہ بتایا گیا ہے کہ اد = دج = ج ب۔ اب ب ج پر ا ع عمود نکالو۔ اگر نسبت $\frac{\text{اد}}{\text{اب}}$ کو لا سے تعبیر کیا جائے تو ۱ − لا = لا^{۲} اور اس دو درجی مساوات کو حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا = $\frac{۱}{۲}(\pm\sqrt{۵}-۱)$ ہمیں مثبت اصل لینی چاہیئے، پس $\frac{\text{اد}}{\text{اب}} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۵}-۱)$،

اس طرح جم ۷۲° = جب ۱۸° = $\frac{۱}{۲}\,\frac{\text{بج}}{\text{اب}} = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۵}-۱)$،

اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے جب ۷۲° = جم ۱۸° = $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}$

نیز جم $۳۶^\circ = \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{اج}}{\text{اد}}$ کیونکہ د ا ج ایک متساوی الساقین مثلث ہے،

اس لئے جم $۳۶^\circ = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۵}+۱)$، پس جب $۳۶^\circ = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}$،
نیز چونکہ ۳۶° کا متمم ۵۴° ہے، اسلئے جب ۵۴° اور جم ۵۴° کی قیمتیں بھی حاصل ہو جاتی ہیں۔

ذیل کی جدول میں محصلہ قیمتیں حوالہ کے لئے اکٹھی کی گئی ہیں:۔
پہلی سطر کے تفاعل پہلے ستون کے زاویوں کے لحاظ سے ہیں اور آخری سطر کے تفاعل آخری ستون کے زاویوں کے لحاظ سے

	جیب	جیب التمام	مماس	مماس التمام	
$\frac{۱}{۱۲}\pi = ۱۵^\circ$	$\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$	$۲-\sqrt{۳}$	$۲+\sqrt{۳}$	$\frac{۵}{۱۲}\pi = ۷۵^\circ$
$\frac{۱}{۱۰}\pi = ۱۸^\circ$	$\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$	$\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$	$\frac{۱}{۵}\sqrt{۲۵-۱۰\sqrt{۵}}$	$\sqrt{۵+۲\sqrt{۵}}$	$\frac{۲}{۵}\pi = ۷۲^\circ$
$\frac{۱}{۶}\pi = ۳۰^\circ$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{۱}{۳}\pi = ۶۰^\circ$
$\frac{۱}{۵}\pi = ۳۶^\circ$	$\frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}$	$\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}$	$\sqrt{۵-۲\sqrt{۵}}$	$\frac{۱}{۵}\sqrt{۲۵+۱۰\sqrt{۵}}$	$\frac{۳}{۱۰}\pi = ۵۴^\circ$
$\frac{۱}{۴}\pi = ۴۵^\circ$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	۱	۱	$\frac{۱}{۴}\pi = ۴۵^\circ$
	جیب التمام	جیب	مماس التمام	مماس	

اب ہم ضوابط (۲) تا (۱۱) استعمال کر کے کسی ایسے زاوئے کے دائری تفاعل فوراً حاصل کر سکتے ہیں جو اوپر کی جدول میں مندرجہ زاویوں میں سے کسی زاویہ سے زاویہ قائمہ کے کسی ضعف کا فرق رکھتا ہو۔

(32)

مثال:— ۱۲۰° اور −۵۷۶° کی جیب اور جیب التمام معلوم کرو۔

چونکہ ۱۲۰° = ۹۰° + ۳۰°، اس لئے

جب ۱۲۰° = جم ۳۰° = ½ √۳،

جم ۱۲۰° = − جب ۳۰° = − ½ ؛

نیز چونکہ −۵۷۶° = − (۳ × ۱۸۰° + ۳۶°)، اس لئے

جب (−۵۷۶°) = جب (۱۸۰° − ۳۶°) = جب ۳۶°،

اور جم (−۵۷۶°) = جم (۱۸۰° − ۳۶°) = − جم ۳۶°

مقلوب دائری تفاعل

۵۴— اگر ما، لا کا تفاعل ف (لا) ہے تو لا کو ما کا ایک تفاعل سمجھا جا سکتا ہے۔ اس تفاعل کو ف (لا) کا مقلوب تفاعل کہتے ہیں اور اس کو بالعموم ف⁻¹ (ما) سے تعبیر کرتے ہیں، اس طرح لا = ف⁻¹ (ما)، اگر ف (لا) دَوری تفاعل ہو جس کا دَور ک ہے اور اس لئے ف (لا) = ف (لا + م ک) جہاں م کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے تو تفاعل ف⁻¹ (ما) کی قیمتیں تعداد میں لا انتہا ہونگی جو لا + م ک سے حاصل ہوں گی جبکہ لا، ف⁻¹ (ما) کی کوئی ایک قیمت ہو، ما کے ایسے تفاعل کو کثیر قیمتی تفاعل کہتے ہیں، کیونکہ متغیر ما کی ہر قیمت کے جواب میں اس کی ایک واحد قیمت نہیں ہوتی۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دَوری تفاعل ف (لا) = ما کے متناظر ایک کثیر قیمتی مقلوب تفاعل ف⁻¹ (ما) ہے جس کی قیمتوں کی تعداد ما کی کسی ایک قیمت کے لئے لا انتہا ہے، یہ

قیمتیں ایک دوسرے سے اتنا فرق رکھتی ہیں جو ف (لا) کے
دَور کے کسی ضِعف کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۶ ـــ اگر صفر اور ک کے درمیان واقع ہونیوالی لا کی دو یا دو سے زیادہ قیمتیں ہوں جن کے لئے ف (لا) کی قیمتیں مساوی ہوتی ہیں تو ف^-۱^ (ما) کی بہتوں کی کثرت اور بڑھجاتی ہے، کیونکہ ف^-۱^ (ما) کی قیمتوں میں اوّل تو لا کی ہر وہ قیمت ہے جس کے لئے ف (لا) = ما اور پھر قیمتوں کے وہ لا متناہی سلسلے ہیں جو لا کی ہر قیمت میں ک کے ضعف جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ صفر اور ک کے درمیان لا کی دو قیمتیں لا۱، لا۲ ہیں جن کے لئے ف (لا) = ما تو مقلوب تفاعل ف^-۱^ (ما) کی قیمتوں کے دو جٹ لا۱ + م ک، لا۲ + ن ک ہیں۔

۴۷ ـــ دائری تفاعل جب لا = ما کی صورت میں مقلوب تفاعل جب^-۱^ (ما) کی قیمتیں ن π + (-۱)^ن^ لا۱ ہیں جس میں لا۱ لا کی کوئی قیمت ہے جس کے لئے جب لا۱ = ما، اس صورت میں جب لا کا مکمل دَور ۲ π ہے، اور صفر اور ۲ π کے درمیان لا کی دو قیمتیں ہیں (فرض کرو) لا۱ اور π - لا۱ جن کے لئے جب لا = ما، پس جب^-۱^ ما کی قیمتوں کے دو سلسلے ن × ۲ π + لا۱ اور ن × ۲ π + π - لا۱ ہیں اور یہ دونوں سلسلے ن π + (-۱)^ن^ لا۱ میں شامل ہیں
اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جم^-۱^ ما کی قیمتیں ۲ ن π ± لا۱ میں شامل ہیں، جہاں جم لا۱ = ما۔

تفاعل مس لا، ممّ لا کے دَور π ہیں جو جب لا اور جم لا کے دَور کا صرف نصف ہیں، اور صفر اور π کے درمیان لا کی صرف ایک قیمت ہے جس کے لئے مس لا یا ممّ لا ایک دی ہوئی قیمت اختیار کرتا ہے، اس طرح مس^-۱^ ما کی قیمتیں ن π + لا۱ ہیں اور ممّ^-۱^ ما کی قیمتیں ن π + لا۱ جہاں لا۱ صفر اور π کے درمیان لا کی وہ قیمت ہے جس کے لئے مس لا۱ = ما یا ممّ لا۱ = ما۔

(33)

۴۸۔ اگر لا عدداً وہ چھوٹی سے چھوٹی مقدار ہو جس کی علامت وہی ہے جو ما کی ہے اور جس کے لئے جب لا = ما تو اس چھوٹی سے چھوٹی مقدار لا کو جب$^{-1}$ ما کی صدر قیمت کہتے ہیں۔ مس$^{-1}$ ما، مم$^{-1}$ ما، قم$^{-1}$ ما کی صدر قیمتوں کی تعریف بھی اسی طرح کیجا سکتی ہے

اگر لا عدداً وہ چھوٹی سے چھوٹی مثبت مقدار ہو جسکے لئے جم لا = ما تو اس کو جم$^{-1}$ ما کی صدر قیمت کہتے ہیں، ایسی ہی تعریف قط$^{-1}$ ما کی صدر قیمت کے لئے استعمال ہوگی۔

اس طرح جب$^{-1}$ ما، مس$^{-1}$ ما، مم$^{-1}$ ما، قم$^{-1}$ ما کی صدر قیمتیں $\pm \frac{1}{2}$ π کے درمیان واقع ہوتی ہیں، اور جم$^{-1}$ ما، قط$^{-1}$ ما کی صدر قیمتیں صفر اور π کے درمیان واقع ہوتی ہیں۔ بعض تصنیفات میں جب$^{-1}$ ما، جم$^{-1}$ ما، مس$^{-1}$ ما کی صدر قیمتوں کو جب$^{-1}$ ما ($\mathrm{Sin}^{-1} y$)، جم$^{-1}$ ما ($\mathrm{Cos}^{-1} y$)، مس$^{-1}$ ما ($\mathrm{Tan}^{-1} y$) سے تعبیر کیا جاتا ہے، تب عام قیمتیں اس طرح لکھی جاتی ہیں:-

جب$^{-1}$ ما = ن π + $(-1)^{ن}$ جب$^{-1}$ ما، جم$^{-1}$ ما = ۲ ن π ± جم$^{-1}$ ما،

مس$^{-1}$ ما = ن π + مس$^{-1}$ ما

لیکن ہم یہ ترقیم استعمال نہیں کریں گے۔ یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ بہت سی مساواتوں میں جن میں یہ مقلوب تفاعل موجود ہوتے ہیں یہ فرض کرنا ضروری ہے کہ ان تفاعلوں کی صرف صدر قیمتیں استعمال ہوتی ہیں یا بہرصورت قیمتوں کا انتخاب محدود ہے۔ مثلاً جب$^{-1}$ ما + جم$^{-1}$ ما = $\frac{1}{2}$ π جیسی مساوات میں مقلوب تفاعلوں کی قیمتوں کا انتخاب محدود مقید ہے

یہ بھی مشاہدہ طلب ہے کہ تفاعلوں جم$^{-1}$ ما، جب$^{-1}$ ما کی تعریف ما کی صرف اُن قیمتوں کے لئے کی گئی ہے جو ± ۱ کے درمیان واقع ہیں، ما کی ان حدود کے باہر یہ تفاعل کوئی معنی نہیں رکھتے جب تک کہ وہ موجودہ تعریف کے تحت ہیں۔ طالب علم کو مشق کے طور پر مختلف مقلوب تفاعلوں کی ترسیمیں کھینچنا چاہیئے۔ یورپ کے دیگر ممالک کی تصانیف

(34)

میں مقلوب تفاعل جب⁻¹ لا، جم⁻¹ لا، مس⁻¹ ما کی بجائے قوس جب لا، قوس جم لا، قوس مس لا استعمال ہوتے ہیں۔

تیسرے باب پر مثالیں

۱۔ متماثلات ذیل ثابت کرو:

(۱) مس ا (۱ − مم² ا) + مم ا (۱ − مس² ا) = ۰،

(۲) (جب ا + قط ا)² + (جم ا + قم ا)² = (۱ + قط ا قم ا)²

۲۔ ایک زاویہ کی جیب $\frac{\text{م}^2 - \text{ن}^2}{\text{م}^2 + \text{ن}^2}$ ہے، باقی دائری تفاعل معلوم کرو۔

۳۔ اگر مس ا + جب ا = م، مس ا − جب ا = ن
تو ثابت کرو کہ م² − ن² = ۴ $\sqrt{\text{م ن}}$

۴۔ اگر $\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ = ف، $\frac{\text{جم ا}}{\text{جم ب}}$ = ق تو مس ا اور مس ب معلوم کرو۔

۵۔ اگر $\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$ = $\sqrt{۲}$، $\frac{\text{مس ا}}{\text{مس ب}}$ = $\sqrt{۳}$ تو ا اور ب معلوم کرو۔

۶۔ اگر جم ا = مس ب، جم ب = مس ج، جم ج = مس ا
تو ثابت کرو کہ جب ا = جب ب = جب ج = ۲ جب ۱۸°

۷۔ اِن مساواتوں کو حل کرو:—

(۱) جب ط + ۲ جم ط = ۱،

(۲) $\frac{\text{جم ع}}{\text{مس ع}}$ = $\frac{۳}{۲}$ ،

(۳) $\sqrt{۳}$ قم² ط = ۴ مم ط

۸۔ اِن مساواتوں کو حل کرو:—

جم (۲ لا + ما) = جب (لا − ۲ ما)
جم (لا + ۲ ما) = جب (۲ لا − ما)

۹— ط کے لئے ایک عام جملہ معلوم کرو جبکہ جب^{2} ط = جب^{2} عہ اور نیز جبکہ

$$\text{جب ط} = -\text{جم ط} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۱۰- اُن حدود کی عام قیمتیں دریافت کرو جن کے درمیان ا کی تمام قیمتوں کے لئے جب^{2} ا ، جم^{2} ا سے بڑا ہو۔

۱۱— ط کی عام قیمت معلوم کرو جبکہ ۹ قط^{4} ط = ۱۶

۱۲— اگر مس (۱۲ جم ط) = جم (۱۲ مس ط)

تو $\text{مس ط} = \frac{1}{4}\left\{2\text{ن} + 1 \pm \sqrt{4\text{ن}^2 + 4\text{ن} - 15}\right\}$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے جو ایک اور -۲ کے درمیان واقع نہیں ہے۔

۱۳— ایک دیئے ہوئے زاویئے کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرنے کا ہندسی طریقہ بیان کرو کہ ان دو حصوں کی (۱) جیوب ، (۲) مماس ایک دی ہوئی نسبت میں ہوں۔

۱۴— وہ زاویہ بناؤ جس کا مماس ۲̄۷٫۰۴ ہے۔

۱۵— ایک دیئے ہوئے زاویہ کو دو حصوں میں تقسیم کرو جن کی جیب التماموں کا مجموعہ ایک دی ہوئی مقدار ج ہو۔ وہ بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو جو ج اختیار کر سکتا ہے۔

۱۶— اگر $\text{عہ}_{\text{ن}} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} + \text{جب}^{\text{ن}}\text{ط}$

تو ثابت کرو کہ $2\,\text{عہ}_6 - 3\,\text{عہ}_4 + 1 = 0$ ،

$$6\,\text{عہ}_{10} - 15\,\text{عہ}_8 + 10\,\text{عہ}_6 - 1 = 0$$

۱۷— دو دائرے، (نیم قطر ا ، ب) ایک دوسرے کو خارجاً مس کرتے ہیں اور ط وہ زاویہ ہے جو ان دائروں کے مشترک مماسوں کے درمیان ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{جب ط} = \frac{4(\text{ا} - \text{ب})\sqrt{\text{ا ب}}}{(\text{ا} + \text{ب})^2}$$

(35)

۱۸۔ ایک مخروط مضلع کا قاعدہ ضلع ا کا مربع ہے، اس کا راس قاعدہ کے نقطہ وسطی میں سے گزرنے والے ایک خط پر واقع ہے جو قاعدہ پر عمود ہے، نیز راس قاعدہ سے ف فاصلہ پر واقع ہے۔
ثابت کرو کہ دو متصلہ رخوں کے درمیان زاویہ عہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب عہ} = \frac{۲\,\text{ف}\sqrt{۲\,\text{ا}^۲ + ۴\,\text{ف}^۲}}{\text{ا}^۲ + ۴\,\text{ف}^۲}$$

۱۹۔ دو مستوی ایک دوسرے کو علی القوائم خط ا ب پر قطع کرتے ہیں، اور ایک تیسرا مستوی ان کو خطوط ا د، ا ج پر قطع کرتا ہے، اگر زاویوں د ا ب، ج ا ب کو علی الترتیب عہ، بہ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ ب ا جو زاویہ مستوی ج ا د سے بناتا ہے حسب ذیل ہے:

$$\text{مس}^{-۱}\frac{\text{مس عہ مس بہ}}{\sqrt{\text{مس}^۲\text{عہ} + \text{مس}^۲\text{بہ}}}$$

۲۰۔ اگر ایک قائم الزاویہ متوازی السطوح کا وتر و د ہو تو ثابت کرو کہ و د اور اس رخ کے وتروں کے درمیان جس کے متصلہ اضلاع و ا، و ب ہیں جو زاویے بنتے ہیں ان کے جیوب التمام علی الترتیب ہیں

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{و د}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{و ا}^۲ - \text{و ب}^۲}{\text{و د} \times \text{ا ب}}$$

۲۱۔ دو دائرے جن کے نیم قطروں کا مجموعہ ا ہے ایک ہی مستوی میں رکھے گئے ہیں اس طور پر کہ ان کے مرکز ۲ ز فاصلہ پر ہیں ۔ ایک بے سرا تاگا خوب تنا ہوا دائروں کو گھیرتا ہے اور ان کے درمیان خود کو قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ تاگے کا طول $(\frac{۴}{۳}\pi + ۲\sqrt{۳})$ ا ہے۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم مس}^{-۱}\text{جب مم}^{-۱}\text{لا} = \left(\frac{\text{لا}^۲ + ۱}{\text{لا}^۲ + ۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

۲۳—تفاعلات ۳ جب لا + ۴ جم لا، لا جب لا، اور جب ($\frac{\pi}{2}$ جب لا) کی مقدار اور علامت کی تبدیلیاں لا کی تمام قیمتوں کے لئے ترسیمی طور پر ظاہر کرو۔

ثابت کرو کہ مساوات ۲ لا = (۲ ن + ۱) π سہہ لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد ۲ ن + ۳ ہے اور اس سے زیادہ نہیں، جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ انکے مقامات تقریبی طور پر بتاؤ۔

---

(36)

چوتھا باب

دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے دائری تفاعل

جیب اور جیب التمام کے لئے جمع اور تفریق کی ضابطے

۳۹۔ اب ہم دو زاویوں کے مجموعہ اور فرق کے دائری تفاعلوں کے لئے جملے اِن زاویوں کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں معلوم کرینگے۔

فرض کرو کہ کسی مقدار ا کا ایک زاویہ ا و ب، مثبت یا منفی، ایک خطِ مستقیم سے تکوین پاتا ہے جو و کے گرد ابتدائی محل و ا سے گھومتا ہے بہ حالیکہ زاویہ کی علامت سے متعلق ہماری قرارداد وہی ہے، اور نیز فرض کرو کہ کسی مقدار ب کا ایک زاویہ ب و ج ایک خطِ مستقیم سے مرتسم ہوتا ہے جو ابتدائی محل و ب سے گھومتا ہے۔ تب زاویہ ا و ج = ا + ب۔
و ج میں کوئی نقطہ ف لو، اور و ب پر ف ن عمود کھینچو۔

دفعہ ۱۵ کی قرارداد کے مطابق خطِ مستقیم و ن مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ وہ و ب میں ہو یا و ب ممدودہ میں، نیز ن ف مثبت ہے جبکہ وہ و ب کی مثبت جانب واقع ہو اور مخالف سمت ساعت میں گھومے اور منفی ہے جبکہ وہ دوسری جانب واقع ہو۔ اس خطِ مستقیم کی مثبت سمت جس پر ن ف واقع ہے و ا کے ساتھ زاویہ ا + ۹۰° بناتی ہے۔

و ن = و ف جم ب اور ن ف = و ف جب ب، کیونکہ و ن اور ن ف

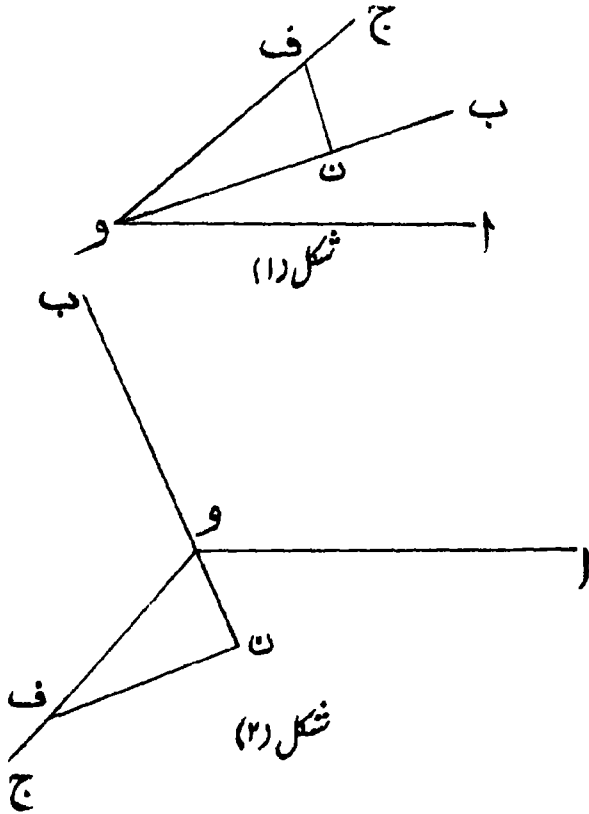
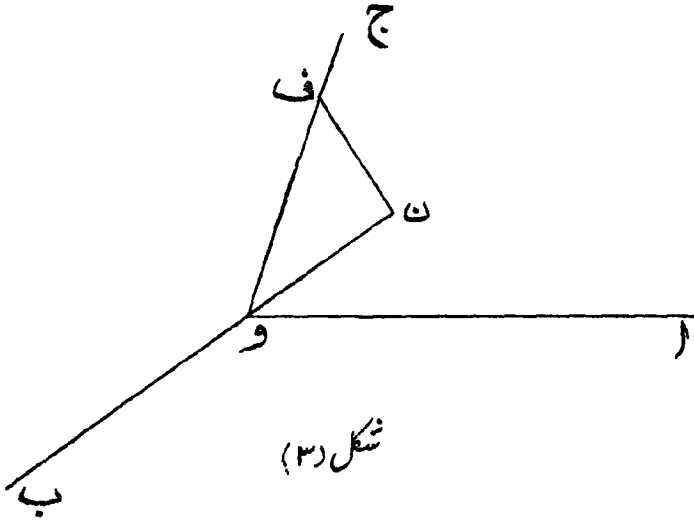
ظل ہیں و ف کے و ب پر اور اُس خط پر جو و ا کے ساتھ ا + ۹۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

شکل (۱) میں زاویوں ا، ب میں سے ہر ایک مثبت ہے اور ۹۰° سے کم، شکل (۲) میں ا، ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہے اور زاویہ ب بھی ۹۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہے، شکل (۳) میں زاویہ ا، ۱۸۰° اور ۲۷۰° کے درمیان واقع ہے، اور زاویہ ب منفی ہے اور −۹۰° اور −۱۸۰° کے درمیان واقع ہے۔ اشکال (۱) اور (۲) میں ن ف کا طول مثبت ہے اور شکل (۳) میں ن ف کا طول منفی ہے کیونکہ اس آخری صورت میں ف ن اُس خط کی سمت ہے جو و ا کے ساتھ ا + ۹۰° کا زاویہ بناتی ہے۔

(37)

شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(38) اب دفعہ ا میں بیان کردہ ظلوں کے اساسی مسئلہ کی رو سے وف کا ظل وا پر = ون کا ظل وا پر + ن ف کا ظل وا پر، یا

وف جم (ا + ب) = ون جم ا + ن ف جم (ا + ۹۰°)

= وف جم ا جم ب + وف جب ب جم (ا + ۹۰°)،

اس لئے جم (ا + ب) = جم ا جم ب − جب ا جب ب .. .. (۱)

اگر مثلث و ن ف کے ضلعوں کے ظل وا پر لینے کی بجائے اُنکے ظل اُس خط پر لئے جائیں جو وا کے ساتھ ۹۰° کا زاویہ بناتا ہے تو

وف جب (ا + ب) = ون جب ا + ن ف جب (ا + ۹۰°)

= وف جب ا جم ب + وف جب ب جم (ا + ۹۰°)،

اس لئے جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جم ب .. .. (۲)

اس طرح ضوابط (۱) اور (۲) مثبت اور منفی تمام مقداروں کے زاویوں

کے لئے ثابت ہو چکے۔ زاویوں ا اور ب کی مختلف مقداروں کے لئے طالب علم کو مناسب شکل بنانی چاہیئے تاکہ خود اس کو ثبوت کی عمومیت کا یقین ہو جائے۔

اگر ہم ضابطوں (۱) اور (۲) میں سے ہر ایک میں ب کو - ب میں بدل دیں تو

جم(ا - ب) = جم ا جم (- ب) - جب ا جب (- ب)

اور　جب (ا - ب) = جب ا جم (- ب) + جم ا جب (- ب)

پس　جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب، . . . (۳)

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب، . . . (۴)

یہ ضابطے (۳) اور (۴) بلا واسطہ اس طرح بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ شکل میں زاویہ ب منفی سمت میں بنایا جائے، تب زاویہ ف و ل، ا - ب کے مساوی ہوگا۔

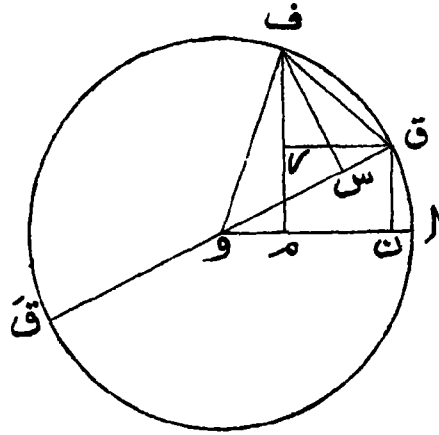
۴۰۔ ضابطوں (۱)، (۲) اور (۳)، (۴) کو علی الترتیب جمع اور تفریق کے ضابطے کہتے ہیں، ضابطوں (۱) اور (۲) میں سے کسی ایک کو دوسرے سے اخذ کیا جا سکتا ہے، (۱) میں ا کی بجائے ا + ۹۰° لکھو تو

جم(۹۰° + ا + ب) = جم(۹۰° + ا) جم ب - جب(۹۰° + ا) جب ب،

یا　- جب(ا + ب) = - جب ا جم ب - جم ا جب ب ؛

اور اس مساوات کی طرفین میں علامتیں بدلنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح (۲) میں ا کی بجائے ا + ۹۰° لکھ کر (۱) کو حاصل کیا جا سکتا ہے پس یہ نتیجہ نکلا کہ یہ چاروں اساسی ضابطے فی الحقیقت ان میں سے کسی ایک میں شامل ہیں۔

۴۱۔ کوشی نے جمع اور تفریق کے ضابطوں کا جو ثبوت دیا ہے وہ حسب ذیل ہے۔ و کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ نیم قطر و ف اور و ق، و ا کے ساتھ علی الترتیب زاویے ا اور ب بناتے ہیں، ف ق کو ملاؤ، اور و ا پر ف م، ق ن

(39)

عمود نکالو، اور ق ر، و ا کے متوازی کھینچو تو

ف ق^{۲} = ق ر^{۲} + ر ف^{۲}

= (و ن - و م)^{۲} + (ف م - ق ن)^{۲}

= و ا^{۲} {(جم ب - جم ا)^{۲} + (جب ا - جب ب)^{۲} }

= ۲ و ا^{۲} (۱ - جم ا جم ب - جب ا جب ب)

فرض کرو کہ قطر ق قَ پر عمود ف س کھینچا گیا ہے تو

ف ق^{۲} = ق س × ق قَ = ۲ و ا (و ا - و س)

= ۲ و ا^{۲} {۱ - جم (ا - ب)}،

اس لئے جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب، ...... (۳)

اب دوسرے ضابطے اس سے اخذ کئے جا سکتے ہیں، چنانچہ ب کو - ب میں بدلنے سے ضابطہ (۱) حاصل ہوتا ہے، ب کو ۹۰° - ب میں بدلنے سے ضابطہ (۲)، ب کو ۹۰° + ب میں بدلنے سے ضابطہ (۴)۔

۴۳ — اوپر کے دو ثبوت جو ہم نے جمع اور تفریق کے اساسی ضابطوں کے لئے دیئے ہیں بالکل عام ہیں، ان کے علاوہ دوسرے اور ثبوت دیئے

جاتے ہیں جن میں سے بعض صرف اُن زاویوں پر اطلاق پذیر ہوتے ہیں جو قیمتوں کی ایک محدود وسعت کے درمیان واقع ہوں اور اس لئے انکی توسیع اُن صورتوں میں کرنی پڑتی ہے جب زاویوں کی مقداریں اس وسعت کے باہر ہوں۔ ہم اس قسم کی توسیع پہلے ایسے ضابطوں کے لئے کریں گے جو ا اور ب کی صفر اور ۹۰° کے درمیان قیمتیں لیکر ثابت کئے گئے ہیں۔ ا اور ب خواہ کچھ ہی ہوں زاویوں اَ اور بَ کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے جو صفر اور ۹۰° کے درمیان ہوں ایسے کہ ا = م × ۹۰° + اَ ، (40)
ب = ن × ۹۰° + بَ جن میں م اور ن مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں، تب

$$\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}) = \text{جم}(\overline{\text{م}+\text{ن}}\ 90^\circ + \text{اَ} + \text{بَ})؛$$

(۱) اگر م اور ن دونوں جفت ہوں تو

$$\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}) = (-1)^{\frac{\text{م}+\text{ن}}{2}}\ \text{جم}(\text{اَ}+\text{بَ})$$

$$= (-1)^{\frac{\text{م}+\text{ن}}{2}}\ (\text{جم اَ جم بَ} - \text{جب اَ جب بَ})$$

اب $\text{جم ا} = (-1)^{\frac{\text{م}}{2}}\ \text{جم اَ}$ ، $\text{جب ا} = (-1)^{\frac{\text{م}}{2}}\ \text{جب اَ}$

اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔

پس $\text{جم}(\text{ا}+\text{ب}) = \text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}$

(۲) اگر م اور ن دونوں طاق ہوں تو

$$\text{جم}(\text{ا}) = (-1)^{\frac{\text{م}-1}{2}}\ \text{جم}(90^\circ + \text{اَ}) = (-1)^{\frac{\text{م}+1}{2}}\ \text{جب اَ} ،$$

$$\text{جب ا} = (-1)^{\frac{\text{م}-1}{2}}\ \text{جب}(90^\circ + \text{اَ}) = (-1)^{\frac{\text{م}-1}{2}}\ \text{جم اَ} ،$$

اور ب کے لئے بھی اسی وضع کے ضابطے۔ پس جم اَ، جم بَ، جب اَ جب بَ کی قیمتیں درج کرنے سے ہمیں حسب سابق جم (ا + ب) کے لئے وہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اگر م طاق ہو اور ن جفت تو

$$\text{جم}(ا+ب) = (-1)^{\frac{م+ن-1}{2}} \text{جم}(90^\circ + اَ + بَ)$$

$$= (-1)^{\frac{م+ن+1}{2}} \text{جب}(اَ + بَ)$$

$$= (-1)^{\frac{م+ن+1}{2}} (\text{جب}\, اَ \,\text{جم}\, بَ + \text{جم}\, اَ \,\text{جب}\, بَ)$$

لیکن $\text{جم}\, ا = (-1)^{\frac{م+1}{2}} \text{جب}\, اَ$ ، $\text{جم}\, ب = (-1)^{\frac{ن}{2}} \text{جم}\, بَ$ ،

$\text{جب}\, ا = (-1)^{\frac{م-1}{2}} \text{جم}\, اَ$ ، $\text{جب}\, ب = (-1)^{\frac{ن}{2}} \text{جب}\, بَ$ ،

اس لئے حسب سابق اندراج کرنے سے ، جم (ا + ب) کے لئے وہی ضابطہ حاصل ہوتا ہے ۔ دوسرے ضابطوں کی توسیع بھی اسی طرح عمل میں آسکتی ہے۔

۳۴ ۔ جمع کے ضابطے جس شکل میں یونانیوںؓ کو معلوم تھے وہ ٹولمی کا مسئلہ ہے جو اقلیدس مقالہ ششم مسئلہ (۵۰) میں مذکور ہے؛ یہ مسئلہ یہ ہے کہ اگر ا ب ج د ایک چارضلعی ہو جو ایک دائرے کے اندر بنایا گیا ہے تو ا ب × ج د + ا د × ب ج = ا ج × ب د۔ کوئی وتر ا ب اُس زاویہ کے نصف کی جیب ہوتا ہے جو دائرے کے مرکز پر ا ب کے محاذی بنایا گیا ہو جبکہ دائرہ کا قطر اکائی تسلیم کیا جائے ، یہ نصف زاویہ وہ زاویہ ہے جو قوس ا ب کے محاذی محیط کے کسی نقطہ پر بنتا ہے ۔ ہم اب یہ بتائیں گے کہ جب (عہ ± بہ) اور جم (عہ ± بہ) کے ضابطے ٹولمی کے مسئلہ میں شامل ہیں ۔ (41)

(۱) فرض کرو کہ ب د ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ا د ب = عہ ، ب د ج = بہ ، تب ا ب د = $\frac{1}{2}$ π − عہ ، د ب ج = $\frac{1}{2}$ π − بہ ،

ؔ دیکھو انسائکلوپیڈیا بریٹانیکا (اشاعت نہم) میں مضمون ”ٹولمی“۔

اج = جب (عہ + بہ)، اب = جب عہ، اور ج د = جم بہ؛ اس طرح مسئلہ بالا ضابطہ

جب (عہ + بہ) = جب عہ جم بہ + جم عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ، اج د = بہ، تو اب = جب (عہ − بہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

جب (عہ − بہ) + جب بہ جم عہ = جم بہ جب عہ

کے مماثل ہے۔

(۳) فرض کرو کہ ب د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور اد ب = عہ، زاویہ ج ب د = بہ، تو ا د ج = $\frac{1}{2}\pi$ + عہ − بہ، اس طرح اج = جم (عہ − بہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

جم (عہ − بہ) = جم عہ جم بہ + جب عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

(۴) فرض کرو کہ ج د، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ب ج د = عہ، ا د ج = بہ، تب ب ج ا = عہ + بہ − $\frac{1}{2}\pi$، اب = −جم (عہ + بہ) اور مسئلہ بالا ضابطہ

− جم (عہ + بہ) + جم عہ جم بہ = جب عہ جب بہ

کے مماثل ہے۔

مثال ۹۔ مسائل ذیل کے ثبوت میں ٹولمی کا مسئلہ استعمال کرو:۔

جب عہ جب (بہ − جہ) + جب بہ جب (جہ − عہ) + جب جہ جب (عہ − بہ) = ۰

جب (عہ + بہ) جب (بہ + جہ) = جب عہ جب جہ + جب بہ جب (عہ + بہ + جہ)

دو جیوب یا دو جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کے لئے ضابطے

۴۴۔ جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم فوراً حاصل کرتے ہیں

جب (ا + ب) + جب (ا − ب) = ۲ جب ا جم ب،

جب (ا + ب) − جب (ا − ب) = ۲ جم ا جب ب،

جم (ا + ب) + جم (ا - ب) = ۲ جم ا جم ب

جم (ا - ب) - جم (ا + ب) = ۲ جب ا جب ب

فرض کرو　ا + ب = ج، ا - ب = د، تو چونکہ ا = $\frac{1}{2}$ (ج + د) اور ب = $\frac{1}{2}$ (ج - د)، اس لئے حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں۔

جب ج + جب د = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (ج + د) جم $\frac{1}{2}$ (ج - د) . . . . (۵)

جب ج - جب د = ۲ جم $\frac{1}{2}$ (ج + د) جب $\frac{1}{2}$ (ج - د) . . . . (۶)

جم ج + جم د = ۲ جم $\frac{1}{2}$ (ج + د) جم $\frac{1}{2}$ (ج - د) . . . . (۷)

جم د - جم ج = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (ج + د) جب $\frac{1}{2}$ (ج - د) . . . . (۸)

(42) یہ اہم ضابطے (۵)، (۶)، (۷)، (۸) دو زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کے مجموعہ یا فرق کو دو دائری تفاعلوں کے حاصل ضرب کے طور پر بیان کرتے ہیں۔ ان کو الفاظ میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے:۔

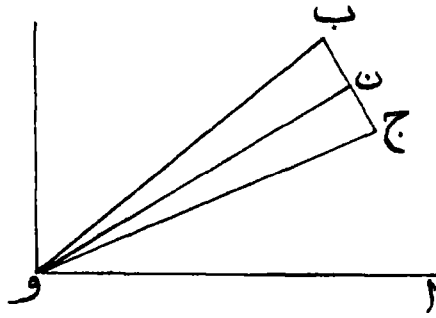
دو زاویوں کی جیوب کا مجموعہ، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب کا فرق، ان زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب التمام کا مجموعہ، ان زاویوں کے

نصف مجموعہ کی جیب التمام اور نصف فرق کی جیب التمام کے حاصل ضرب کا دوچند ہوتا ہے۔

دو زاویوں کی جیوب التمام کا فرق، اِن زاویوں کے نصف مجموعہ کی جیب اور اُلٹے نصف فرق کی جیب کے دوچند حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔

۴۵ — یہ ضابطے ہندسی طور پر ظِلوں کے طریقہ سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ب و ا = ج، ج و ا = د، اور فرض کرو کہ و ب = و ج، ب ج پر عمود و ن کھینچو تو ن، ب ج کا نقطہ وسطی ہے، نیز

ن و ا = ½ (ج + د)، ن و ب = ن و ج = ½ (ج − د)

اب و ا پر و ب اور و ج کے ظِلوں کا مجموعہ، و ا پر و ن، ن ب، و ن اور ن ج کے ظِلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور چونکہ ن ب اور ن ج کے ظِل مساوی اور مختلف العلامت ہیں اس لئے یہ مجموعہ و ن کے ظِل کے دوچند کے مساوی ہے۔ اس لئے

و ب جم ج + و ج جم د = ۲ و ن جم ½ (ج + د)

اور چونکہ

$$\text{و ن} = \text{و ب جم} \tfrac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})$$

اس لئے ضابطہ

(43) $$\text{جم ج} + \text{جم د} = 2\,\text{جم} \tfrac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})\ \text{جم} \tfrac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \quad \ldots (۷)$$

حاصل ہوتا ہے۔

اگر و ا پر ظل لینے کی بجائے اسکے علی القوائم خط پر ظل لئے جائیں تو

$$\text{و ب جب ج} + \text{و ج جب د} = 2\ \text{و ن جب} \tfrac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$$

اس لئے

$$\text{جب ج} + \text{جب د} = 2\,\text{جب} \tfrac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})\ \text{جم} \tfrac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \quad \ldots (۵)$$

نیز و ا پر و ج کا ظل = و ب کا ظل + ب ن کے ظل کا دوچند

یعنے

$$\text{و ج جم د} = \text{و ب جم ج} + 2\ \text{ب ن جب} \tfrac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})$$

اس لئے $$\text{جم د} - \text{جم ج} = 2\,\text{جب} \tfrac{1}{2} (\text{ج} + \text{د})\ \text{جب} \tfrac{1}{2} (\text{ج} - \text{د}) \quad \ldots (۸)$$

اور اگر ہم و ا پر کے عمود پر ظل لیں تو

$$\text{و ج جب د} = \text{و ب جب ج} - 2\ \text{ب ن جم} \tfrac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \cdots (۷)$$

یا $$\text{جب ج} - \text{جب د} = 2\,\text{جب} \tfrac{1}{2} (\text{ج} - \text{د})\ \text{جم} \tfrac{1}{2} (\text{ج} + \text{د}) \quad \cdots (۶)$$

لوکارثموں کی ایجاد سے قبل تقریباً ایک صدی تک عددوں کو، جیوب کی جدولوں کے ذریعہ ضرب دینے کا ایک عجیب طریقہ رائج تھا۔ یہ طریقہ ضابطہ

$$\text{جب ا جب ب} = \tfrac{1}{2} \{ \text{جم} (\text{ا} - \text{ب}) - \text{جم} (\text{ا} + \text{ب}) \}$$

کے استعمال پر منحصر تھا۔ زاویئے ا اور ب جن کی جیوب، علامت اعشاریہ کو نکال دینے کے بعد، اُن اعداد کے مساوی ہوتے ہیں جن کو ضرب دینا مقصود ہوتا ہے جیوب کی ایک جدول سے معلوم کئے جاسکتے ہیں اور پھر اسی جدول سے جم (ا + ب)، جم (ا - ب) معلوم ہوسکتی ہیں، ان آخری جیوب التمام کے فرق کا نصف مطلوبہ

حاصل ضرب ہے۔ اس طریقہ کو προσθαφαιρεσις کہتے تھے گلیشر
کے ایک مضمون "On multiplication by a table of single entry"
میں جو فلاسفیکل میگزین بابتہ ۱۸۷۸ء میں شائع ہوا تھا اس طریقہ کا ذکر ملے گا۔

امثلہ

۱۔ ثابت کرو متماثلہ

جب ا جب (ب - ج) جب (ب + ج - ا) + جب ب جب (ج - ا) ×
جب (ج + ا - ب) + جب ج جب (ا - ب) جب (ا + ب - ج)
= ۲ جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

دائیں جانب کی دوسری اور تیسری ارقام لکھی جا سکتی ہیں

½ جب ب {جم (ب - ۲ ا) - جم (۲ ج - ب)} + ½ جب ج {جم (ج - ۲ ب) -
جم (۲ ا - ج)}

اور یہ = ¼ {جب ۲ (ب - ا) + جب ۲ ا - جب ۲ ج - جب ۲ (ب - ج)}
+ ¼ {جب ۲ (ج - ب) + جب ۲ ب - جب ۲ ا - جب ۲ (ج - ا)}

= ¼ (جب ۲ ب - جب ۲ ج) - ½ جب ۲ (ب - ج) + ¼ {جب ۲ (ب - ا) - جب ۲ (ج - ا)}

= جب (ب - ج) {½ جم (ب + ج) - جم (ب - ج) + ½ جم (ب + ج - ۲ ا)}

جو = جب (ب - ج) {جم ا جم (ب + ج - ا) - جم (ب - ج)}

اس میں رقم جب ا جب (ب - ج) جب (ب + ج - ا) جمع کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جب (ب - ج) {جم (ب + ج - ۲ ا) - جم (ب - ج)}

یعنی ۲ جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

(۲) ۔ ثابت کرو کہ

Σ جم ا جب (ب - ج) جب (ب + ج - ا)

= ۲ جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

اسکو مثال (۱) سے ا، ب، ج کو ۹۰° - ا، ۹۰° - ب، ۹۰° - ج میں تبدیل کرکے اخذ کیا جاسکتا ہے، یا بلاواسطہ مثال (۱) کی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔

متماثلات ذیل ثابت کرو:

(۳) Σ جب ا جب (ب - ج) = ۰، Σ جم ا جب (ب - ج) = ۰

(۴) Σ جب (ب + ج) جب (ب - ج) = ۰، Σ جم (ب + ج) جب (ب - ج) = ۰

(۵) Σ جب ب جب ج جب (ب - ج) = - جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

Σ جم ب جم ج جم (ب - ج) = - جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب)

(۶) اگر ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

جب^۲ ا = جب^۲ ب + جب^۲ ج - ۲ جب ب جب ج جم ا

اور جم^۲ ا = ۱ - جم^۲ ب - جم^۲ ج - ۲ جم ا جم ب جم ج

مثلثی متماثلات کی ایک کثیر تعداد اسی طرح کے جبری متماثلات کے مماثل ہے[1]

مثلاً حسب ذیل جبری متماثلات مثالوں (۱) تا (۵) کے جواب میں ہیں: —

Σ (ب ج) (ب + ج - ا) = ۲ (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)

(۱) اور (۲) کے جواب میں،

Σ ا (ب - ج) = ۰، (۳) کے جواب میں؛

Σ (ب + ج) (ب - ج) = ۰، (۴) کے جواب میں؛

Σ ب ج (ب - ج) = - (ب - ج) (ج - ا) (ا - ب)، (۵) کے جواب میں

---

[1] ایسی مطابقات کی ایک کثیر تعداد ایم۔ گیلین (M. Gelin) نے "Mathesis" جلد دوم میں دی ہے۔

ہم ان مطابقات کا نظریہ ساتویں باب میں بیان کریں گے۔

مماس اور مماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے

۴۶۔ جیب اور جیب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہم دو زاویوں کے مجموعہ یا فرق کے مماس یا مماس التمام کے لئے ان زاویوں کے مماس یا مماس التمام کی رقوم میں ضابطے اخذ کر سکتے ہیں۔ مثلاً

$$\text{مس}(\text{ا}\pm\text{ب})=\frac{\text{جب}(\text{ا}\pm\text{ب})}{\text{جم}(\text{ا}\pm\text{ب})}=\frac{\text{جب ا جم ب}\pm\text{جم ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}\mp\text{جب ا جب ب}}،$$

پس اس کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو جم ا جم ب سے تقسیم کرنے پر

$$\text{مس}(\text{ا}\pm\text{ب})=\frac{\dfrac{\text{جب ا}}{\text{جم ا}}\pm\dfrac{\text{جب ب}}{\text{جم ب}}}{1\mp\dfrac{\text{جب ا جب ب}}{\text{جم ا جم ب}}}$$

اس لئے حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں

$$\text{مس}(\text{ا}+\text{ب})=\frac{\text{مس ا}+\text{مس ب}}{1-\text{مس ا مس ب}}\quad\ldots\ldots\quad(9)$$

$$\text{مس}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\text{مس ا}-\text{مس ب}}{1+\text{مس ا مس ب}}\quad\ldots\ldots\quad(10)$$

اسی طرح اور دو ضابطے حاصل ہوتے ہیں (4.5)

$$\text{مم}(\text{ا}+\text{ب})=\frac{\text{مم ا مم ب}-1}{\text{مم ا}+\text{مم ب}}\quad\ldots\ldots\quad(11)$$

$$\text{مم}(\text{ا}-\text{ب})=\frac{\text{مم ا مم ب}+1}{\text{مم ب}-\text{مم ا}}\quad\ldots\ldots\quad(12)$$

ضوابط (۹) تا (۱۲) مماس اور مماس التمام کے لئے جمع اور تفریق کے ضابطے ہیں۔

مختلف ضوابط

۴۷ ۔ حسب ذیل ضابطے اُن ضابطوں سے اخذ کئے جا سکتے ہیں جو ہم نے دو زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں ۔
یہ ضابطے استحالات کو عمل میں لانے میں اکثر مفید ہوتے ہیں۔ طالب علم کو ہر ضابطہ کی تصدیق خود کر لینی چاہیئے۔

جب (ا + ب) جب (ا ـ ب) = جب^2 ا ـ جب^2 ب = جم^2 ب ـ جم^2 ا ... (۱۳)

جم (ا + ب) جم (ا ـ ب) = جم^2 ا ـ جب^2 ب = جم^2 ب ـ جب^2 ا ... (۱۴)

جب (ا + ب) جم (ا ـ ب) = جب ا جم ا + جب ب جم ب ..... (۱۵)

جم (ا + ب) جب (ا ـ ب) = جب ا جم ا ـ جب ب جم ب ..... (۱۶)

جب (ا + ب) / جب (ا ـ ب) = (مس ا + مس ب) / (مس ا ـ مس ب) .... (۱۷)

جم (ا + ب) / جم (ا ـ ب) = (۱ ـ مس ا مس ب) / (۱ + مس ا مس ب) ..... (۱۸)

مس ا ± مس ب = جب (ا ± ب) / (جم ا جم ب) .... (۱۹)

دو جیوب یا جیوب التمام کے جمع اور تفریق کے ضابطوں سے ہمیں فوراً حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں :-

(جب ا + جب ب) / (جب ا ـ جب ب) = مس ½ (ا + ب) / مس ½ (ا ـ ب) (۲۰)

(جب ا ± جب ب) / (جم ا + جم ب) = مس ½ (ا ± ب) (۲۱)

$$\frac{\text{جب ا} \pm \text{جب ب}}{\text{جم ب} - \text{جم ا}} = \text{مم}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{ا} \mp \text{ب}) \quad \ldots\ldots \quad (۴۲)$$

$$\frac{\text{جم ا} + \text{جم ب}}{\text{جم ب} - \text{جم ا}} = \text{مم}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{ا} + \text{ب})\,\text{مم}\,\tfrac{1}{2}\,(\text{ا} - \text{ب}) \quad \ldots\ldots \quad (۴۳)$$

(46)

مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ا} - \text{جم}^2\text{ا} - \text{جم}^2\text{ب} - \text{جم}^2\text{ج} + ۲\,\text{جم ا جم ب جم ج}$$
$$= ۴\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(-\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج}) \times$$
$$\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$$

دائیں جانب کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$-\text{جم}^2\text{ا} - \text{جم}(\text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}(\text{ب} - \text{ج}) + \text{جم ا}\{\text{جم}(\text{ب} + \text{ج}) + \text{جم}(\text{ب} - \text{ج})\}$$

جو مساوی ہے $\{\text{جم ا} - \text{جم}(\text{ب} + \text{ج})\}\{\text{جم}(\text{ب} - \text{ج}) - \text{جم ا}\}$ کے۔

اب ان میں سے ہر جزو ضربی کو دو اجزائے ضربی میں تحلیل کرنے سے بائیں جانب کا جملہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\pm \text{ا} \pm \text{ب} \pm \text{ج}$ ، ۲π کا ضعف ہو تو

$$\text{ا} - \text{جم}^2\text{ا} - \text{جم}^2\text{ب} - \text{جم}^2\text{ج} + ۲\,\text{جم ا جم ب جم ج} = ۰$$

یہ نتیجہ بعض اوقات مفید ثابت ہوتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ا} - \text{جم}^2\text{ا} - \text{جم}^2\text{ب} - \text{جم}^2\text{ج} - ۲\,\text{جم ا جم ب جم ج}$$
$$= -۴\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(-\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})$$

اس کو (۱) سے اخذ کیا جا سکتا ہے، یا بلا واسطہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ اگر $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ن}\,\pi$ تو

$$\text{جب ۲ا} + \text{جب ۲ب} + \text{جب ۲ج} = (-۱)^{\text{ن}-۱}\,۴\,\text{جب ا جب ب جب ج}$$

کیونکہ

$$\text{جب ۲ا} + \text{جب ۲ب} + \text{جب ۲ج} = ۲\,\text{جب ا جم ا} + ۲\,\text{جب}(\text{ن}\pi - \text{ا})\,\text{جم}(\text{ب} - \text{ج})$$

= ۲ جب ا {(-۱)^{ن} جم (ب + ج) - (-۱)^{ن} جم (ب - ج)}

= (-۱)$^{ن-۱}$ ۴ جب ا جب ب جب ج

۴ — انہی مفروضں کے مطابق جو مثال (۳) میں فرض کیا گیا ہے ثابت کرو کہ

۱ + جم ۲ ا + جم ۲ ب + جم ۲ ج = (-۱)^{ن} ۴ جم ا جم ب جم ج

متماثلات ذیل ثابت کرو: —

۵ — جب ۳ ا = ۴ جب ا جب (۶۰° + ا) جب (۶۰° - ا)

۶ — جم ۳ ا = ۴ جم ا جم (۶۰° + ا) جم (۶۰° - ا)

۷ — جب ا + جب ب + جب ج - جب (ا + ب + ج)

= ۴ جب ½ (ب + ج) جب ½ (ج + ا) جب ½ (ا + ب)

۸ — جم ا + جم ب + جم ج + جم (ا + ب + ج)

= ۴ جم ½ (ب + ج) جم ½ (ج + ا) جم ½ (ا + ب)

۹ — Σ جب ۲ ا جب^{2} (ب + ج) - جب ۲ ا جب ۲ ب جب ۲ ج

= ۲ جب (ب + ج) جب (ج + ا) جب (ا + ب)

۱۰ — Σ جم ۲ ا جم^{2} (ب + ج) - جم ۲ ا جم ۲ ب جم ۲ ج

= ۲ جم (ب + ج) جم (ج + ا) جم (ا + ب)

۱۱ — Σ جب^{2} ا جب (ب + ج - ا) - ۲ جب ا جب ب جب ج

= جب (ب + ج - ا) جب (ج + ا - ب) جب (ا + ب - ج)

۱۲ — Σ جم^{2} ا جم (ب + ج - ا) - ۲ جم ا جم ب جم ج

= جم (ب + ج - ا) جم (ج + ا - ب) جم (ا + ب - ج)

مثالیں (۹) اور (۱۰) جبری متماثلہ

Σ ۲ ا (ب + ج)^{2} - ۸ ا ب ج = ۲ (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)

کے جواب میں ہیں اور (۱۱) اور (۱۲) متماثلہ

کے ا۲ (ب + ج - ا) - ۲ ا ب ج = (ب + ج - ا)(ج + ا - ب)(ا + ب - ج)
کے جواب میں -

تین زاویوں کے لئے جمع کے ضابطے

۴۸ ــــ جمع کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی مدد سے ہم تین زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تفاعلوں کو ان زاویوں کے تفاعلوں کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں، چنانچہ

جب (ا + ب + ج) = جب (ا + ب) جم ج + جم (ا + ب) جب ج

= (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جم ج + (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جب ج،

اور　جم (ا + ب + ج)

= جم (ا + ب) جم ج - جب (ا + ب) جب ج

= (جم ا جم ب - جب ا جب ب) جم ج - (جب ا جم ب + جم ا جب ب) جب ج،

پس　جب (ا + ب + ج)

= جب ا جم ب جم ج + جب ب جم ج جم ا + جب ج جم ا جم ب

- جب ا جب ب جب ج . . . . (۲۴)

اور　جم (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج - جم ا جب ب جب ج - جم ب جب ج جب ا

- جم ج جب ا جب ب . . . . . . (۲۵)

ضابطوں (۲۴) اور (۲۵) کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

جب (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج (مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج)

اور　جم (ا + ب + ج)

= جم ا جم ب جم ج (۱ - مس ب مس ج - مس ج مس ا - مس ا مس ب)

پس عمل تقسیم سے یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

مس (ا + ب + ج)

= (مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج) ÷ (۱ - مس ب مس ج - مس ج مس ا - مس ا مس ب)

اسی طرح ضابطہ ذیل بھی حاصل ہو سکتا ہے

مم (ا + ب + ج)

= (مم ا مم ب مم ج - مم ا - مم ب - مم ج) ÷ (مم ب مم ج + مم ج مم ا + مم ا مم ب - ۱)　　(۲۷)

(48)

مثالیں

۱- ثابت کرو کہ　مس (۴۵° + ا) - مس (۴۵° - ا) = ۲ مس ۲ ا

۲- ثابت کرو کہ اگر　ا + ب + ج = ن π　تو

مس ا + مس ب + مس ج - مس ا مس ب مس ج = ۰

اور اگر　ا + ب + ج = (۲ م + ۱) π/۲　تو

مس ب مس ج + مس ج مس ا + مس ا مس ب = ۱

اور مماس التمام کے لئے متناظر مسئلے بیان کرو۔

زاویوں کی کسی تعداد کے لئے جمع کے ضابطے

۴۹ — یہ ظاہر ہے کہ اب ہم چار زاویوں کے حاصل جمع کے دائری تفاعلوں کے لئے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں، اور پھر پانچ زاویوں کے حاصل جمع کے لئے، اور علیٰ ہذا۔ استقراء کے طریقے سے ہم ثابت کریں گے کہ ن زاویوں ا۱، ا۲، ا۳، ...، ان کے حاصل جمع کی جیب

اور جیب التمام کے لئے یہ ضابطے ہیں

$$\text{جب}\,(ا_1 + ا_2 + \cdots + ا_{ن}) = ج_1 - ج_3 + ج_5 - \cdots \qquad (۲۸)$$

$$\text{جم}\,(ا_1 + ا_2 + \cdots + ا_{ن}) = ج_0 - ج_2 + ج_4 - \cdots \qquad (۲۹)$$

جہاں $ج_{ر}$ سے ن زاویوں میں سے ر، ر کی جیوب اور باقی ن − ر زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے اور ن زاویوں میں سے ر زاویئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کیئے گئے ہیں، پس

$$ج_0 = \text{جم}\,ا_1\;\text{جم}\,ا_2 \cdots \text{جم}\,ا_{ن}\,،$$

$$ج_1 = \text{جب}\,ا_1\;\text{جم}\,ا_2\;\text{جم}\,ا_3 \cdots \text{جم}\,ا_{ن} + \text{جم}\,ا_1\;\text{جب}\,ا_2\;\text{جم}\,ا_3 \cdots \text{جم}\,ا_{ن} \cdots \cdots\,،$$

ضوابط (۲۸) اور (۲۹) صورتوں ن = ۲، ن = ۳ کے لئے ضابطوں (۱)، (۲) اور (۲۴)، (۲۵) کے مطابق ہیں، یہ مان لو کہ یہ ضابطے ن زاویوں کے لئے درست ہیں، ہم ثابت کریں گے کہ یہ، (ن + ۱) زاویوں کے لیے بھی درست ہیں، اب

$$\text{جب}\,(ا_1 + ا_2 + \cdots + ا_{ن} + ا_{ن+1})$$

$$= \text{جب}\,(ا_1 + \cdots + ا_{ن})\;\text{جم}\,ا_{ن+1} + \text{جم}\,(ا_1 + \cdots + ا_{ن})\;\text{جب}\,ا_{ن+1}$$

$$= \text{جم}\,ا_{ن+1}\,(ج_1 - ج_3 + ج_5 \cdots) + \text{جب}\,ا_{ن+1}\,(ج_0 - ج_2 + ج_4 \cdots\cdots)\,،$$

فرض کرو کہ $\bar{ج}_{ر}$ سے زاویوں $ا_1، ا_2 \cdots ا_{ن+1}$ میں سے ر، ر زاویوں کی جیوب اور باقی ن + ۱ − ر زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ زاویوں میں سے ر زاویئے ہر ممکن طریقہ سے منتخب کیئے گئے ہوں۔ تب

ج۲ = ج۱ جم لن+۱ + ج۰ جب لن+۱

کیونکہ ج۱ جم لن+۱ کی ہر رقم میں زاویوں ل۱، ل۲ ... لن میں سے ایک کی جیب ہے اور ج۰ جب لن+۱ کی ہر رقم میں صرف جب لن+۱ ہے۔

اسی طرح (49)

ج۳ = ج۳ جم لن+۱ + ج۲ جب لن+۱

ج۵ = ج۵ جم لن+۱ + ج۴ جب لن+۱

" " " " " " " " " " "

" " " " " " " " " " " " " "

اس لئے جب (ل۱ + ل۲ + ... + لن+۱) = ج۱ - ج۳ + ج۵ - ...

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ جم (ل۱ + ... + لن+۱) = ج۰ - ج۲ + ج۴ ...

پس اگر ضوابط (۲۸) اور (۲۹)، ن زاویوں کے لئے درست ہیں تو وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہیں، اور یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ وہ، ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہیں اس لئے وہ عام طور پر درست ہیں۔

ان ضابطوں کو اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے

جب (ل۱ + ل۲ + ... + لن) = جم ل۱ جم ل۲ × ... × جم لن (م۱ - م۳ + م۵ ....)

جم (ل۱ + ل۲ + ... + لن) = جم ل۱ جم ل۲ ... جم لن (۱ - م۲ + م۴ - ... ")،

جن میں مر سے مس ل۱، مس ل۲ ... ، مس لن میں سے ر، ر کے حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اس لئے تقسیم کے عمل سے

$$\text{مس}(ل_1 + ل_2 + \cdots + ل_ن) = \frac{م_1 - م_3 + م_5 - \cdots}{1 - م_2 + م_4 - \cdots} \quad \cdots\cdots \quad (۳۰)$$

جو ن زاویوں کے مجموعہ کے مماس کو ان زاویوں کے مماسوں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

ضابطہ (۳۰) کو بالواسطہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے۔ مان لو کہ وہ ن زاویوں کے لئے درست ہے ہم ثابت کریں گے کہ وہ ن + ۱ زاویوں کے لئے بھی درست ہے۔ اس طرح

$$\text{مس}\,(\text{ل}_1+\text{ل}_2+\dots+\text{ل}_{\text{ن}+1})=\frac{\text{مس}\,(\text{ل}_1+\text{ل}_2+\dots+\text{ل}_\text{ن})+\text{مس}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}}{1-\text{مس}\,(\text{ل}_1+\text{ل}_2+\dots+\text{ل}_\text{ن})\,\text{مس}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}}$$

$$=\frac{(\text{م}_1-\text{م}_3+\text{م}_5-\dots)+\text{مس}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}\,(1-\text{م}_2+\text{م}_4-\dots)}{(1-\text{م}_2+\text{م}_4\dots)-\text{مس}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}\,(\text{م}_1-\text{م}_3+\text{م}_5-\dots)}$$

اب اگر ن + ۱ زاویوں میں سے ر، ر زاویوں کے مماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع مَ ر سے تعبیر ہو تو

$$\text{مَ}_1=\text{م}_1+\text{مس}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}$$

$$\text{مَ}_2=\text{م}_2+\text{م}_1\,\text{مس}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}$$

$$\text{مَ}_3=\text{م}_3+\text{م}_2\,\text{مس}\,\text{ل}_{\text{ن}+1}$$

اس لئے　$$\text{مس}\,(\text{ل}_1+\text{ل}_2+\dots+\text{ل}_{\text{ن}+1})=\frac{\text{مَ}_1-\text{مَ}_3+\text{مَ}_5-\dots\dots}{1-\text{مَ}_2+\text{مَ}_4-\dots\dots}$$

اور چونکہ ضابطہ (۳۰)، ن = ۲، ۳ کے لئے درست ہے اس لئے ن = ۴ کے لئے درست ہے اور اس لئے عام طور پر درست ہے۔

(50) جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو جیوب یا جیوب التمام کے حاصل جمع کے طور پر بیان کرنا

۵۰ — ہم ایسے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں جو زاویوں کی کسی تعداد کی جیوب یا جیوب التمام کے حاصل ضرب کو ان زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام

کے مجموعہ کے طور پر بیان کریں۔

مثلاً

$$2\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2 = \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2) - \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2)$$

$$2^2\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2\,\text{جب}\,\text{ا}_3 = 2\,\text{جب}\,\text{ا}_3\{\text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2) - \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2)\}$$

$$= \text{جب}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3) + \text{جب}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$+ \text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3) - \text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$= \Sigma\,\text{جب}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3) - \text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$2^3\,\text{جب}\,\text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{ا}_2\,\text{جب}\,\text{ا}_3\,\text{جب}\,\text{ا}_4 = 2\,\text{جب}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3)\,\text{جب}\,\text{ا}_4 + \cdots$$

$$- 2\,\text{جب}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)\,\text{جب}\,\text{ا}_4$$

$$= \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4) - \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$+ \text{جم}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4) - \text{جم}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$+ \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3 - \text{ا}_4) - \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$- \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4) + \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4)$$

$$= \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 + \text{ا}_4) - \Sigma\,\text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3 - \text{ا}_4)$$

$$+ \frac{1}{2}\Sigma\,\text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3 - \text{ا}_4)$$

اسی طرح

$$2\,\text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2 = \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2) + \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_3)$$

$$2^2\,\text{جم}\,\text{ا}_1\,\text{جم}\,\text{ا}_2\,\text{جم}\,\text{ا}_3 = 2\,\text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2)\,\text{جم}\,\text{ا}_3 + 2\,\text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2)\,\text{جم}\,\text{ا}_3$$

$$= \text{جم}(-\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3) + \text{جم}(\text{ا}_1 - \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$+ \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 - \text{ا}_3) + \text{جم}(\text{ا}_1 + \text{ا}_2 + \text{ا}_3)$$

$$= \Sigma\, \text{جم}(-ا_۱ + ا_۲ + ا_۳) + \text{جم}(ا_۱ + ا_۲ + ا_۳)$$

$$۲^۳\, \text{جم}\, ا_۱\, \text{جم}\, ا_۲\, \text{جم}\, ا_۳\, \text{جم}\, ا_۴ = \Sigma\, \text{جم}(-ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ا_۴) + \frac{۱}{۲}\Sigma\, \text{جم}(ا_۱ + ا_۲ - ا_۳ - ا_۴)$$
$$+ \text{جم}(ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ - ا_۴)\text{؛}$$

ن زاویوں کے لئے عام ضابطے یہ ہیں:- اگر ن جفت ہے تو

$$(-۱)^{\frac{ن}{۲}}\, ۲^{ن-۱}\, \text{جب}\, ا_۱\, \text{جب}\, ا_۲ \ldots \text{جب}\, ا_ن$$
$$= ج_ن - ج_{ن-۱} + ج_{ن-۲} \ldots + (-۱)^{\frac{ن}{۲}}\, \frac{۱}{۲}\, ج_{\frac{۱}{۲}ن} \ldots\ldots (۳۱)$$

(51) جہاں $ج_{ن-ر}$ وہ حاصل جمع ہے جو زاویوں $ا_۱، ا_۲ \ldots ا_ن$ میں سے ن-ر، ن-ر زاویوں کو مثبت اور باقی ر زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب التمام کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، ہر اجتماع میں منفی زاویے لئے گئے ہیں۔ اگر ن طاق ہے تو

$$(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}\, ۲^{ن-۱}\, \text{جب}\, ا_۱\, \text{جب}\, ا_۲ \ldots \text{جب}\, ا_ن$$
$$= د_ن - د_{ن-۱} + د_{ن-۲} \ldots + (-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}\, د_{\frac{۱}{۲}(ن-۱)} \ldots\ldots (۳۲)$$

جہاں $د_{ن-ر}$ وہ حاصل جمع ہے جو زاویوں میں سے ن-ر، ن-ر زاویوں کو مثبت اور باقی ر زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح اگر ن جفت ہے تو

$$۲^{ن-۱}\, \text{جم}\, ا_۱\, \text{جم}\, ا_۲ \ldots \text{جم}\, ا_ن$$
$$= ج_ن + ج_{ن-۱} + ج_{ن-۲} \ldots\ldots + \frac{۱}{۲}\, ج_{\frac{۱}{۲}ن} \ldots\ldots (۳۳)$$

اور اگر ن طاق ہے تو

$$۲^{ن-۱}\, \text{جم}\, ا_۱\, \text{جم}\, ا_۲\, \text{جم}\, ا_۳ \ldots \text{جم}\, ا_ن$$

$$= \text{ج}_{\text{ن}} + \text{ج}_{\text{ن}-1} + \dots + \text{ج}_{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \qquad (34)$$

ضابطوں (۳۱)، (۳۲)، (۳۳)، (۳۴) کو اوپر ن = ۲، ۳، ۴ کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے اور اب ان کو استقراء کے طریقہ سے عام صورت کے لئے ثابت کیا جائے گا، مان لو کہ ضابطہ (۳۱) ن زاویوں کے لئے درست ہے، اس کو ۲ جب $\text{ا}_{\text{ن}+1}$ سے ضرب دو اور کسی رقم ۲ $\text{ج}_{\text{ن}-\text{ر}}$ جب $\text{ا}_{\text{ن}+1}$ کی بجائے جیوب کا مجموعہ رکھو تو حاصل ضرب

$$(-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\, 2^{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ا}_1\ \text{جب}\ \text{ا}_2 \dots \text{جب}\ \text{ا}_{\text{ن}}\ \text{جب}\ \text{ا}_{\text{ن}+1}$$

کے لئے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{د}_{\text{ن}+1} - \text{د}_{\text{ن}} + \dots + (-1)^{\frac{\text{ن}}{2}}\, \text{د}_{\frac{1}{2}(\text{ن}+2)}$$

جہاں $\text{د}_{\text{ر}}$ وہ حاصل جمع ہے جو ن + ۱ زاویوں میں سے ر، ر زاویوں کو مثبت اور باقی زاویوں کو منفی لیکر ان کے حاصل جمع کی جیوب کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے، پس یہ وہی ہے جو ضابطہ (۳۲) ہو جاتا ہے جبکہ اس میں ن کو ن + ۱ میں بدلا جائے، پھر یہی عمل اس نتیجہ کے ساتھ کرو تو حاصل ضرب

$$(-1)^{\frac{\text{ن}+1}{2}}\, 2^{\text{ن}+1}\ \text{جب}\ \text{ا}_1\ \text{جب}\ \text{ا}_2 \dots \text{جب}\ \text{ا}_{\text{ن}+2}$$

$$= \text{ج}_{\text{ن}+2} - \text{ج}_{\text{ن}+1} \dots + (-1)^{\frac{\text{ن}+2}{2}}\, \frac{1}{2}\, \text{ج}_{\frac{1}{2}(\text{ن}+2)}$$

جہاں $\text{ج}_{\text{ر}}$، ن + ۲ زاویوں کے لحاظ سے ہے، اس طرح ضابطہ (۳۱)، قیمت ن + ۲ کے لئے ثابت ہو چکا اگر ہم قیمت ن کے لئے ضابطوں (۳۱) اور (۳۲) کو درست مان لیں۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ضابطہ (۳۲)، ن + ۲ زاویوں کے لئے درست ہے، اور چونکہ یہ ضابطے ن = ۳، ۴ کے لئے ثابت کئے جا چکے ہیں اس لئے وہ عام صورت

(52)

میں بھی درست ہیں۔ جیوب التمام کی کسی تعداد کے حاصل ضربوں کے ضابطے (۳۳) اور (۳۴) اسی طریقہ سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

مثال — ثابت کرو کہ ن زاویوں عہ، بہ، جہ، ضہ، ... کے لئے

Σ جب (عہ ± بہ ± جہ ± ضہ ± ....) = ۲$^{ن-۱}$ جب عہ جم بہ جم جہ جم ضہ ...،

Σ جم (عہ ± بہ ± جہ ± ضہ ± ....) = ۲$^{ن-۱}$ جم عہ جم بہ جم جہ جم ضہ ...،

جہاں Σ سے وہ حاصل جمع تعبیر ہوتا ہے جو علامتوں کی تمام ممکن ترتیبوں کو جو ن-۱ ابہامات کی باعث پیدا ہو سکتی ہیں لینے سے بنتا ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعلوں کے لئے ضوابط

۵۱ — جمع کے ضابطوں میں جو ہم نے دو یا دو سے زیادہ زاویوں کے لئے حاصل کئے ہیں ہر زاویہ کو ا کے مساوی فرض کریں تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-

جب ۲ ا = ۲ جب ا جم ا، . . . . (۳۵)

جم ۲ ا = جم^{۲} ا − جب^{۲} ا = ۱ − ۲ جب^{۲} ا = ۲ جم^{۲} ا − ۱ . . . (۳۶)

جب ۳ ا = ۳ جب ا جم^{۲} ا − جب^{۳} ا

یا جب ۳ ا = ۳ جب ا − ۴ جب^{۳} ا، . . . . (۳۷)

جم ۳ ا = جم^{۳} ا − ۳ جم ا جب^{۲} ا

یا جم ۳ ا = ۴ جم^{۳} ا − ۳ جم ا، . . . . (۳۸)

جب ن ا = ن جب ا جم$^{ن-۱}$ ا − $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳}$ جب^{۳} ا جم$^{ن-۳}$ ا + ... (۳۹)

جم ن ا = جم^{ن} ا − $\frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}$ جب^{۲} ا جم$^{ن-۲}$ ا

$$+ \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴} جب^۴ ا جم^{ن-۴} ا - \ldots \quad (۴۰)$$

یہ آخری ضابطے (۳۹) اور (۴۰)، (۳۸) اور (۲۹) سے حاصل ہوتے ہیں، کیونکہ دفعہ ۹۴ میں ج ر میں اتنی ہی ارقام شامل ہوتی ہیں جتنی تعداد ان اجتماعوں کی ہے جو ن اشیاء میں سے ر، ر اشیاء کو باہم لینے سے حاصل ہوتے ہیں، اور ج ر

$$= \frac{ن(ن-۱) \ldots (ن-ر+۱)}{\lfloor ر} جب^ر ا جم^{ن-ر} ا$$

ضابطوں (۳۹)، (۴۰) کو اس شکل میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$جب ن ا = جم^ن ا \left\{ ن مس ا - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} مس^۳ ا + \ldots \right\}$$

$$جم ن ا = جم^ن ا \left\{ ۱ - \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} مس^۲ ا + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{\lfloor ۴} مس^۴ ا \ldots \right\}$$

نیز (۹)، (۲۶) اور (۳۰) سے

$$مس ۲ ا = \frac{۲ مس ا}{۱ - مس^۲ ا} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (۴۱)$$

$$مس ۳ ا = \frac{۳ مس ا - مس^۳ ا}{۱ - ۳ مس^۲ ا} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (۴۲)$$

$$مس ن ا = \frac{ن مس ا - \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{\lfloor ۳} مس^۳ ا + \ldots}{۱ - \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲} مس^۲ ا + \ldots} \quad \ldots \quad (۴۳)$$

اس طرح ہم نے ایک زاویہ کے ضعف کے دائری تفاعلوں کے لئے خود اس زاویہ کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں ضابطے حاصل کئے ہیں۔

(53)

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ تواترون

جب ا، جب ۲ ا، جب ۳ ا، ....

جم ا، جم ۲ ا، جم ۳ ا، ......

میں سے ہر ایک تواتر متوالی (Recurring) ہے، کیونکہ

جب (ن+۱) ا = ۲ جم ا جب ن ا - جب (ن-۱) ا،

جم (ن+۱) ا = ۲ جم ا جم ن ا - جم (ن-۱) ا؛

پس ہر ایک تواتر کی ہر رقم اس طرح حاصل ہوتی ہے کہ اس سے ما قبل رقم کو ۲ جم ا سے ضرب دیکر حاصل ضرب میں سے اس ما قبل رقم کی پچھلی رقم کو تفریق کیا جائے اس طریقہ سے تواتروں کی ارقام یکے بعد دیگرے محسوب کیجاسکتی ہیں اگر ہم ضابطہ (۳۵) اور (۳۶) کو مان لیں -

اس لئے سلسلوں

۱ + لا جب ا + لا^۲ جب ۲ ا + ...، اور ۱ + لا جم ا + لا^۲ جم ۲ ا + ...

میں سے ہر ایک کے ربط کا پیمانہ یہ ہے

۱ - ۲ لا جم ا + لا^۲

جیب یا جیب التمام کی قوتوں کے لئے ضعفی زاویوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں جملے

۵۲۔ کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی کسی قوت کے لئے خود زاویہ کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں جملے حاصل کرنے کے لئے دفعہ (۵۰) کے ضابطوں میں تمام زاویوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنا چاہیئے، اس طرح حسب ذیل ضابطے حاصل ہونگے۔

۲ جب^۲ ا = ۱ - جم ۲ ا

۴ جب^۳ ا = ۳ جب ا - جب ۳ ا،

۸ جب^۴ ا = جم ۴ ا - ۴ جم ۲ ا + ۳

$$\text{۲ جم}^{۲}\text{ ا} = \text{۱} + \text{جم ۲ ا} ،$$

$$\text{۴ جم}^{۳}\text{ ا} = \text{۳ جم ا} + \text{جم ۳ ا} ،$$

$$\text{۸ جم}^{۴}\text{ ا} = \text{جم ۴ ا} + \text{۴ جم ۲ ا} + \text{۳} ،$$

(54)

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}}{\text{۲}}}\ \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\ \text{جب}^{\text{ن}}\text{ ا} = \text{جم ن ا} - \text{ن جم(ن} - \text{۲) ا} + \frac{\text{ن (ن} - \text{۱)}}{\lfloor\text{۲}}\ \text{جم(ن} - \text{۴) ا} - \ldots$$

$$+ (-\text{۱})^{\frac{\text{ن}}{\text{۲}}}\ \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}\ \lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}} ، \quad \ldots \quad (\text{۴۴})$$

(ن جفت)،

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\ \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\ \text{جب}^{\text{ن}}\text{ ا} = \text{جب ن ا} - \text{ن جب(ن} - \text{۲) ا} + \frac{\text{ن (ن} - \text{۱)}}{\lfloor\text{۲}}\ \text{جب(ن} - \text{۴) ا} - \ldots$$

$$+ (-\text{۱})^{\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲}}}\ \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})\ \lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}+\text{۱})}\ \text{جب ا} ، \quad \ldots \quad (\text{۴۵})$$

(ن طاق)،

$$\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\ \text{جم}^{\text{ن}}\text{ ا} = \text{جم ن ا} + \text{ن جم(ن} - \text{۲) ا} + \frac{\text{ن (ن} - \text{۱)}}{\lfloor\text{۲}}\ \text{جم(ن} - \text{۴) ا} + \ldots$$

$$+ \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}\ \lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}} ، \quad \ldots \quad (\text{۴۶})$$

ن (جفت)،

$$\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\ \text{جم}^{\text{ن}}\text{ ا} = \text{جم ن ا} + \text{ن جم(ن} - \text{۲) ا} + \frac{\text{ن (ن} - \text{۱)}}{\lfloor\text{۲}}\ \text{جم(ن} - \text{۴) ا} + \ldots$$

$$+ \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})\ \lfloor\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}+\text{۱})}\ \text{جم ا} ، \quad \ldots \quad (\text{۴۷})$$

(ن طاق)

ضابطوں (۴۴) اور (۴۵) کو (۴۶)، (۴۷) سے ان میں ا کی بجائے ۹۰° − ا رکھ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مقلوب تفاعلوں کے درمیان رشتے

۵۳ — اس باب کے جمع کے ضابطوں کے جواب میں وہ ضابطے معلوم کئے جاسکتے ہیں جن میں مقلوب تفاعل شریک ہوں۔ مثلاً ضابطوں (۱) اور (۳) میں جم ا = و، جم ب = ب رکھنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ

$$\text{جم}^{-1}\text{و} \pm \text{جم}^{-1}\text{ب} = \text{جم}^{-1}\left\{\text{و ب} \mp \sqrt{1-\text{و}^2}\sqrt{1-\text{ب}^2}\right\},$$

اسی طرح (۲) اور (۴) سے حاصل ہوگا

$$\text{جب}^{-1}\text{و} \pm \text{جب}^{-1}\text{ب} = \text{جب}^{-1}\left\{\text{و}\sqrt{1-\text{ب}^2} \pm \text{ب}\sqrt{1-\text{و}^2}\right\}$$

(۹)، (۱۰)، (۱۱) اور (۱۲) سے

$$\text{مس}^{-1}\text{و} \pm \text{مس}^{-1}\text{ب} = \text{مس}^{-1}\frac{\text{و} \pm \text{ب}}{1 \mp \text{و ب}}$$

$$\text{مم}^{-1}\text{و} \pm \text{مم}^{-1}\text{ب} = \text{مم}^{-1}\frac{\text{و ب} \mp 1}{\text{ب} \pm \text{و}}$$

اور (۲۶) اور (۳۰) سے

$$\text{مس}^{-1}\text{و} + \text{مس}^{-1}\text{ب} + \text{مس}^{-1}\text{ج} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{و} + \text{ب} + \text{ج} - \text{و ب ج}}{1 - \text{ب ج} - \text{ج و} - \text{و ب}}\right)$$

$$\text{مس}^{-1}\text{و}_1 + \text{مس}^{-1}\text{و}_2 + \dots + \text{مس}^{-1}\text{و}_{\text{ن}} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{س}_1 - \text{س}_3 + \text{س}_5 \dots}{1 - \text{س}_2 + \text{س}_4 \dots}\right), \quad (55)$$

جہاں $\text{س}_{\text{ر}}$، مقداروں و_1، و_2، ... $\text{و}_{\text{ن}}$، ان میں سے ر، ر مقداروں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ان ضابطوں میں، ایک مقلوب تفاعل کے سوا باقی سب مقلوب تفاعلوں کو اختیاری طور پر کوئی مخصوص قیمتیں دیجاسکتی ہیں اور اس ایک مقلوب تفاعل کی مخصوص قیمت کا تعین دوسروں

کی قیمتیں مقرر کرنے کے بعد ہو سکتا ہے۔ مزید براں اگر کسی ضابطہ میں (مثلاً) تین مقلوب تفاعل شامل ہوں اور ان میں سے دو کی صدر قیمتیں دیجائیں تو یہ ضروری نہیں ہے کہ تیسرے مقلوب تفاعل کی قیمت بھی صدر ہو مثلاً ضابطہ

مس⁻¹ ا + مس⁻¹ ب = مس⁻¹ (ا + ب)/(ا - اب)

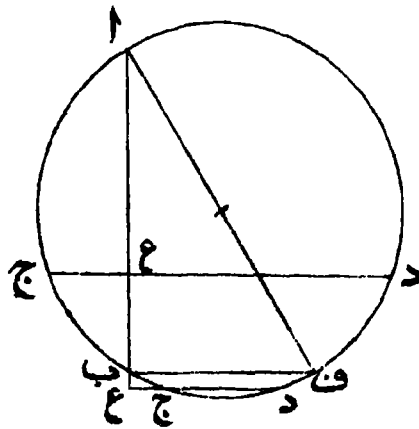
میں اگر مس⁻¹ ا اور مس⁻¹ ب دونوں مثبت ہوں اور ان کی قیمتیں صدر ہوں یعنی وہ قیمتیں جو صفر اور $\frac{1}{2}$ π کے درمیان ہیں، اور اگر ان کا مجموعہ $\frac{1}{2}$ π سے بڑا ہو تو یہ مجموعہ مقلوب تفاعل

مس⁻¹ (ا + ب)/(ا - اب)

کی صدر قیمت نہیں ہے؛ یہ صدر قیمت، صفر اور - $\frac{1}{2}$ π کے درمیان ایک زاویہ ہے جس کا ماس وہی ہے جو مس⁻¹ ا اور مس⁻¹ ب کا مجموعہ ہے۔

ضابطوں کے ہندسی ثبوت

۵۴ — اس باب کے اکثر ضابطوں کے ہندسی ثبوت دئے جا سکتے ہیں، ایسے ثبوتوں کی صرف تین مثالیں دیجائیں گی۔ یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ بالعموم یہ ثبوت زاویوں کی صرف ایک محدود وسعت کے لئے درست ہوتے ہیں۔

(۱) ضابطہ مس (ا ± ب) = (مس ا ± مس ب)/(ا ∓ مس ا مس ب) ثابت کرو۔

(36) فرض کرو کہ ایک دائرے کے دو وتر ا ب، ج د ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں، اور فرض کرو کہ زاویے ا د ع، ب د ع کو ا اور ب سے تعبیر کیا گیا ہے، تو چونکہ

$$\text{اع} \times \text{ع ب} = \text{ج ع} \times \text{ع د} \quad \text{اس لئے}$$

$$\frac{\dfrac{\text{اع} \pm \text{ع ب}}{\text{ع د}}}{1 \mp \dfrac{\text{اع}}{\text{ع د}} \times \dfrac{\text{ع ب}}{\text{ع د}}} = \frac{\text{اع} \pm \text{ع ب}}{\text{ع د} \pm \text{ع ج}} = \frac{\text{اب}}{\text{ب ف}}$$

اس لئے

$$\text{مس}\,(\text{ا} \pm \text{ب}) = \frac{\text{مس ا} \pm \text{مس ب}}{1 \mp \text{مس ا مس ب}}$$

(۲) ضابطہ $\text{جب ۲ ا} = \text{۲ جب ا جم ا}$،

اور $\text{جم ۲ ا} = \text{جم}^2\,\text{ا} - \text{جب}^2\,\text{ا}$

ثابت کرو۔

فرض کرو کہ ا و اَ، دائرہ کا ایک قطر ہے اور ف ا اَ = ا، تب ف و اَ = ۲ ا،
ف ن ا اَ پر عمود نکالو۔

تب $\text{جب۲ا} = \frac{\text{ف ن}}{\text{و ف}}$ ، لیکن $\text{ف ن} \times \text{ا اَ} = ۲ \triangle \text{ا ف اَ}$
$= \text{ا ف} \times \text{ف اَ}$

اس لئے $\text{جب۲ا} = \frac{\text{ا ف} \times \text{اَ ف}}{\text{و ف} \times \text{ا اَ}} = \frac{\text{ا اَ}^۲ \text{جب ا جم ا}}{\text{و ف} \times \text{ا اَ}} = \text{۲ جب ا جم ا}$ ،

نیز $\text{جم۲ا} = \frac{\text{و ن}}{\text{و ف}} = \frac{\text{ا ن}^۲ - \text{اَ ن}^۲}{۲ \times \text{ا اَ} \times \text{و ف}} = \frac{\text{ا ف}^۲ - \text{اَ ف}^۲}{\text{ا اَ}^۲} = \text{جم}^۲\text{ا} - \text{جب}^۲\text{ا}$

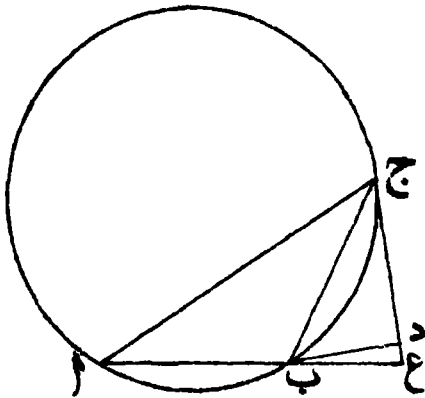
(۳) ضابطہ $\text{جب۳ا} = \text{۳ جب ا} - ۴\,\text{جب}^۳\text{ا}$ ،

اور $\text{جم۳ا} = ۴\,\text{جم}^۳\text{ا} - \text{۳ جم ا}$

کو ثابت کرو۔

فرض کرو کہ ج ا ب = ا ج ب = ا ؛ مثلث ا ب ج کا بیرونی دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ ا ب، نقطہ ج پر کے مماس سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔
ب د، ج ع پر عمود نکالو۔

(57)

زاویہ ب ع د = ۳ ا یا ۱۸۰° − ۳ ا

اب $\frac{\text{ا ع}}{\text{ب ع}} = \frac{\triangle \text{ا ج ع}}{\triangle \text{ب ج ع}} = \frac{\text{ا ج}^۲}{\text{ب ج}^۲} = ۴\,\text{جم}^۲\text{ا}$

اس لئے $\frac{\text{اب}}{\text{بع}} = ۴\,\text{جم}^{۲}\text{ا} - ۱ = ۳ - ۴\,\text{جب}^{۲}\text{ا}$ ؛

پس $\text{جب}\,۳\text{ا} = \frac{\text{بد}}{\text{بع}} = \frac{\text{بد}}{\text{اب}} \times \frac{\text{اب}}{\text{بع}} = ۳\,\text{جب ا} - ۴\,\text{جب}^{۳}\text{ا}$ ؛

اور $\text{جم}\,۳\text{ا} = \frac{\text{دع}}{\text{بع}} = \frac{\text{دج}}{\text{بع}} - \frac{\text{عج}}{\text{بع}} = \frac{\text{دج}}{\text{بج}} \times \frac{\text{بج}}{\text{بع}} - \frac{\text{اج}}{\text{اب}}$

$= \text{جم ا}\,(۴\,\text{جم}^{۲}\text{ا} - ۱) - ۲\,\text{جم ا} = ۴\,\text{جم}^{۳}\text{ا} - ۳\,\text{جم ا}$

(۱) اور (۳) کے ثبوت مسٹر بارٹ نے (Messenger of Mathematics) کی جلد چہارم میں دئے تھے۔

مثالیں

ضوابط ذیل کو ہندسی طور پر ثابت کرو۔

(۱) $\text{مس}^{۲}\text{ا} = \frac{۱ - \text{جم}\,۲\text{ا}}{۱ + \text{جم}\,۲\text{ا}}$

(۲) $\text{مس}\,(۴۵^{\circ} + \text{ا}) - \text{مس}\,(۴۵^{\circ} - \text{ا}) = ۲\,\text{مس}\,۲\text{ا}$

(۳) $\text{جب ا جب ب} = \text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{ا} + \text{ب}) - \text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}(\text{ا} - \text{ب})$

(۴) $\text{جب}^{۲}\text{ع} + \text{جب}^{۲}\text{ہ} = \text{جب}^{۲}(\text{ع} + \text{ہ}) - ۲\,\text{جب ع جب ہ جم}\,(\text{ع} + \text{ہ})$

(۵) $\text{مس}^{-۱}\frac{\text{م}}{\text{ن}} - \text{مس}^{-۱}\frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} = \frac{\pi}{۴}$

(۶) $\text{جم}^{۲}\text{ا} + \text{جم}^{۲}\text{ب} + \text{جم}^{۲}\text{ج} + ۲\,\text{جم ا جم ب جم ج} = ۱$ ،
جہاں $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^{\circ}$

(۷) $\text{جب ا} + \text{جب ب} - \text{جب ج} = ۴\,\text{جب}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ا جب}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ب جم}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ج}$
جہاں $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰^{\circ}$

(۸) $\text{مم طہ} = \text{قم}\,۲\,\text{طہ} + \text{مم}\,۲\,\text{طہ}$

(۹) جم ۳۶° - جب ۱۸° = ½

چوتھے باب پر مثالیں

متماثلات ۱ تا ۱۵ ثابت کرو۔

۱- جم² ا + جم² (۱۲۰° + ا) + جم² (۱۲۰° - ا) = ³⁄₂

۲- (جم ا + جب ا)⁴ + (جم ا - جب ا)⁴ = ۳ - جم ۴ ا

۳- جب ۳ ا جب³ ا + جم ۳ ا جم³ ا = جم³ ۲ ا

۴- ۴ جم³ ا جب ۳ ا + ۴ جب³ ا جم ۳ ا = ۳ جب ۴ ا

۵- جب³ ا + جب³ (۱۲۰° + ا) - جب³ (۱۲۰° - ا) = - ³⁄₄ جب ۳ ا

۶- (جب ا + جب ۳ ا + جب ۵ ا + جب ۷ ا) / (جم ا + جم ۳ ا + جم ۵ ا + جم ۷ ا) = مس ۴ ا

۷- ۱۶ جم⁵ ا - جم ۵ ا = ۵ جم ا (۱ + ۲ جم ۲ ا)

۸- قم (م + ن) لا قم م لا قم ن لا - مم (م + ن) لا مم م لا مم ن لا

= مم م لا + مم ن لا - مم (م + ن) لا

۹- Σ جم ا (جم ۳ ب - جم ۳ ج)

= ۴ (جم ب - جم ج) (جم ج - جم ا) (جم ا - جم ب) (جم ا + جم ب + جم ج)

۱۰- Σ جب ا (جب² ب + جب² ج) جب (ب - ج)

= جب (ب - ج) جب (ج - ا) جب (ا - ب) جب (ا + ب + ج)

۱۱- مس (ا + ۶۰°) مس (ا - ۶۰°) + مس ا مس (ا + ۶۰°) + مس (ا - ۶۰°) مس ا

= - ۳

۱۲- مم (ا + ۶۰°) مم (ا - ۶۰°) + مم ا مم (ا + ۶۰°) + مم (ا - ۶۰°) مم ا

= - ۳

۱۳۔ جم ۳ ل / جم ل − جم ۶ ل / جم ۲ ل + جم ۹ ل / جم ۳ ل − جم ۱۸ ل / جم ۶ ل

= ۲ (جم ۲ ل − جم ۴ ل + جم ۶ ل − جم ۱۲ ل)

۱۴۔ Σ جب (ب + ج + د − ا) / جب (ا − ب) جب (ا − ج) جب (ا − د) = ۰

۱۵۔ جم ۴ ا / جب ا جب (ا − ب) جب (ا − ج) + جم ۴ ب / جب ب جب (ب − ا) جب (ب − ج)

\+ جم ۴ ج / جب ج جب (ج − ا) جب (ج − ب) = ۸ جب (ا + ب + ج) + قم ا قم ب قم ج

اگر ا + ب + ج = π تو روابط از مثال ۱۶ تا ۲۷ ثابت کرو :-

۱۶۔ Σ مس ا مم ب مم ج = Σ مس ا − ۲ Σ مم ا

۱۷۔ Σ مم ا = مم ا مم ب مم ج + قم ا قم ب قم ج

۱۸۔ Σ جب (ب − ج) جم³ ا = − جب (ب − ج) جب (ج − ا) جب (ا − ب)

۱۹۔ Σ (جب ب + جب ج) (جم ج + جم ا) (جم ا + جم ب)

= (جب ب + جب ج) (جب ج + جب ا) (جب ا + جب ب)

۲۰۔ Σ جب ا جم (ا − ب) جم (ا − ج)

= ۳ جب ا جب ب جب ج + جب ۲ ا جب ۲ ب جب ۲ ج

۲۱۔ Σ جب ۲ ب جب ۲ ج = ۴ { جب² ا جب ب جب ج + جم² ا جم³ ب

× مم² ج + جم ا جم ب جم ج }

۲۲۔ Σ جم ۲ ا (مس ب − مس ج)

= − ۲ جب (ب − ج) جب (ج − ا) جب (ا − ب) قط ا قط ب قط ج

۲۳- Σ جم ۲ا (جب ۲ب + جب ۲ج) = ۲ جب ب جب ج

۲۴- Σ جم ا (جب ۳ ا = ا Σ جب ۲ ا) {۳/۲ + Σ جم ۲ ا}

۲۵- (جب ا + جب ب + جب ج) (- جب ا + جب ب + جب ج) (جب ا - جب ب + جب ج) × (جب ا + جب ب - جب ج) = جب^۲ ا جب^۲ ب جب^۲ ج

۲۶-

جب^۲ ا	مم ا	۱
جب^۲ ب	مم ب	۱
جب^۲ ج	مم ج	۱

= ۰

۲۷- Σ قم ب قم ج قط (ب - ج)
= قط (ب - ج) قط (ج - ا) قط (ا - ب) (۳ + ۸ جم ا جم ب جم ج)

۲۸- اگر عہ + بہ + جہ = ۱/۲ π تو ثابت کرو کہ
جب^۲ عہ + جب^۲ بہ + جب^۲ جہ + ۲ جب عہ جب بہ جب جہ = ۱

۲۹- ثابت کرو کہ
۱/(۱ + ۲ جم (۱/۳ π + طہ)) + ۱/(۱ + ۲ جم (۱/۳ π - طہ)) = ۱/(۲ جم طہ - ۱)

۳۰- ثابت کرو کہ
جب^۲ (طہ + عہ) + جب^۲ (طہ + بہ) - ۲ جم (عہ - بہ) جب (طہ + عہ) جب (طہ + بہ)
طہ پر منحصر نہیں ہے۔

۳۱- اگر مس بہ = (ن جب عہ جم عہ)/(۱ - ن جب^۲ عہ) تو ثابت کرو کہ
مس (عہ - بہ) = (۱ - ن) مس عہ

۳۲- اگر مس فہ = (جب عہ جب طہ)/(جم طہ - جم عہ)
تو ثابت کرو کہ

مس ط = جب عہ جب فہ / (جم فہ ± جم عہ)

۳۳۔ اگر ۲√۲ جم ا = جم ب + جم^۳ ب ، ۲√۲ جب ا = جب ب - جب^۳ ب
تو ثابت کرو کہ ± جب (ا - ب) = جم ۲ ب = ۱/۳

۳۴۔ ثابت کرو کہ

(جم ۳ طہ + جم ۳ فہ) / (۲ جم (طہ - فہ) - ۱) = (جم طہ + جم فہ) جم (طہ + فہ) - (جب طہ + جب فہ) جب (طہ + فہ)

۳۵۔ اگر طہ اور فہ مساوات

جب طہ + جب فہ = ۳√ (جم فہ - جم طہ)

کو پورا کریں تو جب ۳ طہ + جب ۳ فہ = ۰

۳۶۔ ثابت کرو کہ مس ۷۰° = مس ۲۰° + ۲ مس ۴۰° + ۴ مس ۱۰°

۳۷۔ اگر جم^۴ عہ / جم^۲ بہ + جب^۴ عہ / جب^۲ بہ = ۱ تو

جم^۴ بہ / جم^۲ عہ + جب^۴ بہ / جب^۲ عہ = ۱

۳۸۔ اگر جم (ا + ب) جم (ج + د) = جم (ا - ب) جم (ج - د)
تو مم ا مم ب مم ج = مم د

۳۹۔ اگر عہ + بہ + جہ = ۱/۲ ۲ تو

(جم عہ + جب عہ) (جم بہ + جب بہ) (جم جہ + جب جہ) = ۲ (جم عہ جم بہ جم جہ + جب عہ جب بہ جب جہ)

۴۰۔ اگر ا + ب + ج = ۲ ، اور جم ا = جم ب جم ج
تو مم ب مم ج = ۱/۲

۴۱۔ اگر ۲ جب^۲ عہ جب^۲ بہ جب^۲ جہ + جب^۲ عہ + جب^۲ بہ + جب^۲ جہ

(60)

- ۲ جب۲ بہ جب۲ جہ - ۲ جب۲ جہ جب۲ عہ - ۲ جب۲ عہ جب۲ بہ = ۰

تو ثابت کرو کہ عہ ± بہ ± جہ، π کا ضعف ہے۔

۴۲- اگر مس(عہ + بہ − جہ) / مس(عہ − بہ + جہ) = مس جہ / مس بہ تو ثابت کرو کہ

جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ = ۰

۴۳- اگر قط عہ = قط بہ قط جہ + مس بہ مس جہ

تو ثابت کرو کہ قط بہ = قط جہ قط عہ ± مس جہ مس عہ اور قط جہ = قط عہ قط بہ ± مس عہ مس بہ

۴۴- اگر (جب۲ طہ جم فہ − جم۲ طہ جب فہ) / (جم فہ مس بہ) = (جب۲ فہ جم طہ − جم۲ فہ جب طہ) / (جم طہ مس عہ) = جم(طہ + فہ)

تو (جب۲ عہ جم بہ − جم۲ عہ جب بہ) / (جم عہ مس طہ) = (جب۲ بہ جم عہ − جم۲ بہ جب عہ) / (جم بہ مس فہ) = جم(عہ + بہ)

۴۵- اگر ا، ب، ج مثبت زاویے ہوں ایسے کہ ا + ب + ج = ۹۰° تو ثابت کرو کہ

قط ا قط ب قط ج + ۲ Σ مس ب مس ج = ۲

۴۶- اگر (جم(طہ + بہ) جم(طہ + جہ) + ۱) / جم(بہ + جہ) = (جم(طہ + جہ) جم(طہ + عہ) + ۱) / جم(جہ + عہ) = (جم(طہ + عہ) جم(طہ + بہ) + ۱) / جم(عہ + بہ)

تو ثابت کرو کہ قم(بہ − عہ) قم(بہ − عہ) + قم(جہ − بہ) قم(عہ − بہ) + قم(عہ − جہ) قم(بہ − جہ) = ۱

۴۷- اگر جب۳ طہ + جب۳ فہ = ۴ا جب۳ طہ جب۳ فہ، اور جب طہ + جب فہ = جب ¼ π

تو ثابت کرو کہ ۲ جب طہ = جب(¼ π ± ½ π)، جب ¼ π، یا جم(¼ π ± ¼ π)، جم ¼ π،

۴۸- اگر جم(ا + ب + ج) = جم ا جم ب جم ج

تو ۸ جب(ب + ج) جب(ج + ا) جب(ا + ب) + جب ۲ا جب ۲ب جب ۲ج = ۰

۴۹- اگر مس طہ + مس فہ + مس بہ = − مس طہ مس فہ مس بہ = مس(طہ + فہ + بہ)

تو یا زاویوں طہ، فہ، بہ میں سے دو زاویے م π + ½ π، ن π − ½ π کے مساوی ہیں یا ان میں سے ایک اور نیز باقی دو کا مجموعہ π کے ضعف ہیں۔

۵۰۔ اگر $\frac{\text{جب}(ب-ج)}{\text{جم } ع}$ جم(ط-۲ع) + $\frac{\text{جب}(ج-ع)}{\text{جم } ب}$ جم(ط-۲ب) + $\frac{\text{جب}(ع-ب)}{\text{جم } ج}$ جم(ط-۲ج)

= جب(ب-ج) جب(ج-ع) جب(ع-ب)

تو ثابت کرو کہ جم ط = جم ع جم ب جم ج

۵۱۔ اگر ع، ب، ج، ض کوئی چار زاویے ہوں اور ۲ش = ع + ب + ج + ض تو

جم ع جم ب جم ج جم ض + جب ع جب ب جب ج جب ض

= جم(ش-ع) جم(ش-ب) جم(ش-ج) جم(ش-ض)

+ جب(ش-ع) جب(ش-ب) جب(ش-ج) جب(ش-ض)

(61)

۵۲۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ لا = ۲ مس$^{-1}$ {قم مس$^{-1}$ لا - مس قم$^{-1}$ لا}

۵۳۔ ثابت کرو کہ

۲ مس$^{-1}$ لا + ۲ مس$^{-1}$ ما = جب$^{-1}$ $\left\{ \frac{۲(\text{لا}+\text{ما})(۱-\text{لا ما})}{(۱+\text{لا}^{2})(۱+\text{ما}^{2})} \right\}$

۵۴۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ [$\frac{1}{2}$(جم ۲ع قط ۲ب + جم ۲ب قط ۲ع)] = مس$^{-1}$ [مس^{2}(ع+ب) مس^{2}(ع-ب)] + مس$^{-1}$ ۱

۵۵۔ ثابت کرو کہ

مس$^{-1}$ ۱ + مس$^{-1}$ ۲ + مس$^{-1}$ ۳ = π = ۲ (مس$^{-1}$ ۱ + مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ + مس$^{-1}$ $\frac{1}{3}$)

۵۶۔ اگر جم$^{-1}$ لا + جم$^{-1}$ ما + جم$^{-1}$ ی = π

تو لا^{2} + ما^{2} + ی^{2} + ۲ لا ما ی = ۱

۵۷۔ اگر مس$^{-1}$ ما = ۵ مس$^{-1}$ لا تو ما کو لا کے ایک جبری تفاعل کے طور پر معلوم کرو۔ اس سے ثابت کرو کہ مس ۱۸°، مساوات ۵ لا^{4} - ۱۰ لا^{2} + ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔

۵۸ - اگر ۲ ش = عہ + بہ + جہ تو ثابت کرو کہ

مس^-1 (۲ جم عہ جم بہ جم جہ / (جم^۲ عہ + جم^۲ بہ + جم^۲ جہ - ۱)) - مس^-1 [مس ش مس (ش - عہ) مس (ش - بہ) مس (ش - جہ)]

= مس^-1 ۱

۵۹ - ثابت کرو کہ

مس^-1 √(ا (ا + ب + ج) / ب ج) + مس^-1 √(ب (ا + ب + ج) / ج ا) + مس^-1 √(ج (ا + ب + ج) / ا ب) = π

۶۰ - ثابت کرو کہ مساوات

جب^-1 لا ± جب^-1 ما ± جب^-1 ی ± جب^-1 ع = ن π ، (جہاں ن صحیح عدد ہے)

کا جبری مماثل حسب ذیل ہے

{ ۴ (س - ما) (س - ی) (س - ع) - (لا ما + ی ع) (لا ی + ما ع) }

× { ۴ س (س - لا - ما) (س - لا - ی) (س - لا - ع) - (ی ع - لا ما) (ما ع - لا ی) ×

(ما ی - لا ع) } = ۰

جہاں ۲ س = لا + ما + ی + ع

مثال ۶۱ تا ۶۷ کی مساواتیں حل کرو۔

۶۱ - جب طہ + ۲ جم طہ = ۱

۶۲ - جب ۵ طہ = ۱۶ جب^۵ طہ

۶۳ - جب طہ - جب طہ = جب ۳ طہ

۶۴ - مس ۲ طہ = ۸ جم^۲ طہ - مم طہ

۶۵ - مس (۴۵° + ل) = ۳ مس (۴۵° - ل)

۶۶ - ۲ جب (طہ - فہ) = جب (طہ + فہ) = ۱

۶۷ - قط ۴ طہ - قط ۲ طہ = ۲

(62)

۶۸ - جب م طہ + جب ن طہ + جب (م + ن) طہ = ۰

۶۹ - جب (ن + ۱)/۲ طہ + جب (ن − ۱)/۲ طہ = جم طہ

۷۰ - مس طہ + قط ۲ طہ = ۱

۷۱ - ۲ (جب^{۴} طہ + جم^{۴} طہ) = ۱

۷۲ - مس طہ + مس ۳ طہ + مس ۵ طہ = ۰

۷۳ - مم$^{-۱}$ لا − مم$^{-۱}$ (لا + ۲) = °۱۵

۷۴ - ا جب$^{-۱}$ لا + ب جم$^{-۱}$ ما = عہ ،

و جم$^{-۱}$ لا − ب جب$^{-۱}$ ما = بہ

۷۵ - قم ۴ عہ − قم ۴ طہ = مم ۴ عہ − مم ۴ طہ

۷۶ - تفاعلوں (ا) جب لا + جب ۲ لا ،

(ب) جم ۲ لا / جم لا

کی ترسیمات کھینچو ۔

۷۷ - مساوات ا (جب طہ − جم عہ) = ب (جب عہ − جم طہ)

کے سب حل دریافت کرو ۔

۷۸ - اگر م صحیح عدد ہو اور ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

جب ۲م ا + جب ۲م ب + جب ۲م ج = (−۱)$^{م+۱}$ ۴ جب م ا جب م ب جب م ج ،

جم ۲م ا + جم ۲م ب + جم ۲م ج = (−۱)^{م} ۴ جم م ا جم م ب جم م ج − ۱

۷۹ - ثابت کرو کہ لا + ۸ لا ی + ۴ ی^{۲} = ۴ لا^{۲} ما

جہاں لا = جب ا + جب ب + جب ج ، ما = جب ب جب ج + جب ج جب ا

+ جب ا جب ب ، ی = جب ا جب ب جب ج

۸۰ - اگر (۱ − مس ب مس ج)/(جم^{۲} ا) + (۱ − مس ج مس ا)/(جم^{۲} ب) = ۲ (۱ − مس ا مس ب)/(جم^{۲} ج)

تو ثابت کرو کہ یا تو مس ا، مس ب، مس ج سلسلہ حسابیہ میں ہیں یا ا + ب + ج، π کا ایک صحیح عددی ضعف ہے۔

۸۱۔ اگر جم ا = جم طہ جب فہ، جم ب = جم فہ جب یہ، جم ج = جم یہ جب طہ اور ا + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ مس طہ مس فہ مس یہ = ۱

۸۲۔ اِن مساواتوں کو حل کرو:-

۴ (جم ۳ طہ + جم ۲ طہ) (جم ۳ طہ + جم طہ) = ۱

۴ (جم ۳ طہ + جم ۵ طہ) (جم ۶ طہ + جم ۷ طہ) = -۱

(63)

پانچواں باب

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

ضوابط

۵۵ — اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳-۱) میں ل کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ عہ لکھیں تو

$$\text{جم عہ} = \text{جم}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} - \text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = ۲\,\text{جم}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} - ۱ = ۱ - ۲\,\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}$$

اس لئے $۱ - \text{جم عہ} = ۲\,\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}$ ، $۱ + \text{جم عہ} = ۲\,\text{جم}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ}$ ،

جذرالمربع لینے سے جم $\frac{۱}{۲}$ عہ اور جب $\frac{۱}{۲}$ عہ کے لئے جم عہ کی رقوم میں حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں :-

$$\text{جب}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{۱}{۲}\,(۱ - \text{جم عہ})}$$

$$\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{۱}{۲}\,(۱ + \text{جم عہ})}$$

ان میں سے پہلے ضابطہ کو دوسرے سے تقسیم کرو تو

$$\text{مس}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{عہ} = \pm\sqrt{\frac{۱ - \text{جم عہ}}{۱ + \text{جم عہ}}}$$

ان تین ضابطوں میں علامت کا ابہام ہے، اب اگر عہ دیا گیا ہے تو

تفاعلوں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ میں سے ہر ایک کی ایک یگانہ قیمت ہے، اور اس لئے اِن کے لئے جو جملے حاصل ہونگے ان میں علامت کا ابہام نہیں ہو سکتا۔ محصلہ بالا تین جملوں میں علامت کا ابہام اس وجہ سے ہے کہ اِن سے جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جب کہ جم عہ کی قیمت دیگئی ہو، نہ کہ جب، عہ دیا گیا ہو۔
اب جیسا کہ ہم نے دفعہ ۳۳ میں ثابت کیا ہے زاویوں ۲ ن π عہ میں سے سب زاویوں کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہو۔ اس لئے وہ ضابطے جو جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں اُن سے نہ صرف خود جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں حاصل ہونگی بلکہ ان سے ضابطہ $\frac{1}{2}$ (۲ ن π ± عہ) میں شریک تمام زاویوں کے اِن تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہونگی۔

(64) جب $\frac{1}{2}$ (۲ ن π ± عہ) کی جو قیمتیں ہو سکتی ہیں اُن کو معلوم کرنے کے لئے ہمیں دو صورتوں پر غور کرنا چاہیئے، ایک وہ صورت جبکہ ن جفت ہو اور دوسری وہ جبکہ ن طاق ہو۔ اگر ن = ۲ م تو

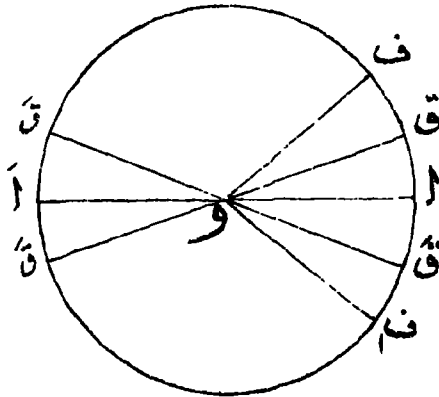
جب $\frac{1}{2}$ (۴ م π ± عہ) = جب (± $\frac{1}{2}$ عہ) = ± جب $\frac{1}{2}$ عہ

لیکن اگر ن = ۲ م + ۱ تو

جب $\frac{1}{2}$ (۴ م π + ۲ π ± عہ) = جب (π ± عہ) = ∓ جب $\frac{1}{2}$ عہ

پس جب $\frac{1}{2}$ عہ اور − جب $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں اُس ضابطہ سے حاصل ہوتی ہیں جو جب $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ جم $\frac{1}{2}$ (۲ ن ۲۱ ± عہ) اور مس $\frac{1}{2}$(۲ ن ۲۱ ± عہ) کی قیمتیں ± جم $\frac{1}{2}$ عہ، ± مس $\frac{1}{2}$ عہ ہیں، اور اس طرح اُن ضابطوں سے جو جم $\frac{1}{2}$ عہ اور مس $\frac{1}{2}$ عہ کو جم عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، - جم $\frac{1}{2}$ عہ اور مس $\frac{1}{2}$ عہ، - مس $\frac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں علی الترتیب حاصل ہوتی ہیں۔ پس متذکرہ صدر تین ضابطوں میں علامت کا جو ابہام ہے اُس کی توضیح ہو چکی۔

۵۶ — محصلہ بالا تین ضابطوں میں علامت کا جو ابہام ہے اُس کی ہندسی توضیح بھی ہو سکتی ہے۔

اگر ا و ف = عہ اور ا و ف، = - عہ تو ہم اختتامی زاویوں کے دو جبٹ (و ا، و ف)، (و ا، و ف،) ہی وہ جبٹ ہیں جن میں سے ہر زاویے کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے، اگر زاویوں ا و ف، ا و ف، کے ناصف علی الترتیب ق و ق، ق و قَ ہوں تو زاویوں (و ا، و ف،) کا ناصف و قَ یا و قَ ہے، اس لئے جیب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، مس $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطوں سے جبکہ جم عہ دیا گیا ہو اِن تمام ہم اختتامی

زاویوں کی جیب، جیب التمام، مماس حاصل ہوتے ہیں جو چار جوڑوں (و۱، و ق۱)
(و۱، و ق) (و۱، و قَ) (و۲، و قَ) میں شامل ہیں۔ پہلے اور چوتھے جوڑوں
کے زاویوں کی جیوب، جیب $\frac{۱}{۲}$ عہ کے مساوی ہیں، اور دوسرے اور
تیسرے جوڑوں کے زاویوں کی جیوب، ۔ جیب $\frac{۱}{۲}$ عہ کے مساوی ہیں؛
پہلے اور تیسرے جوڑوں کے زاویوں کی جیوب التمام، جم $\frac{۱}{۲}$ عہ کے (65)
مساوی ہیں اور دوسرے اور چوتھے جوڑوں کی جیوب التمام، -جم $\frac{۱}{۲}$ عہ
کے مساوی؛ پہلے اور دوسرے جوڑوں کے زاویوں کے مماس، مس $\frac{۱}{۲}$ عہ
کے مساوی ہیں، اور تیسرے اور چوتھے جوڑوں کے زاویوں کے مماس،
-مس $\frac{۱}{۲}$ عہ کے مساوی۔

۵۷ — اب ہم دفعہ ۵۵ کے تین ضابطوں سے علامت کے ابہامات
دور کرینگے۔ تفاعل جب $\frac{۱}{۲}$ عہ مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{۱}{۲}$ عہ،
۲ ن π اور (۲ ن + ۱) π کے درمیان یا (۲ ن + ۱) π اور (۲ ن + ۲) π
کے درمیان واقع ہو، یعنی بموجب اس کے کہ $\frac{عہ}{۲π}$، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا
۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو۔

اس لئے ہمیں ضابطہ

$$\text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ عہ} = (-۱)^{\text{ف}} \sqrt{\frac{۱}{۲}(۱ - \text{جم عہ})} \quad \ldots \ldots (۱)$$

حاصل ہوتا ہے جس میں ف ایسا مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور
پر $\frac{عہ}{۲π}$ سے عین چھوٹا ہے۔

تفاعل جم $\frac{۱}{۲}$ عہ مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ $\frac{۱}{۲}$ عہ کا
۲ ن π - $\frac{۱}{۲}$ π اور ۲ ن π + $\frac{۱}{۲}$ π کے درمیان یا ۲ ن π + $\frac{۱}{۲}$ π

اور ۲ ن π + $\frac{3}{2}$ π کے درمیان واقع ہو یعنی ہو جب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ (عہ + $\frac{\pi}{2}$)\π
۲ ن اور ۲ ن + ۱ یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان واقع ہو؛ اسلئے

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = (-1)^{\text{ق}} \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \text{جم عہ})} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

جس میں ق وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{1}{2}$ (عہ + π)/π سے جبری طور پر عین چھوٹا ہے۔
اسی طرح

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = (-1)^{\text{ف - ق}} \sqrt{\frac{1 - \text{جم عہ}}{1 + \text{جم عہ}}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

جس میں عدد ف - ق ہمیشہ یا تو صفر ہے یا ± ۱ -

۵۸ — اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطہ (۳۵) میں ا کی بجائے $\frac{1}{2}$ عہ لکھیں تو

$$\text{جب عہ} = 2\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}$$

اس لئے

$$\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{عہ} = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}} = \frac{\text{جب عہ}}{2\ \text{جم}^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}} = \frac{2\ \text{جب}^2\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ}}{\text{جب عہ}}$$

اس طرح ہمیں حسب ذیل دو ضابطے ملتے ہیں :-

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ \text{عہ} = \frac{\text{جب عہ}}{1 + \text{جم عہ}} = \frac{1 - \text{جم عہ}}{\text{جب عہ}} \quad \ldots \quad (4)$$

جن سے مس $\frac{1}{2}$ عہ بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتا ہے - ان ضابطوں سے مس $\frac{1}{2}$ عہ حاصل ہوگا جبکہ جب عہ اور جم عہ دونوں دئے جائیں؛ اب ضابطہ ۲ ن π + عہ میں وہ سب زاویئے شامل ہیں جن کی جیب اور جیب التمام وہی ہیں جو عہ کی جیب اور جیب التمام ہیں، اس لئے مس $\frac{1}{2}$ عہ کے مذکورہ بالا ضابطوں سے جو جب عہ اور جم عہ کی رقوم میں بیان ہوئے ہیں زاویوں ن π + $\frac{1}{2}$ عہ میں سے سب زاویوں کے مماس حاصل ہوتے ہیں؛ اور

(66) یہ تمام زاویے ایک ہی مماس مس ۱/۲ عہ رکھتے ہیں، اسی وجہ سے ضوابط (۴) میں علامت کا ابہام نہیں ہے۔

۵۹۔ اب ہم جب عہ کی رقوم میں جب ۱/۲ عہ، جم ۱/۲ عہ، مس ۱/۲ عہ کے لئے ضابطے حاصل کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ

۱ + جب عہ = ۱ + ۲ جب ۱/۲ عہ جم ۱/۲ عہ = (جب ۱/۲ عہ + جم ۱/۲ عہ)^۲

نیز ۱ − جب عہ = ۱ − ۲ جب ۱/۲ عہ جم ۱/۲ عہ = (جب ۱/۲ عہ − جم ۱/۲ عہ)^۲

اس لئے جب ۱/۲ عہ + جم ۱/۲ عہ = ± √(۱ + جب عہ)

جب ۱/۲ عہ − جم ۱/۲ عہ = ± √(۱ − جب عہ)

اس لئے جب ۱/۲ عہ = ۱/۲ { ± √(۱ + جب عہ) ± √(۱ − جب عہ) }،

جم ۱/۲ عہ = ۱/۲ { ± √(۱ + جب عہ) ∓ √(۱ − جب عہ) }

مبہم علامتوں میں سے ہر علامت لیجا سکتی ہے، اس لئے جب عہ کی رقوم میں جب ۱/۲ عہ کی چار قیمتیں ملتی ہیں۔ یہ ضابطے جو جب ۱/۲ عہ اور جم ۱/۲ عہ کو جب عہ کی رقوم میں بیان کرتے ہیں ان سے علی الترتیب اُن تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہوتی ہیں جو ضابطہ ۱/۲ (ن π + (−۱)^ن عہ) میں شامل ہیں، کیونکہ جیسا کہ ہم نے دفعہ (۳۴) میں بتا دیا ہے اِن زاویوں کی جیوب جو (ن π + (−۱)^ن عہ) میں شامل ہیں جب عہ کے مساوی ہیں۔ زاویوں ۱/۲ (ن π + (−۱)^ن عہ) کی جیب اور جیب التمام معلوم کرنے کے لئے ہمیں چار صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر ن = ۴ م تو

۱/۲ (ن π + (−۱)^ن عہ) = ۲ م π + ۱/۲ عہ

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جب $\frac{1}{2}$ عہ اور جم $\frac{1}{2}$ عہ ہے

(۲) اگر ن = ۴ م + ۱ تو

$$\frac{1}{2}(\text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\,\text{عہ}) = 2\text{م}\,\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\,\text{عہ}$$

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب جم $\frac{1}{2}$ عہ اور جب $\frac{1}{2}$ عہ ہے۔

(۳) اگر ن = ۴ م + ۲ تو

$$\frac{1}{2}(\text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\,\text{عہ}) = 2\text{م}\,\pi + \pi + \frac{1}{2}\,\text{عہ}$$

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب - جب $\frac{1}{2}$ عہ اور - جم $\frac{1}{2}$ عہ ہے

(۴) اگر ن = ۴ م + ۳ تو

$$\frac{1}{2}(\text{ن}\,\pi + (-1)^{\text{ن}}\,\text{عہ}) = (2\text{م}+1)\,\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\,\text{عہ}$$

اِن زاویوں کی جیب اور جیب التمام علی الترتیب - جم $\frac{1}{2}$ عہ اور - جب $\frac{1}{2}$ عہ کے مساوی ہے۔

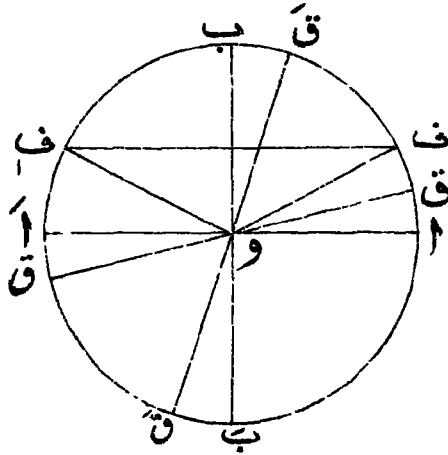
(67) اس طرح جب $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطے سے چار قیمتیں جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، - جب $\frac{1}{2}$ عہ، - جم $\frac{1}{2}$ عہ حاصل ہوتی ہیں اور جم $\frac{1}{2}$ عہ کے ضابطہ سے چار قیمتیں جم $\frac{1}{2}$ عہ، جب $\frac{1}{2}$ عہ، - جم $\frac{1}{2}$ عہ، - جب $\frac{1}{2}$ عہ۔

لا اور ما کی قیمتوں کے وہ چار جیٹ جو مساواتوں

$$\left.\begin{array}{l}(\text{لا}+\text{ما})^2 = 1 + \text{جب عہ}\\ (\text{لا}-\text{ما})^2 = 1 - \text{جب عہ}\end{array}\right\}$$

کو پورا کرتے ہیں حسب ذیل ہیں

$$\left.\begin{array}{l}\text{لا} = \text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} = \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{array}\right\}،\quad \left.\begin{array}{l}\text{لا} = \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} = \text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{array}\right\}،\quad \left.\begin{array}{l}\text{لا} = -\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} = -\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{array}\right\}،\quad \left.\begin{array}{l}\text{لا} = -\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\\ \text{ما} = -\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\end{array}\right\}$$

۶۰۔ گزشتہ دفعہ کے ضابطوں کے ابہامات کی ہندسی توضیح حسب سابق ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ف و ا = عہ، ف‌ا و ا = ۲π − عہ تو وہ

زاوئے جن کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ف)، (و ا، و ف‌ا) کے دو جبٹ ہیں، پس اگر زاویوں ا و ف، ا و ف‌ا کے ناصف ق و ق، قَ و قَ ہوں تو ہم اختتامی زاویوں (و ا، و ق)، (و ا، و ق)، (و ا، و قَ)، (و ا، و قَ) کے چار جبٹ وہ زاوئے ہونگے جن کی جیب اور جیب التمام ان ضابطوں سے حاصل ہوگی جو جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ کو بیان کرتے ہیں جبکہ جب عہ دیا گیا ہو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ قَ و ب $= \frac{1}{2}$ عہ اور قَ و ا $= \frac{1}{2}$ (۲π − عہ)، اس لئے ہم اختتامی زاویوں کے ان چار جبٹوں کی جیوب جب $\frac{1}{2}$ عہ، − جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ، − جم $\frac{1}{2}$ عہ ہیں اور ان کی جیوب التمام جم $\frac{1}{2}$ عہ، − جم $\frac{1}{2}$ عہ، جب $\frac{1}{2}$ عہ، − جب $\frac{1}{2}$ عہ ہیں۔ جب $\frac{1}{2}$ عہ، جم $\frac{1}{2}$ عہ کی علی الترتیب چار قیمتیں ہیں جو اوپر کے دو ضابطوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

۶۱۔ چونکہ

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} + \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ}\right)$$

$$= \sqrt{2}\ \text{جب}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} + \tfrac{1}{4}\,\pi\right)$$

(68) اور اسی طرح

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} - \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \sqrt{2}\ \text{جب}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} - \tfrac{1}{4}\,\pi\right)$$

اس لئے جب $\tfrac{1}{2}$ عہ + جم $\tfrac{1}{2}$ عہ مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے کہ $\frac{\text{عہ}}{2\pi} + \frac{1}{4}$ ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ کے درمیان واقع ہے یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان۔

اور جب $\tfrac{1}{2}$ عہ − جم $\tfrac{1}{2}$ عہ مثبت ہے یا منفی بموجب اس کے کہ $\frac{\text{عہ}}{2\pi} - \frac{1}{4}$ ، ۲ ن اور ۲ ن + ۱ کے درمیان واقع ہے یا ۲ ن + ۱ اور ۲ ن + ۲ کے درمیان۔

اس لئے

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} + \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = (-1)^{\text{ف}}\sqrt{1 + \text{جب عہ}}\ ،$$

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} - \text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1 - \text{جب عہ}}\ ،$$

جہاں ف مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو جبری طور پہ $\frac{\text{عہ}}{2\pi} + \frac{1}{4}$ سے عین چھوٹا ہے اور ق وہ صحیح عدد ہے جو جبری طور پر $\frac{\text{عہ}}{2\pi} - \frac{1}{4}$ سے عین چھوٹا ہے۔ اس طرح ہمیں یہ تین ضابطے ملتے ہیں

$$\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left\{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1 + \text{جب عہ}} + (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1 - \text{جب عہ}}\right\} \quad (۵)$$

$$\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left\{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1 + \text{جب عہ}} - (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1 - \text{جب عہ}}\right\} \quad (۶)$$

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \frac{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1+\text{جب عہ}} + (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1-\text{جب عہ}}}{(-1)^{\text{ف}}\sqrt{1+\text{جب عہ}} - (-1)^{\text{ق}}\sqrt{1-\text{جب عہ}}} \quad \text{،}\ldots (۶۸)$$

۶۲ ـــ جب $\tfrac{1}{2}$ عہ، جم $\tfrac{1}{2}$ عہ، مس $\tfrac{1}{2}$ عہ کو مس عہ کی رقوم میں بیان کرو۔ چونکہ

$$\text{جب}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left(1-\text{جم عہ}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{عہ}}}\right)\text{،}$$

$$\text{جم}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{عہ}}}\right)$$

اس لئے

$$\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{عہ}}}\right)}\text{،}$$

$$\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{عہ}}}\right)}$$

اور اس لئے

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ} = \pm\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2\,\text{عہ}}-1}{\text{مس عہ}}$$

ان میں سے ہر ضابطہ میں علامت کے ابہامات ہیں۔ ہم ان کی بحث کو طالب علم پر چھوڑتے ہیں کیونکہ ان کی توضیح پچھلی صورتوں کی طرح ہو سکتی ہے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ مس $\tfrac{1}{2}$ عہ کی قیمتیں، مس $\tfrac{1}{2}$ عہ کی دو درجی مساوات

$$\text{مس عہ} = \frac{2\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}}{1-\text{مس}^2\,\tfrac{1}{2}\,\text{عہ}} \quad (69)$$

کی اصلیں ہیں، یہ مساوات گزشتہ باب کے ضابطہ (۴۱) میں ا کی بجائے $\tfrac{1}{2}$ عہ رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔

۶۳۔ تفاعل جب عہ، جم عہ، مس عہ بغیر ابہام کے مس $\frac{۱}{۲}$ عہ کی رقوم میں بیان کئے جا سکتے ہیں، کیونکہ وہ تمام زاویے جن کا مماس وہی ہے جو $\frac{۱}{۲}$ عہ کا ہے ضابطہ ن ٹ + $\frac{۱}{۲}$ عہ میں شامل ہیں، اور ۲ (ن ٹ + $\frac{۱}{۲}$ عہ) یا ۲ ن ٹ + عہ وہ زاویے ہیں جن کے تمام دائری تفاعل وہی ہیں جو عہ کے ہیں۔ پس

$$\text{جب عہ} = \frac{۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ جم}\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}{\text{جم}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ} + \text{جب}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}} = \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}{۱ + \text{مس}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}،$$

$$\text{جم عہ} = \frac{\text{جم}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ} - \text{جب}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}{\text{جم}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ} + \text{جب}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}} = \frac{۱ - \text{مس}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}{۱ + \text{مس}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}$$

اس لئے نیز

$$\text{مس عہ} = \frac{۲\,\text{مس}\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}{۱ - \text{مس}^۲\,\frac{۱}{۲}\,\text{عہ}}$$

مثالیں

(۱)۔ اگر ۲ جم طہ = $\sqrt{۱ - \text{جب ۲ طہ}} - \sqrt{۱ + \text{جب ۲ طہ}}$ تو ثابت کرو کہ طہ کو

$\frac{ٹ}{۴}$ (۸ ن + ۵) اور $\frac{ٹ}{۴}$ (۸ ن + ۷)

کے درمیان واقع ہونا چاہیئے جن میں ن ایک صحیح عدد ہے۔

(۲)۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\,\text{ا}}{\sqrt{۱ + \text{جب ا}}} + \frac{\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\,\text{ا}}{\sqrt{۱ - \text{جب ا}}} = \text{قط ا}$$

جس میں جذور مثبت اعداد کو تعبیر کرتے ہیں بشرطیکہ ا

(۴ ن − $\frac{۱}{۲}$) ٹ اور (۴ ن + $\frac{۱}{۲}$) ٹ

کے درمیان واقع ہو جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔ دوسری صورتوں میں علامتیں کیا ہونی چاہئیں۔

(۳)۔ ثابت کرو کہ $\frac{\sqrt{1 + \text{جب لا}} + 1}{\sqrt{1 + \text{جب لا}} - 1}$ کی چار قیمتیں حسب ذیل ہیں:

مم $\frac{1}{4}$ لا، مس $\frac{1}{4}$ (π + لا)، ‑ مس $\frac{1}{4}$ لا، ‑ مم $\frac{1}{4}$ (π + لا)

(۴)۔ اگر جب ۲ ا = ل تو ثابت کرو کہ مس ا کی چار قیمتیں جملہ

$$\frac{1}{ل}\left\{(1+ل)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}\left\{1 + (1-ل)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۵)۔ ضابطہ مس $\frac{1}{2}$ ا = ± $\frac{\sqrt{1+\text{مس}^2 ا} - 1}{\text{مس ا}}$ میں ثابت کرو کہ مشتبہ علامت کی بجائے $(-1)^م$ رکھنے سے ابہام دور کیا جا سکتا ہے جہاں م، $\frac{ا + 90°}{180°}$ سے عین چھوٹا ایک صحیح عدد ہے۔

دئے ہوئے زاوئے کے ایک ثلث کے دائری تفاعل

۱۴۔ اگر ہم گزشتہ باب کے ضابطوں (۳۷)، (۳۸)، (۴۲) میں ا کی بجائے $\frac{1}{3}$ عہ درج کریں تو ہمیں حسب ذیل تین مساواتیں ملتی ہیں

جب عہ = ۳ جب $\frac{1}{3}$ عہ ‑ ۴ جب^3 $\frac{1}{3}$ عہ، ... ... (۸)

جم عہ = ۴ جم^3 $\frac{1}{3}$ عہ ‑ ۳ جم $\frac{1}{3}$ عہ، ... ... (۹)

مس عہ = $\frac{\text{۳ مس } \frac{1}{3} \text{ عہ} - \text{مس}^3 \frac{1}{3} \text{ عہ}}{1 - \text{۳ مس}^2 \frac{1}{3} \text{ عہ}}$، ... ... (۱۰)

اس طرح ہمیں ہر صورت میں ایک کعبی مساوات ملتی ہے جس سے $\frac{1}{3}$ عہ کے دائری تفاعلوں کو عہ کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں معلوم

(70)

کیا جا سکتا ہے۔ پس اگر جب عہ دیا گیا ہے تو جب $\frac{1}{3}$ عہ کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، اگر جم عہ دیا گیا ہے تو جم $\frac{1}{3}$ عہ کی تین قیمتیں الگ الگ حاصل ہوتی ہیں اور اگر مس عہ دیا گیا ہے تو مس $\frac{1}{3}$ عہ کی تین الگ الگ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

(۱) ضابطہ (۸) کی صورت میں جب عہ دیا گیا ہے اور جب $\frac{1}{3}$ عہ کے لئے زاویوں (و ا، و ف)، (و ا، و ف$_1$) میں سے سب کے ایک ثلث کی جیوب کی قیمتیں حاصل ہونگی، کیونکہ زاویہ (و ا، و ف) اور (و ا، و ف$_1$) کی جیب وہی ہے جو عہ کی ہے۔ فرض کرو کہ زاویوں (و ا، و ف) کی تثلیث

کرنے والے خطوط و ق$_1$، و ق$_2$، و ق$_3$ ہیں اور اس طرح زاویہ ق$_1$ و ا $= \frac{1}{3}$ عہ، اور ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور

$$ق_2 و ا = \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3} عہ،\quad ق_3 و ا = \frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3} عہ$$

اسی طرح زاویوں (و ا، و ف$_1$) کی تثلیث کرنے والے خطوط و ق$_1$، و ق$_2$، و ق$_3$ ہیں اور اس طرح ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے

اور ق ۱ و ا = $\frac{1}{3}$ (۲π - عہ) اور ق ۲ و ا = ۲π - $\frac{1}{3}$ عہ اور ق ۳ و ا = $\frac{4}{3}$ π - $\frac{1}{3}$ عہ

ہم فوراً یہ دیکھتے ہیں کہ ق ۲ ق ۱، ق ۱ ق ۲، ق ۲ ق ۳ متوازی ہیں وا کے؛ ہم اختتامی زاویوں (وا، وق ۱) (وا، و ق ۲) کے دو جٹوں کی جیوب، جب $\frac{1}{3}$ عہ ہیں؛ جٹوں (وا، وق ۲)، (وا، وق ۱) کی جیوب، جب ($\frac{2}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں؛ اور (وا، وق ۳) (وا، وق ۳) کی جیوب جب ($\frac{4}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ) ہیں۔ اسلئے جب $\frac{1}{3}$ عہ ہیں جو کبھی مساوات (۸) ہے اسکی تین اصلیں حسب ذیل ہیں:

جب $\frac{1}{3}$ عہ، جب ($\frac{1}{3}$ π - $\frac{1}{3}$ عہ)، اور - جب ($\frac{1}{3}$ π + $\frac{1}{3}$ عہ)

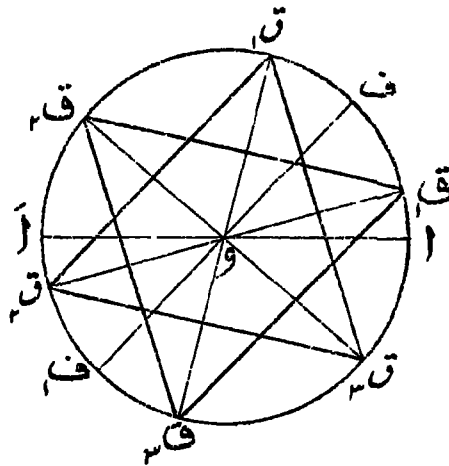
(۲) ضابطہ (۹) کی صورت میں وہ زاویے جن کی جیب التمام وہی ہے جو عہ کی ہے (وا، وف) اور (وا، وف ۱) ہیں۔ فرض کرو کہ زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق ۱، وق ۲، وق ۳ ہیں جہاں ق ۱ و ا = $\frac{1}{3}$ عہ اور ق ق ق متساوی الاضلاع مثلث ہے، دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط وق ۱، وق ۲، وق ۳ ہیں جہاں ق ۱ و ا = - $\frac{1}{3}$ عہ اور ق ق ق متساوی اضلاع مثلث ہے۔ ہم فوراً دیکھتے ہیں کہ ق ق ۳، ق ۲ ق ۲

(71)

ق۲ ق۳ عمود ہیں و ا پر۔ زاویوں (و ا، وق۱)، (و ا، و ق۱) کے دو جٹوں کی جیوب التمام جم ⅓ عہ ہیں، دو جٹوں (و ا، و ق۲) (و ا، و ق۲) کی جیوب التمام جم (⅔ π + ⅓ عہ) ہیں، اور دو جٹوں (و ا، وق۳) (و ا، و ق۳) کی جیوب التمام جم (⅘ π + ⅓ عہ) ہیں۔ اس لئے جم ⅓ عہ میں جو کعبی مساوات (۹) ہے اس کی تین اصلیں جم ⅓ عہ، جم (⅓ π − ⅓ عہ) اور جم (⅓ π + ⅓ عہ) ہیں۔

(۳) ضابطہ (۱۰) کی صورت میں وہ زاویئے جن کا مماس وہی ہے جو عہ کا ہے (و ا، و ف) اور (و ا، و ف۱) ہیں۔ حسب سابق شکل صفحہ ۱۱۱ میں زاویوں کے پہلے جٹ کی تثلیث کرنے والے خطوط و ق، وق۲، وق۳ ہیں اور دوسرے جٹ کی تثلیث کرنے والے و ق۱، وق۲، و ق۳ ہیں جہاں ق۱ ق۲ ق۳ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے اور ق و ا = ⅓ (π + عہ)۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ق۱ و ق۲، ق۲ و ق۳، اور ق۳ و ق۱ دائرے کے قطر ہیں۔ جٹوں (و ا، وق۱)، (و ا، و ق۱) کے مماس مس ⅓ عہ ہیں؛ (و ا، وق۲)، (و ا، وق۲) کے مماس مس (⅔ π + ⅓ عہ) ہیں، اور (و ا، وق۳)، (و ا، وق۱) کے مماس مس (⅘ π + ⅓ عہ) ہیں۔ اس لئے مس ⅓ عہ کی کعبی مساوات (۱۰) کی اصلیں مس ⅓ عہ، مس (⅓ π − ⅓ عہ)، مس (⅓ π + ⅓ عہ) ہیں۔

(72) اس دفعہ کے نتیجوں کو ہم اس طرح بیان کر سکتے ہیں:۔ لا میں کعبی مساوات ۳ لا − ۴ لا۳ = جب عہ کی اصلیں حسب ذیل ہیں:

جب $\frac{1}{3}$ عہ، جب $\frac{1}{3}$ $(\pi -$ عہ$)$، $-$جب $\frac{1}{3}$ $(\pi +$ عہ$)$ ؛
کعبی مساوات

$$۴ \text{ لا}^{3} - ۳ \text{ لا} = \text{جم عہ}$$

کی اصلیں ہیں
جم $\frac{1}{3}$ عہ، $-$جم $\frac{1}{3}$ $(\pi -$ عہ$)$، $-$جم $\frac{1}{3}$ $(\pi +$ عہ$)$
اور کعبی مساوات

$$\text{مس عہ} (۱ - ۳ \text{ لا}^{2}) = ۳ \text{ لا} - \text{لا}^{3}$$

کی اصلیں ہیں
مس $\frac{1}{3}$ عہ، $-$مس $\frac{1}{3}$ $(\pi -$ عہ$)$، مس $\frac{1}{3}$ $(\pi +$ عہ$)$

بعض زاویوں کے دائری تفاعلوں کی تعیین

۶۵ ــــ اس باب کے ضابطے ایسے زاویوں کے دائری تفاعلوں کو معلوم کرنے میں استعمال کئے جا سکتے ہیں جو اُن زاویوں کے کسری یا تحت ضعفی ہوں جن کے دائری تفاعل معلوم ہیں ۔

(۱) چونکہ　جب $\frac{1}{4}\pi =$ جم $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

اس لئے دفعہ ۷۵ کے ضابطوں (۱) اور (۲) کی رو سے

جب $\frac{۱}{۸}\pi = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$، جم $\frac{۱}{۸}\pi = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}$،

جب $\frac{۱}{۱۶}\pi = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ - \sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}$، جم $\frac{۱}{۱۶}\pi = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}$

اور اسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے ہم جب $\frac{۱}{۲^{n}}\pi$ اور جم $\frac{۱}{۲^{n}}\pi$ کو محسوب کر سکتے ہیں۔

(۲) چونکہ جب $\frac{۱}{۶}\pi = \frac{۱}{۲}$، جم $\frac{۱}{۶}\pi = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

اس لئے ضابطوں (۵) اور (۶) کی رو سے

جب $\frac{۱}{۱۲}\pi = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})$، جم $\frac{۱}{۱۲}\pi = \frac{۱}{۴}(\sqrt{۶} + \sqrt{۲})$

یہ قیمتیں جب ۱۵°، جم ۱۵° کے لئے دفعہ ۴۳ میں حاصل کی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔ پس عمل کو اسی طرح جاری رکھنے سے ہم تمام زاویوں $\frac{\pi}{۳ \times ۲^{n}}$ کی جیوب اور جیوب التمام محسوب کر سکتے ہیں۔

(73)

(۳) — چونکہ جب $\frac{۱}{۵}\pi = ۲$ جب $\frac{۱}{۱۰}\pi$ جم $\frac{۱}{۱۰}\pi$

اور جب $\frac{۲}{۵}\pi = ۲$ جب $\frac{۱}{۵}\pi$ جم $\frac{۱}{۵}\pi$

اس لئے جب $\frac{۱}{۵}\pi$ جب $\frac{۲}{۵}\pi = ۴$ جب $\frac{۱}{۵}\pi$ جم $\frac{۱}{۵}\pi$ جب $\frac{۱}{۱۰}\pi$ جم $\frac{۱}{۱۰}\pi$؛

اب چونکہ جب $\frac{۲}{۵}\pi =$ جم $\frac{۱}{۱۰}\pi$،

اس لئے ۴ جم $\frac{۱}{۵}\pi$ جب $\frac{۱}{۱۰}\pi = ۱$،

یا جب $\frac{۳}{۱۰}\pi -$ جب $\frac{۱}{۱۰}\pi = \frac{۱}{۲}$،

یعنی جم $\frac{۱}{۵}\pi -$ جب $\frac{۱}{۱۰}\pi = \frac{۱}{۲}$،

نیز $\left(\text{جم}\,\frac{1}{5}\pi + \text{جب}\,\frac{1}{10}\pi\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$؛

اس لیے $\text{جم}\,\frac{1}{5}\pi + \text{جب}\,\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

یا $\text{جب}\,\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$، $\text{جم}\,\frac{1}{5}\pi = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$

اور اس لیے $\text{جم}\,\frac{1}{10}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$، $\text{جب}\,\frac{1}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$؛

یہ قیمتیں دفعہ ۴۳ میں دی ہوئی قیمتوں کے مطابق ہیں۔

یہ امر توجہ طلب ہے کہ اگر ع کوئی زاویہ ہو جس کی جیب اور جیب التمام معلوم ہے اور م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں تو شکل $\frac{\text{م ع}}{2^{\text{ن}}}$ کے تمام زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام ایسی شکل میں معلوم کی جا سکتی ہیں جس میں صرف جذروں کے نکالنے کا عمل شامل ہوتا ہے، کیونکہ ہم نے یہ دکھا دیا ہے کہ شکل $\frac{\text{ع}}{2^{\text{ن}}}$ کے تمام زاویوں کے دائری تفاعل کس طرح معلوم کیے جا سکتے ہیں اور جب یہ معلوم ہو جائیں تو گزشتہ باب کے ضابطوں کی مدد سے $\text{جب}\,\frac{\text{م ع}}{2^{\text{ن}}}$ اور $\text{جم}\,\frac{\text{م ع}}{2^{\text{ن}}}$ معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

۶۶ - اب ہم ۳° سے شروع کر کے ۹۰° تک اُن تمام زاویوں کے دائری تفاعل معلوم کر سکتے ہیں جن کا فرق ۳° یا $\frac{\pi}{60}$ ہے۔ چنانچہ

$$\text{جب}\,3^\circ = \text{جب}\,(18^\circ - 15^\circ)$$
$$= \text{جب}\,18^\circ\,\text{جم}\,15^\circ - \text{جم}\,18^\circ\,\text{جب}\,15^\circ$$
$$= \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - \frac{1}{8}(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

اسی طرح $\text{جم}\,3^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)$

نیز چونکہ

$6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$، $9^\circ = 45^\circ - 36^\circ$، $12^\circ = 30^\circ - 18^\circ$،

۲۱° = ۳۶° − ۱۵°، ۲۴° = ۴۵° − ۲۱°، ۲۷° = ۳۰° − ۳°،

۳۳° = ۴۵° − ۱۲°، ۳۹° = ۴۵° − ۶°، ۴۲° = ۴۵° − ۳°،

اس لیے ہم زاویوں ۳°، ۶°، ....، ۴۵° کی جیوب التمام محسوب کر سکتے ہیں۔ اس سے آگے بڑھنا غیر ضروری ہے کیونکہ ۴۵° سے بڑے کسی زاویے کی جیب یا جیب التمام اس کے متمم کی جیب التمام یا جیب کے مساوی ہوتی ہے اور یہ متمم زاویہ ۴۵° سے کم ہوتا ہے۔ محسوب کردہ نتیجوں کی فہرست جدول ذیل میں دی گئی ہے۔

(74)

جیب

زاویہ	جیب
$3^\circ = \frac{1}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$
$6^\circ = \frac{1}{30}\pi$	$\frac{1}{8}(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1)$
$9^\circ = \frac{1}{20}\pi$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})$
$12^\circ = \frac{1}{15}\pi$	$\frac{1}{8}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3})$
$15^\circ = \frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
$18^\circ = \frac{1}{10}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$
$21^\circ = \frac{7}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\}$
$24^\circ = \frac{2}{15}\pi$	$\frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$
$27^\circ = \frac{3}{20}\pi$	$\frac{1}{8}(2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\sqrt{10}+\sqrt{2})$
$30^\circ = \frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$
$33^\circ = \frac{11}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}$

زاویہ	جیب
$36^\circ = \frac{1}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$39^\circ = \frac{13}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)-2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$
$42^\circ = \frac{7}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$
$45^\circ = \frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$48^\circ = \frac{4}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)$
$51^\circ = \frac{17}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5-\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)\right\}$
$54^\circ = \frac{3}{10}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$
$57^\circ = \frac{19}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$
$60^\circ = \frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$63^\circ = \frac{7}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)$
$66^\circ = \frac{11}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right)$
$69^\circ = \frac{23}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+1)+2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$
$72^\circ = \frac{2}{5}\pi$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$75^\circ = \frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
$78^\circ = \frac{13}{30}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$
$81^\circ = \frac{9}{20}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right)$
$84^\circ = \frac{7}{15}\pi$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{15}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$
$87^\circ = \frac{29}{60}\pi$	$\frac{1}{16}\left\{2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right\}$
$90^\circ = \frac{1}{2}\pi$	1

اس جدول میں زاویوں ۳°، ۶°، ....، ۹۰° کی جیوب دی گئی ہیں۔

اور متمم زاویوں کی جیوب لینے سے جیوب التمام معلوم ہو سکتی ہیں ۔ اوپر کے جملوں میں جو اعداد مجذور ہیں اُن کی قیمتیں اعشاریہ کے ۲۴ مقامات تک مسٹر پی ۔ گرے نے (میسنجر آف میتھیماٹکس جلد ششم) میں دی ہیں ۔ ہٹن کی جدولوں میں اِن کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۰ مقامات تک دی گئی ہیں ۔ مکمل جدول جس میں اِن زاویوں کے مماس قاطع، قاطع التمام منطق نسب نما والی کسروں کی شکل میں درج ہیں گیلن (Gelin) کی کتاب ٹرگنومیٹری میں ملے گی ۔

پانچویں باب پر مثالیں

اشکال ۱ تا ۸ کے رشتے ثابت کرو جن میں ا + ب + ج = ۱۸۰°

(۱) مس ۱/۲ ا ÷ مس ۱/۲ ج = (۱ ـ جم ا + جم ب + جم ج) ÷ (۱ ـ جم ج + جم ا + جم ب)

(۲) جب (ا ـ ب) جب (ا ـ ج) + جب (ب ـ ج) جب (ب ـ ا) + جب (ج ـ ا) جب (ج ـ ب) = ۲ جم ۱/۲ (ب ـ ج) جم ۱/۲ (ج ـ ا) × جم ۱/۲ (ا ـ ب)

ـ ۲ جب ۳/۲ ا جب ۳/۲ ب جب ۳/۲ ج

(۳) جم^۴ ۱/۲ ا + جم^۴ ۱/۲ ب + جم^۴ ۱/۲ ج + ۲ جم ا جم^۲ ۱/۲ ب جم^۲ ۱/۲ ج

+ ۲ جم ب جم^۲ ۱/۲ ج جم^۲ ۱/۲ ا + ۲ جم ج جم^۲ ۱/۲ ا جم^۲ ۱/۲ ب

= ۸ جم^۲ ۱/۲ ا جم^۲ ۱/۲ ب جم^۲ ۱/۲ ج

(۴) Σ جب^۳ ا = ۳ جم ۱/۲ ا جم ۱/۲ ب جم ۱/۲ ج + جم ۳/۲ ا جم ۳/۲ ب جم ۳/۲ ج

(۵) Σ قم ا (ا + مم ب مم ج)

= قم ا قم ب قم ج {۴ جم ۱/۲ (ب ـ ج) جم ۱/۲ (ج ـ ا) جم ۱/۲ (ا ـ ب) ـ ۱}

(۶) ⅀ قم ا (۱ - حم ب حم ج)

= ۱/۲ قط ۱/۲ ا قط ۱/۲ ب قط ۱/۲ ج + قم ا قم ب قم ج

(۷) ⅀ جب ۲ ا جب (ب - ج)

= ۱۶ جم ۱/۲ ا جم ۱/۲ ب جم ۱/۲ ج جب ۱/۲ (ب - ج) جب ۱/۲ (ج - ا) جب ۱/۲ (ا - ب)

(۸) (جم ۱/۲ ا - جب ۱/۲ ب + جب ۱/۲ ج) / (جم ۱/۲ ب + جب ۱/۲ ج - جب ۱/۲ ا) = (۱ + مس ۱/۴ ا) / (۱ + مس ۱/۴ ب)

(۹) ثابت کرو متماثلہ

جب ۱/۲ (ب - ج) / جب ۱/۲ (ب + ج) + جب ۱/۲ (ج - ا) / جب ۱/۲ (ج + ا) + جب ۱/۲ (ا - ب) / جب ۱/۲ (ا + ب)

+ [جب ۱/۲ (ب - ج) جب ۱/۲ (ج - ا) جب ۱/۲ (ا - ب)] / [جب ۱/۲ (ب + ج) جب ۱/۲ (ج + ا) جب ۱/۲ (ا + ب)] = ۰

(۱۰) اگر ا + ب + ج = ۳۶۰° اور اگر

جم ا = (د - ا)(ب - ج) / (د + ا)(ب + ج)، جم ب = (د - ب)(ج - ا) / (د + ب)(ج + ا)، جم ج = (د - ج)(ا - ب) / (د + ج)(ا + ب)

تو

مس ۱/۲ ا + مس ۱/۲ ب + مس ۱/۲ ج = ± ۱

(۱۱) ثابت کرو کہ

مس ۱/۲ (لا + ما) مس ۱/۲ (لا - ما) = (قم ۲ لا قم ما - قم ۲ ما قم لا) / (قم ۲ لا قم ما + قم ۲ ما قم لا)

(76)

(۱۲) اگر حم ۱/۲ عہ + حم ۱/۲ بہ = ۲ حم طہ تو ثابت کرو کہ

{۱ - ۲ قط طہ جم (عہ - طہ) + قط² طہ} {۱ - ۲ قط طہ جم (بہ - طہ) + قط² طہ} = مس⁴ طہ

(۱۳) اگر ا + ب + ج + د = ۳۶۰° تو ثابت کرو کہ

جم ½ ا جم ½ د جب ½ ب جب ½ ج − جم ½ ب جم ½ ج جب ½ ا جب ½ د

= جب ½ (ا + ب) جب ½ (ا + ج) جم ½ (ا + د)

(۱۴) ثابت کرو کہ

جب² ½ (ب − ج) + جب² ½ (ج − ا) جب² ½ (ا − ب)

+ ۲ جم ½ (ب − ج) جم ½ (ج − ا) جم ½ (ا − ب) = ۲

(۱۵) ثابت کرو کہ

[جب (ما − ی) + جب (ی − لا) + جب (لا − ما)] ÷ [۱ + جم (ما − ی) + جم (ی − لا) + جم (لا − ما)]

= − مس ½ (ما − ی) مس ½ (ی − لا) مس ½ (لا − ما)

(۱۶) دریافت کرو کہ عہ، بہ، جہ میں کیا رشتہ ہونا چاہیے کہ

جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۱ + ۴ جب ½ عہ جب ½ بہ جب ½ جہ

(۱۷) اگر ا + ب + ج + د = ۳۶۰° تو ثابت کرو کہ

جم (ب + ج + د) + جم (ج + د + ا) + جم (د + ا + ب) + جم (ا + ب + ج)

= − ۴ جم ½ (ا + ب) جم ½ (ا + ج) جم ½ (ا + د)

(۱۸) اگر مس ½ طہ = مس³ ½ فہ اور مس فہ = ۲ مس عہ

تو ثابت کرو کہ طہ + فہ = ۲ عہ

(۱۹) اگر جب² سہ = [جب س جب (س − طہ) جب (س − فہ) جب (س − پہ)] ÷ [۴ جم² ½ طہ جم² ½ فہ جم² ½ پہ]

تو ثابت کرو کہ

مس² ½ سہ = مس ½ س مس ½ (س − طہ) مس ½ (س − فہ) مس ½ (س − پہ)

جہاں ۲س = ط + ف + ہ

(۲۰) اگر ا + ب + ج + د = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

جب ا + جب ب + جب ج - جب د

= ۴ جم ½ (ا + د) جم ½ (ب + د) جم ½ (ج + د)

(۲۱) اگر عہ + بہ + جہ = ۲π تو ثابت کرو کہ

جب بہ (۱ + ۲ جم جہ) + جب جہ (۱ + ۲ جم عہ) + جب عہ (۱ + ۲ جم بہ)

= ۴ جب ½ (جہ - بہ) جب ½ (عہ - جہ) جب ½ (بہ - عہ)

(۲۲) اگر ۲س = ا + ب + ج تو ثابت کرو کہ

جم ½ س جم ½ (س - ا) جم ½ (س - ب) جم ½ (س - ج)

+ جب ½ س جب ½ (س - ا) جب ½ (س - ب) جب ½ (س - ج)

= جم ½ ا جم ½ ب جم ½ ج

(۲۳) اگر عہ + بہ + جہ = ½ π تو

[(۱ - مس ½ عہ) (۱ - مس ½ بہ) (۱ - مس ½ جہ)] / [(۱ + مس ½ عہ) (۱ + مس ½ بہ) (۱ + مس ½ جہ)] = [جب عہ + جب بہ + جب جہ - ۱] / [جم عہ + جم بہ + جم جہ]

(۲۴) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

جم (۳/۲ بہ + جہ - ۲عہ) + جم (۳/۲ جہ + عہ - ۲بہ) + جم (۳/۲ عہ + بہ - ۲جہ)

= ۴ جم ¼ (۵عہ - ۲بہ - جہ) جم ¼ (۵بہ - ۲جہ - عہ) جم ¼ (۵جہ - ۲عہ - بہ)

(۲۵) اگر جم۲ ط = جم عہ / جم بہ ، جم۲ طَ = جم عہَ / جم بہ

اور مس ط ÷ مس طَ = مس عہ ÷ مس عہَ

تو ثابت کرو کہ مس ½ عہ مس ½ عہَ = ± مس ½ بہ

(۲۶) اگر جم عہ = جم بہ جم فہ = جم بَہ جم فَہ اور جب عہ = ۲ جب ۱/۲ فہ جب ۱/۲ فَہ
تو ثابت کرو کہ ± مس ۱/۲ عہ = مس ۱/۲ بہ مس ۱/۲ بَہ

(۲۷) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° اور مس ۳/۴ ا مس ۳/۴ ب = مس ۳/۴ ج تو ثابت کرو کہ

مس ۳/۴ ا + مس ۳/۴ ب + مس ۳/۴ ج = مم ۳/۴ ا + مم ۳/۴ ب + مم ۳/۴ ج

(۲۸) اگر مس ۱/۲ (ما + ی) + مس ۱/۲ (ی + لا) + مس ۱/۲ (لا + ما) = ۰
تو ثابت کرو کہ جب لا + جب ما + جب ی + ۳ جب (لا + ما + ی) = ۰

(۲۹) ثابت کرو کہ

جم عہ جب ۱/۲ (طہ + عہ) جب ۱/۲ (بہ − جہ) + جم بہ جب ۱/۲ (طہ + بہ) جب ۱/۲ (جہ − عہ)
+ جم جہ جب ۱/۲ (طہ + جہ) جب ۱/۲ (عہ − بہ)
= ۲ جب ۱/۲ (بہ − جہ) جب ۱/۲ (جہ − عہ) جب ۱/۲ (عہ − بہ) جب ۱/۲ (عہ + بہ + جہ + طہ)

(۳۰) حل کرو مساواتیں

مس ۱/۲ عہ + مس ۱/۲ بہ = ۱/۳

مس عہ + مس بہ = ۳/۴

(۳۱) اگر [جب (فہ + عہ) جب (فہ − عہ)] / [جب ((عہ + بہ)/۲ + ۲ طہ)] = [جب (فہ + بہ) جب (فہ − بہ)] / [جب ((عہ + بہ)/۲ − ۲ طہ)] = جب ۱/۲ (بہ − عہ)
تو ثابت کرو کہ جم^۲ ۱/۲ عہ + جم^۲ ۱/۲ جہ − جم^۲ طہ = ۱/۲

(۳۲) اگر مس (۱/۴ π + ۱/۲ طہ) = مس^۵ (۱/۴ π + ۱/۲ فہ) تو ثابت کرو کہ

جب طہ = ۵ جب فہ [(۱ + عہ^۲ جب^۲ فہ) (۱ + بہ^۲ جب^۲ فہ)] / [(۱ + عہ^۲ جب^۲ فہ) (۱ + بَہ^۲ جب^۲ فہ)]

اور ع، ب معلوم کرو۔

(۳۳) اگر ع + ب + ج = π تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)+\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ج}\ \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ع}\right)+\text{مس}^{-1}\left(\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ع}\ \text{مس}\tfrac{1}{2}\text{ب}\right)$$

$$=\text{مس}^{-1}\left\{1+\frac{8\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ع}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جب}^{2}\text{ع}+\text{جب}^{2}\text{ب}+\text{جب}^{2}\text{ج}}\right\}$$

(۳۴) ثابت کرو کہ تین مقداروں

$$\frac{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج}-\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}}{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج}+\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج}}\ ,\quad \frac{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ع}-\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ع}\ \text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج}+\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ع}\ \text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ج}}$$

$$\frac{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}-\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ع}}{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ع}+\text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{ع}}$$

کا حاصل جمع ان کے مسلسل حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

(۳۵) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})}+\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ج}+\text{ع})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ع})}+\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{ب})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{ب})}$$

$$-\frac{3\ \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})\ \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ج}+\text{ع})\ \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{ب})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})\ \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ع})\ \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{ب})}$$

$$=\frac{\text{جم ع}\ \text{جم ب}\ \text{جم ج}-\text{جم}(\text{ع}+\text{ب}+\text{ج})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})\ \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ع})\ \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{ب})}$$

(۳۶) اگر

$$\frac{\text{جم ع}+\text{جم ب}+\text{جم ج}}{\text{جم}(\text{ع}+\text{ب}+\text{ج})}=\frac{\text{جب ع}+\text{جب ب}+\text{جب ج}}{\text{جب}(\text{ع}+\text{ب}+\text{ج})}$$

تو ثابت کرو کہ ہر کسر

$$\text{جم}\,(\text{ب}+\text{ج}) + \text{جم}\,(\text{ج}+\text{ع}) + \text{جم}\,(\text{ع}+\text{ب})$$

کے مساوی ہے اور نیز

$$\left\{\text{س ع} - \text{س}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})\right\} \Big/ \left\{\text{س ع} + \text{س}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})\right\}$$

کے مساوی ہے۔

چھٹا باب

مختلف مسئلے

۶۷ - اس باب میں ہم اُن جملوں کو مستحیل کرنے کی مختلف مثالیں دینگے جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں۔ اِن میں سے بعض مسئلے خود دلچسپ ہیں اور باقی دوسرے اُن طریقوں کی خاطر دیے گئے ہیں جو انھیں ثابت کرنے میں استعمال ہوئے ہیں۔ اِن جملوں کو جن میں دائری تفاعل شامل ہوتے ہیں مستحیل کرنے میں مہارت صرف بہت مشق سے ہی پیدا ہو سکتی ہے۔ تاہم اُن طریقوں کا احتیاط سے مطالعہ کرنے سے جو ہم نے مختلف صورتوں میں استعمال کیے ہیں طالب علم کو اس قسم کے تفاعلوں کے برتنے کی قابلیت حاصل کرنے میں بہت مدد ملے گی۔

متماثلات اور استحالات

۶۸ -

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ) + جب ۲ جہ جب (عہ - بہ)

= {جب (بہ + جہ) + جب (جہ + عہ) + جب (عہ + بہ)} ×

{جب (جہ - بہ) + جب (بہ - عہ) + جب (عہ - جہ)}

اس مساوات کی بائیں جانب جو اجزائے ضربی ہیں وہ علی الترتیب دو مقداروں جب جہ جم بہ + جب عہ جم جہ + جب بہ جم عہ اور جم جہ جب بہ + جم عہ جب جہ + جم بہ جب عہ کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کے مساوی ہیں؛ اس لیے ان اجزائے ضربی کا حاصل ضرب

(جب جہ جم بہ + جب بہ جم عہ + جب عہ جم جہ)^2 - (جم جہ جب بہ + جم بہ جب عہ + جم عہ جب جہ)^2

کے مساوی ہے۔ اب چونکہ جب^2 جہ جم^2 بہ - جم^2 جہ جب^2 بہ = جب^2 جہ - جب^2 بہ

اس لیے مربع ارقام کا جبری مجموعہ صفر ہے؛ باقی رقمیں

= ۲ جب عہ جم عہ (جب بہ جم جہ - جم بہ جب جہ) + ۲ جب بہ جم بہ (جب جہ جم عہ - جم جہ جب عہ) + ۲ جب جہ جم جہ (جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ)

= جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) + جب ۲ بہ جب (جہ - عہ) + جب ۲ جہ جب (عہ - بہ)؛

اس طرح متماثلہ

Σ جب ۲ عہ جب (بہ - جہ) = Σ جب (بہ + جہ) Σ جب (جہ - بہ)

ثابت ہو چکی۔

(۲) پچھلی مثال میں عہ، بہ، جہ کی بجائے علی الترتیب $\frac{1}{4}\pi$ + عہ، $\frac{1}{4}\pi$ + بہ، $\frac{1}{4}\pi$ + جہ رکھو تو متماثلہ ذیل حاصل ہوگی :-

(79)

Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) = Σ جم (بہ + جہ) Σ جب (جہ - بہ)

(۳) ثابت کرو کہ

Σ جب^3 عہ جب (بہ - جہ) = - جب (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

اس صورت میں بہت سی دیگر صورتوں کی طرح ہم مساوات کی دائیں جانب کی مقداروں جب^3 عہ، جب^3 بہ کی بجائے ان کے مماثل ضعفی زاویوں کی جیوب کی رقوم میں جو جملے ہیں اُن کو رکھتے ہیں؛ تب دائیں جانب کا جملہ

ہو جاتا ہے

$\frac{3}{4}$ ∑ جب عہ جب (بہ - جہ) - $\frac{1}{4}$ ∑ جب ۳ عہ جب (بہ - جہ)

یا - $\frac{1}{4}$ ∑ جب ۳ عہ جب (بہ - جہ)، بموجب مثال (۳) دفعہ ۴۵ -

اب ہم جیوب کے حاصل ضربوں کی بجائے جیوب التمام کے فرق رکھتے ہیں تو جملہ ہو جاتا ہے

$\frac{1}{8}$ { جم (۳ عہ + بہ - جہ) - جم (۳ عہ - بہ + جہ) + جم (۳ بہ + جہ - عہ)

- جم (۳ بہ - جہ + عہ) + جم (۳ جہ + عہ - بہ) - جم (۳ جہ - عہ + بہ) }

اور خطوط وحدانی کے اندر پہلی اور آخری رقموں کا مجموعہ ہے

۲ جب ۲ (جہ - عہ) جب (عہ + بہ + جہ)

اسی طرح دوسری اور تیسری رقموں، چوتھی اور پانچویں رقموں کو ایک ساتھ لینے سے جملہ بالا ہو جاتا ہے

- $\frac{1}{4}$ جب (عہ + بہ + جہ) ∑ جب ۲ (جہ - عہ)

یا - جب (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

بموجب مثال (۳) دفعہ ۴۷ -

(۴) ثابت کرو کہ

∑ جم^3 عہ جب (بہ - جہ) = جم (عہ + بہ + جہ) جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

(۵) ثابت کرو کہ

∑ جب^3 عہ جب^3 (بہ - جہ) = ۳ جب عہ جب بہ جب جہ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

مطلوبہ نتیجہ اس امر واقعہ سے مستنبط ہوگا کہ لا^3 + ما^3 + ی^3 - ۳ لا ما ی کا ایک جزو ضربی لا + ما + ی ہے -

رکھو لا = جب عہ جب (بہ - جہ)، ما = جب بہ جب (جہ - عہ)، ی = جب جہ جب (عہ - بہ)

تو لا + ما + ی = ۰

(۶) ثابت کرو کہ

جب (عہ + بہ) جب (عہ - بہ) جب (جہ + ضہ) جب (جہ - ضہ) + جب (بہ + جہ) جب (بہ - جہ) × جب (عہ + ضہ) جب (عہ - ضہ) + جب (جہ + عہ) جب (جہ - عہ) جب (بہ + ضہ) جب (بہ - ضہ) = ۰

جملہ (لا² - ما²) (ی² - و²) + (ما² - ی²) (لا² - و²) + (ی² - لا²) (ما² - و²)

متماثلاً صفر ہوتا ہے۔ پس رکھو لا = جب عہ، ما = جب بہ، ی = جب جہ، و = جب ضہ

تو بہ چونکہ

جب² عہ - جب² بہ = جب (عہ + بہ) جب (عہ - بہ)

اس لیے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

(۷) ثابت کرو کہ

۲ (جم بہ جم جہ - جم عہ) (جم جہ جم عہ - جم بہ) (جم عہ جم بہ - جم جہ) +

جب² عہ جب² بہ جب² جہ - جب² عہ (جم بہ جم جہ - جم عہ)² - جب² بہ (جم جہ جم عہ - جم بہ)²

- جب² جہ (جم عہ جم بہ - جم جہ)² = (۱ - جم² عہ - جم² بہ - جم² جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ)²

یہ مسئلہ اخذ ہوتا ہے اس مشہور مسئلہ سے کہ مقطع

ا	ھ	گ
ھ	ب	ف
گ	ف	ج

کا مربع

=

ب ج - ف²	ف گ - ج ھ	ف ھ - ب گ
ف گ - ج ھ	ج ا - گ²	گ ھ - ا ف
ف ھ - ب گ	گ ھ - ا ف	ا ب - ھ²

رکھو ا = ب = ج = ۱، ف = جم عہ، گ = جم بہ، ھ = جم جہ تو

ب ج - ف² = جب² عہ، وغیرہ

(80)

پھر مقطع کو پھیلاؤ تو مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوگا۔

(۸) ثابت کرو کہ

جم ۲ عہ مم ½ (جہ - عہ) مم ½ (عہ - بہ) + جم ۲ بہ مم ½ (عہ - بہ) مم ½ (بہ - جہ)

+ جم ۲ جہ مم ½ (بہ - جہ) مم ½ (جہ - عہ)

= جم ۲ عہ + جم ۲ بہ + جم ۲ جہ + ۲ جم (بہ + جہ) + ۲ جم (جہ + عہ) + ۲ جم (عہ + بہ)

ضابطہ مم ½ طہ = (۱ + جم طہ) / جب طہ کے ذریعہ دائیں جانب کے ہر مماس التمام کو تبدیل کرو اور پھر پورے جملہ کا مشترک نسب نما جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) بناؤ تو شمارکندہ ہو جاتا ہے

Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) {۱ + جم (جہ - عہ)} {۱ + جم (عہ - بہ)}

یا Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) + Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ)

+ Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) {جم (جہ - عہ) + جم (عہ - بہ)}

یا {۱ + Σ جم (بہ - جہ)} Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) - ½ Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ)

+ Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ)

اب ۱ + Σ جم (بہ - جہ) = ۴ جم ½ (بہ - جہ) جم ½ (جہ - عہ) جم ½ (عہ - بہ)

بموجب مثال ۴ دفعہ ۷۴؛

اور Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) = Σ جم (بہ + جہ) Σ جب (جہ - بہ)

= ۴ جب ½ (بہ - جہ) جب ½ (جہ - عہ) جب ½ (عہ - بہ) Σ جم (بہ + جہ)

نیز Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ) = ۰

اور Σ جم ۲ عہ جب (بہ - جہ) جم (جہ - عہ) جم (عہ - بہ) = $\frac{1}{4}$ Σ جم ۲ عہ {جب ۲ (بہ - جہ) - جب ۲ (جہ - عہ) - جب ۲ (عہ - بہ)}

= $\frac{1}{2}$ Σ جم ۲ عہ جب ۲ (بہ - جہ) - $\frac{1}{4}$ Σ جم ۲ عہ Σ جب ۲ (بہ - جہ)

= جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) Σ جم ۲ عہ

پس مذکورہ بالا شمار کنندہ

= جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) {۲ Σ جم (بہ + جہ) + Σ جم ۲ عہ}؛

اسلیے یہ جملہ = ۲ Σ جم (بہ + جہ) + Σ جم ۲ عہ

(۹) اگر

عہ + بہ + جہ = π، اور مس $\frac{1}{4}$(بہ + جہ - عہ) مس $\frac{1}{4}$(جہ + عہ - بہ) مس $\frac{1}{4}$(عہ + بہ - جہ) = ۱

تو ثابت کرو کہ ۱ + جم عہ + جم بہ + جم جہ = ۰

دی ہوئی مساوات کا مربع لینے سے،

جب^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$عہ) جب^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$بہ) جب^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$جہ)

= جم^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$عہ) جم^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$بہ) جم^2 ($\frac{1}{4}\pi$ - $\frac{1}{2}$جہ)

یا (۱ - جب عہ) (۱ - جب بہ) (۱ - جب جہ) = (۱ + جب عہ) (۱ + جب بہ) (۱ + جب جہ)

(81) پس جب عہ + جب بہ + جب جہ + جب عہ جب بہ جب جہ = ۰،

یا ۴ جم $\frac{1}{2}$ عہ جم $\frac{1}{2}$ بہ جم $\frac{1}{2}$ جہ + جب عہ جب بہ جب جہ = ۰؛

اس لیے ۱ + ۲ جب $\frac{1}{2}$ عہ جب $\frac{1}{2}$ بہ جب $\frac{1}{2}$ جہ = ۰،

نیز جم عہ + جم بہ + جم جہ - ۱ = ۴ جب $\frac{1}{2}$ عہ جب $\frac{1}{2}$ بہ جب $\frac{1}{2}$ جہ؛

اس لیے جم عہ + جم بہ + جم جہ + ١ = ٠

(١٠) اگر مس $\frac{1}{2}$ (بہ + جہ − عہ) مس $\frac{1}{2}$ (جہ + عہ − بہ) مس $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ) = ١

تو ثابت کرو کہ جب ٢ عہ + جب ٢ بہ + جب ٢ جہ = ٤ جم عہ جم بہ جم جہ

اب جب $\frac{1}{2}$ (بہ + جہ − عہ) جب $\frac{1}{2}$ (جہ + عہ − بہ) جب $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ)

= جم $\frac{1}{2}$ (بہ + جہ − عہ) جم $\frac{1}{2}$ (جہ + عہ − بہ) جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ)

یا {جم (بہ − عہ) − جم جہ} جب $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ) = {جم (بہ − عہ) + جم جہ} جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ)

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جم (بہ − عہ) جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ + $\frac{1}{2}\pi$) + جم جہ جب $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ + $\frac{1}{2}\pi$) = ٠

اور جب ٢ عہ + جب ٢ بہ + جب ٢ جہ − ٤ جم عہ جم بہ جم جہ

= ٢ جب (عہ + بہ) جم (بہ − عہ) − ٢ جم جہ {جم (بہ − عہ) + جم (عہ + بہ) − جب جہ}

= ٢ جم (بہ − عہ) {جب (عہ + بہ) − جب ($\frac{1}{2}\pi$ − جہ)} − ٢ جم جہ {جم (بہ + عہ) − جم ($\frac{1}{2}\pi$ − جہ)}

= ٢ جب $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ + جہ − $\frac{1}{2}\pi$) {جم (بہ − عہ) جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ + $\frac{1}{2}\pi$)

+ جم جہ جب $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ − جہ + $\frac{1}{2}\pi$)}

اور یہ صفر کے مساوی ہے۔

(١١) اگر یہ دیا گیا ہو کہ

٤ جم (ا − ی) جم (ی − لا) جم (لا − ا) = ١

تو ثابت کرو کہ

١ + ١٢ جم ٢ (ا − ی) جم ٢ (ی − لا) جم ٢ (لا − ا)

= ٤ جم ٣ (ا − ی) جم ٣ (ی − لا) جم ٣ (لا − ا)

فرض کرو کہ عہ = ا − ی، بہ = ی − لا، جہ = لا − ا

تب عہ + بہ + جہ = ٠،

پس ١ − جم^{2} عہ − جم^{2} بہ − جم^{2} جہ + ٢ جم عہ جم بہ جم جہ = ٠،

اس لیے جم^2 عہ + جم^2 بہ + جم^2 جہ = $\frac{٣}{٢}$ ؛

اب جم ٣عہ جم ٣بہ جم ٣جہ = جم عہ جم بہ جم جہ (۴ جم^2 عہ − ٣) (۴ جم^2 بہ − ٣) (۴ جم^2 جہ − ٣)

= $\frac{١}{۴}$ (۴ − ٢٧ − ۴٨ Σ جم^2 بہ جم^2 جہ + ٣٦ Σ جم^2 عہ)

= $\frac{١}{۴}$ (٣١ − ۴٨ Σ جم^2 بہ جم^2 جہ)

اور جم ٢عہ جم ٢بہ جم ٢جہ = (٢ جم^2 عہ − ١) (٢ جم^2 بہ − ١) (٢ جم^2 جہ − ١)

= ($\frac{١}{٢}$ − ١ + ٣ − ۴ Σ جم^2 بہ جم^2 جہ)

= $\frac{۵}{٢}$ − ۴ Σ جم^2 بہ جم^2 جہ

پس ۴ جم ٣عہ جم ٣بہ جم ٣جہ − ١٢ جم ٢عہ جم ٢بہ جم ٢جہ = ١

(١٢) اگر

(ا^2 + ی^2 − ٢ ا ی جم عہ) / جب^2 عہ = (ی^2 + لا^2 − ٢ ی لا جم بہ) / جب^2 بہ = (لا^2 + ا^2 − ٢ لا ا ی جم جہ) / جب^2 جہ

(82) تو ثابت کرو کہ مساواتوں کے حسب ذیل جٹوں میں سے ایک درست ہے، جہاں ٢س = عہ + بہ + جہ

لا / جم (س − عہ) = ا / جم (س − بہ) = ی / جم (س − جہ) ؛

لا / جم س = ا / جم (س − جہ) = ی / جم (س − بہ)

لا / جم (س − جہ) = ا / جم س = ی / جم (س − عہ)

لا / جم (س − بہ) = ا / جم (س − عہ) = ی / جم س

فرض کرو کہ مساوی کسروں میں سے ہر کسر ک^2 سے تعبیر کی گئی ہے، اور

رکھو لا = ک. جم طہ، ما = ک. جم فہ، ی = ک. جم پہ، تب

جم^2 فہ + جم^2 پہ - ۲ جم فہ. جم پہ. جم عہ = ۱ - جم^2 عہ،

یا (جم عہ - جم فہ جم پہ)^2 = جب^2 فہ جب^2 پہ

اس لیے جم عہ = جم (فہ ± پہ)؛ اسی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ جم بہ = جم (پہ ± طہ)، جم جہ = جم (طہ ± فہ)، اس لیے عمومیت کے نقصان کے بغیر ہم رکھ سکتے ہیں عہ = فہ ± پہ، بہ = پہ ± طہ، جہ = طہ ± فہ - اس غرض سے کہ یہ مساواتیں موافق ہو سکیں ہمیں تمام مبہم علامتوں کو مثبت لینا چاہیے، یا دو کو منفی اور ایک کو مثبت۔ پہلی صورت میں طہ = س - عہ، فہ = س - بہ، پہ = س - جہ؛ دوسری صورت میں قیمتوں کے حسب ذیل تین جٹ ملتے ہیں

طہ = س	طہ = جہ - س،	طہ = س - بہ
فہ = س - جہ	فہ = س	فہ = عہ - س
پہ = بہ - س	پہ = س - بہ	پہ = س

اس طرح دی ہوئی چار مساواتوں میں سے ایک ہمیشہ پوری ہوتی ہے۔

مساواتوں کا حل

۶۹ — مثالیں

(۱) حل کرو مساوات

جب ۲ طہ قط ۴ طہ + جم ۲ طہ = جم ۶ طہ

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جب ۲ طہ قط ۴ طہ + جم ۲ طہ - جم ۶ طہ = ۰،

یا جب ۲ طہ قط ۴ طہ + ۲ جب ۴ طہ جب ۲ طہ = ۰،

پس جب ۲ طہ = ۰ یا قط ۴ طہ + ۲ جب ۴ طہ = ۰

یعنے جب ۸ طہ = -۱

اس لیے حل ہیں

ط = $\frac{1}{۲}$ م π ، ط = $\frac{1}{۲}$ { ن π − (−۱)^ن $\frac{\pi}{۲}$ }

(۲) حل کرو مساوات[1]

جم^۳ عہ قط لا + جب^۳ عہ قم لا = ۱ ، لا کے لیے

یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

جم^۳ عہ جب لا + جب^۳ عہ . جم لا = جب لا . جم لا ،

یا جب^۲ عہ جم لا − جم عہ جب^۲ عہ جب لا = جب لا (جم لا − جم عہ) ، (83)

پس جب^۲ عہ جب (عہ − لا) = جب لا (جم لا − جم عہ) ،

اس مساوات کی طرفین جب $\frac{1}{۲}$ (عہ − لا) سے تقسیم پذیر ہیں، اس لیے اس جزو ضربی کو نکال دینے سے

۲ جب^۲ عہ . جم $\frac{1}{۲}$ (عہ − لا) = ۲ جب لا جب $\frac{1}{۲}$ (عہ + لا)

= جم $\frac{1}{۲}$ (لا − عہ) − جم $\frac{1}{۲}$ (۳ لا + عہ)

اس لیے جم $\frac{1}{۲}$ (۳ لا + عہ) = جم $\frac{1}{۲}$ (لا − عہ) . جم ۲ عہ ،

یا ۲ جم $\frac{1}{۲}$ (۳ لا + عہ) = جم $\frac{1}{۲}$ (لا + ۳ عہ) + جم $\frac{1}{۲}$ (لا − ۵ عہ) ،

جس کو لکھا جا سکتا ہے

جم $\frac{1}{۲}$ (۳ لا + عہ) − جم $\frac{1}{۲}$ (لا + ۳ عہ) = جم $\frac{1}{۲}$ (لا − ۵ عہ) − جم $\frac{1}{۲}$ (۳ لا + عہ) ،

اس لیے جب $\frac{1}{۲}$ (لا − عہ) جب (لا + عہ) = جب (لا − عہ) جب $\frac{1}{۲}$ (لا + ۳ عہ) ؛

پھر مشترک جزو ضربی جب $\frac{1}{۲}$ (لا − عہ) کو خارج کر دینے سے

جب (لا + عہ) = − ۲ . جم $\frac{1}{۲}$ (لا − عہ) جب $\frac{1}{۲}$ (لا + ۳ عہ)

= − {جب (لا + عہ) + جب ۲ عہ} ،

[1] یہ مثال واسٹن ہوم کے مسئلوں سے لی گئی ہے۔

اس لیے $\text{جب}\,(لا + عہ) = -\,\text{جب}\,عہ\,.\,\text{جم}\,عہ$

اس لیے حل ہیں

$لا = ۲\,ن\,\pi + عہ$، اور $لا = ن\,\pi - عہ + (-۱)^{ن}\,\text{جب}^{-۱}\,(\text{جب}\,عہ\,\text{جم}\,عہ)$

(۳) حل کرو مساواتیں

$$\left.\begin{aligned} ا\,\text{جب}\,(لا + ما) - ب\,\text{جب}\,(لا - ما) &= ۲\,م\,\text{جم}\,لا \\ ا\,\text{جب}\,(لا + ما) + ب\,\text{جب}\,(لا - ما) &= ۲\,ن\,\text{جم}\,ما \end{aligned}\right\}$$

اِن سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{ن^۲}\{ا\,\text{جب}\,(لا + ما) + ب\,\text{جب}\,(لا - ما)\}^۲ - \frac{۱}{م^۲}\{ا\,\text{جب}\,(لا + ما) - ب\,\text{جب}\,(لا - ما)\}^۲$$
$$= ۴\,(\text{جم}^۲\,ما - \text{جم}^۲\,لا) = ۴\,\text{جب}\,(لا + ما)\,\text{جب}\,(لا - ما)$$

فرض کرو $\dfrac{\text{جب}\,(لا + ما)}{\text{جب}\,(لا - ما)} = ت$ تو ت حسب ذیل دو درجی مساوات سے ملیگا

$$ا^۲\,ت^۲\left(\frac{۱}{ن^۲} - \frac{۱}{م^۲}\right) + ۲\,ت\left\{ا\,ب\left(\frac{۱}{ن^۲} + \frac{۱}{م^۲}\right) - ۲\right\}$$
$$+ ب^۲\left(\frac{۱}{ن^۲} - \frac{۱}{م^۲}\right) = ۰$$

اس مساوات کی دونوں اصلوں کو ت سے تعبیر کرنے سے

$$ت = \frac{\text{جب}\,(لا + ما)}{\text{جب}\,(لا - ما)} = \frac{\text{مس}\,لا + \text{مس}\,ما}{\text{مس}\,لا - \text{مس}\,ما}$$

اس لیے $\dfrac{\text{مس}\,لا}{\text{مس}\,ما} = \dfrac{ت + ۱}{ت - ۱}$

نیز دی ہوئی مساواتوں میں سے ایک کو دوسرے سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{م\,.\,\text{جم}\,لا}{ن\,.\,\text{جم}\,ما} = \frac{ا\,ت - ب}{ا\,ت + ب}$$

اور پھر ان دو مساواتوں اور رشتہ قط² ا ـ مس² ا = ۱ کے ذریعہ ا کو ساقط کرنے سے

$$\frac{\text{ن}^2}{\text{م}^2}\left(\frac{\text{ات} - \text{ب}}{\text{ات} + \text{ب}}\right)^2 \text{قط}^2\,\text{لا} - \left(\frac{\text{ت} - 1}{\text{ت} + 1}\right)^2 \text{مس}^2\,\text{لا} = 1$$

جس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس لا} = \pm\left\{1 - \frac{\text{ن}^2}{\text{م}^2}\left(\frac{\text{ات} - \text{ت}}{\text{ات} + \text{ب}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\text{ن}^2}{\text{م}^2}\left(\frac{\text{ات} - \text{ب}}{\text{ات} + \text{ب}}\right)^2 - \left(\frac{\text{ت} - 1}{\text{ت} + 1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

اس سے مس لا کی چار قیمتیں ملتی ہیں، جن میں سے دو، دو اُس دو درجی مساوات کی ہر اصل کے جواب میں ہیں جو ت میں ہے ۔ اس طرح لا معلوم ہو چکا اور پھر ا اس مساوات

$$\text{مس ا} = \frac{\text{ت} - 1}{\text{ت} + 1}\,\text{مس لا}$$

سے ملجاتا ہے ۔

(84)

اسقاط

۷ ـــ مثالیں ـ

(۱) مساواتوں $\frac{\text{جم}^3\text{ط}}{\text{جم(ع} - 3\text{ط)}} = \frac{\text{جب}^3\text{ط}}{\text{جب(ع} - 3\text{ط)}} = \text{م}$ سے ط ساقط کرو ۔

چونکہ $$\text{م} = \frac{\text{جب ط جم}^3\text{ط} + \text{جم ط جب}^3\text{ط}}{\text{جب(ع} - 2\text{ط)}} = \frac{\text{جب ط جم ط}}{\text{جب(ع} - 2\text{ط)}}$$

اس لیے $$\frac{1}{2\text{م}} = \text{جب ع ظم } 2\text{ط} - \text{جم ع}$$

نیز $$\text{م} = \frac{\text{جم}^4\text{ط} - \text{جب}^4\text{ط}}{\text{جم ط جم(ع} - 3\text{ط)} - \text{جب ط جب(ع} - 3\text{ط)}} = \frac{\text{جم } 2\text{ط}}{\text{جم(ع} - 2\text{ط)}}$$

$$= \frac{1}{\text{جم ع} + \text{جب ع مس } 2\text{ط}}$$

پس　(۱/۲م + .جم عہ) (۱/م − .جم عہ) = جب² عہ،

یا　۲ م² − ۱ = م .جم عہ،

اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساواتوں

.جم۳ (ط − عہ) / .جم (ط − بہ) = .جم۳ (ط + عہ − جہ) / .جم (ط + بہ − جہ) = .جم ۳ عہ / .جم بہ

سے ط کو ساقط کرنے سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ بہ سے آزاد ہے۔

مساوات

.جم ۳ (لا − عہ) / .جم (لا − بہ) = .جم ۳ عہ / .جم بہ

میں لا کو پورا کرنے والی تین غیر تابع قیمتیں طہ، جہ − طہ، اور صفر ہیں۔ اسلئے

.جم ۳ لا .جم ۳ عہ + جب ۳ لا جب ۳ عہ = ک (.جم لا .جم بہ + جب لا جب بہ)

جہاں ک = .جم ۳ عہ / .جم بہ؛ .جم ۳ لا، جب ۳ لا کی بجائے ان کی قیمتیں علی الترتیب .جم لا، جب لا کی رقوم میں رکھنے اور پھر پوری مساوات کو .جم³ لا سے تقسیم کرنے سے مس لا (= ت) میں حسب ذیل کعبی مساوات ملتی ہے

.جم ۳ عہ {۴ − ۳ (۱ + ت²)} + جب ۳ عہ {۳ ت (۱ + ت²) − ۴ ت³}

= ک (.جم بہ + ت جب بہ) (۱ + ت²)

یا　ت³ (ک جب بہ + جب ۳ عہ) + ت² (ک .جم بہ + ۳ .جم ۳ عہ) +

ت (ک جب بہ − ۳ جب ۳ عہ) + ک .جم بہ − .جم ۳ عہ = ۰؛

اِس لیے دو درجی مساوات

ت^{۲}(ک جب بہ + جب ۳ عہ) + ت(ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ) + ک جب بہ
− ۳ جب ۳ عہ = ۰،

کی اصلیں مس طہ اور مس (جہ − طہ) ہیں؛

اِس لیے مس طہ + مس (جہ − طہ) = $\frac{\text{ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ}}{\text{ک جب بہ + جب ۳ عہ}}$

اور مس طہ مس (جہ − طہ) = $\frac{\text{ک جب بہ − ۳ جب ۳ عہ}}{\text{ک جب بہ + جب ۳ عہ}}$

پس مس جہ = $\frac{\text{−(ک جم بہ + ۳ جم ۳ عہ)}}{\text{۴ جب ۳ عہ}}$ = − مم ۳ عہ،

یا جہ − ۳ عہ = (۲ ر + ۱) $\frac{۱}{۲}\pi$

(85) جہاں ر کوئی صحیح عدد ہے۔ اس طرح حاصل اسقاط بہ پر منحصر نہیں ہے۔

(۳) مساواتوں

$\frac{\text{لا جم طہ}}{\text{ا}}$ + $\frac{\text{ما جب طہ}}{\text{ب}}$ = ۱، لا جب طہ − ما جم طہ = (ا^{۲} جب^{۲} طہ + ب^{۲} جم^{۲} طہ)$^{\frac{۱}{۲}}$

سے طہ ساقط کرو۔

ہر مساوات کا مربع لو اور مس طہ = ت رکھو تو مساواتیں ہو جاتی ہیں

ت^{۲}(۱ − $\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}$) − ۲ ت $\frac{\text{لا ما}}{\text{ا ب}}$ + (۱ − $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}$) = ۰،

ت^{۲}(ا^{۲} − لا^{۲}) + ۲ ت لا ما + (ب^{۲} − ما^{۲}) = ۰۔

اِن مساواتوں سے ت کو ساقط کرنا ہے۔ ان کو ت^{۲} اور ت کے لیے حل کرنے سے

$\frac{\text{ت}^{۲}}{\text{۲ لا ما (۱ − }\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\text{) + }\frac{\text{ب}^{۲}\text{ − ما}^{۲}}{\text{ا ب}}\text{ ۲}}$ = $\frac{\text{ت}}{\frac{(\text{ب}^{۲}\text{ − ما}^{۲})}{\text{ب}^{۲}}\text{ ۲ − }\frac{(\text{ا}^{۲}\text{ − لا}^{۲})}{\text{ا}^{۲}}\text{ ۲}}$ = $\frac{۱}{\frac{\text{۲ لا ما (ا}^{۲}\text{ − لا}^{۲}\text{)}}{\text{ا ب}}\text{ − }\frac{\text{۲ لا ما (ب}^{۲}\text{ − ما}^{۲}\text{)}}{\text{ب}^{۲}}}$

پس

$$\left\{\frac{\text{ب}^2-\text{ما}^2}{\text{ب}}+\frac{\text{ا}^2-\text{لا}^2}{\text{ا}}\right\}^2\left[\frac{\text{ب}^2-\text{ما}^2}{\text{ب}}-\frac{\text{ا}^2-\text{لا}^2}{\text{ا}}\right\}^2=-\frac{4\,\text{لا}^2\,\text{ما}^2}{\text{ا}^3\,\text{ب}^3}\left\{\text{ب}(\text{ا}^2-\text{لا}^2)+\text{ا}(\text{ب}^2-\text{ما}^2)\right\}^2$$

یا

$$\left\{\text{ا}+\text{ب}-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}}\right\}^2\left[\left\{\frac{\text{ب}^2-\text{ما}^2}{\text{ب}}-\frac{\text{ا}^2-\text{لا}^2}{\text{ا}}\right\}^2+\frac{4\,\text{لا}^2\,\text{ما}^2}{\text{ا}\,\text{ب}}\right]=0$$

اس لیے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}}=\text{ا}+\text{ب}$$

حاصل اِسقاط ہے۔

(۴) مساواتوں

$$\text{لا جب ط}+\text{ما جم ط}=2\,\text{ا جب }2\text{ط}،$$

$$\text{لا جم ط}-\text{ما جب ط}=\text{ا جم }2\text{ط}$$

سے ط ساقط کرو۔

لا اور ما کے لیے حل کرنے سے

$$\text{لا}=\text{ا جم ط}(2-\text{جم }2\text{ط})،\quad \text{ما}=\text{ا جب ط}(2+\text{جم }2\text{ط})$$

یا

$$\text{لا}=\text{ا جم ط}(\text{جم}^2\text{ط}+3\,\text{جب}^2\text{ط})،\quad \text{ما}=\text{ا جب ط}(3\,\text{جم}^2\text{ط}+\text{جب}^2\text{ط})$$

اسلیے

$$\text{لا}+\text{ما}=\text{ا}(\text{جم ط}+\text{جب ط})^3،\quad \text{لا}-\text{ما}=\text{ا}(\text{جم ط}-\text{جب ط})^3$$

پس

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{2}{3}}=\text{ا}^{\frac{2}{3}}(1+\text{جب }2\text{ط})،\quad (\text{لا}-\text{ما})^{\frac{2}{3}}=\text{ا}^{\frac{2}{3}}(1-\text{جب }2\text{ط})$$

اور حاصل اسقاط ہے

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\frac{2}{3}}+(\text{لا}-\text{ما})^{\frac{2}{3}}=2\,\text{ا}^{\frac{2}{3}}$$

مساواتوں کی اصلوں کے درمیان رشتے

۱۷ — مثالیں —

(۱) مساوات $\text{ا}\ \text{جم}\ \text{ط} + \text{ب}\ \text{جب}\ \text{ط} = \text{ج}$

پر غور کرو۔

فرض کرو کہ ط کی دو الگ الگ قیمتیں عہ، بہ ہیں جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں، تب

$$\text{ا}\ \text{جم}\ \text{عہ} + \text{ب}\ \text{جب}\ \text{عہ} = \text{ج}،$$
$$\text{ا}\ \text{جم}\ \text{بہ} + \text{ب}\ \text{جب}\ \text{بہ} = \text{ج}،$$

(86) اس لیے

$$\frac{\text{ا}}{\text{جب}\ \text{بہ} - \text{جب}\ \text{عہ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم}\ \text{عہ} - \text{جم}\ \text{بہ}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب}\ (\text{بہ} - \text{عہ})}$$

پس $\text{مس}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ}) = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$

اور نیز $\frac{1}{\text{ج}}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} - \text{عہ}) = \frac{1}{\text{ب}}\ \text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ}) = \frac{1}{\text{ا}}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ})$

اِن رشتوں کو حسب ذیل طریقہ پر بھی معلوم کیا جا سکتا ہے:۔ رکھو $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{ط} = \text{ت}$، تو دی ہوئی مساوات لکھی جا سکتی ہے

$$\text{ا}(۱ - \text{ت}^2) + ۲\text{ب}\ \text{ت} = \text{ج}(۱ + \text{ت}^2)$$

یا $\text{ت}^2(\text{ج} + \text{ا}) - ۲\ \text{ب}\ \text{ت} + \text{ج} - \text{ا} = ۰$

اس دو درجی کی اصلیں $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{عہ}$، $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{بہ}$ ہیں، اس لیے

$$\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{عہ}\ \text{مس}\ \frac{1}{2}\text{بہ} = \frac{\text{ج} - \text{ا}}{\text{ج} + \text{ا}}$$

اِس لیے ربط حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} - \text{عہ})}{\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{بہ} + \text{عہ})} = \frac{\text{ج}}{\text{ا}}$$

نیز $\text{مس}\ \frac{1}{2}\text{عہ} + \text{مس}\ \frac{1}{2}\text{بہ} = \frac{۲\text{ب}}{\text{ج} + \text{ا}}$

جس سے دوسرا ربط حاصل ہو سکتا ہے۔

(۲) مساوات

$$\text{ا جم ۲ ط + ب جب ۲ ط + ج جم ط + د جب ط + ع} = ۰$$

پر غور کرو۔

فرض کرو ت = مس $\frac{1}{2}$ ط تو دی ہوئی مساوات کو ت میں چار درجی کے طور پر لکھا جا سکتا ہے چنانچہ

$$\text{ت}^{4}(\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}) + \text{ت}^{3}(-۴\,\text{ب} + ۲\,\text{د}) + \text{ت}^{2}(-۶\,\text{ا} + ۲\,\text{ع})$$
$$+\ \text{ت}(۴\,\text{ب} + ۲\,\text{د}) + (\text{ا} + \text{ج} + \text{ع}) = ۰ \text{ ؛}$$

اگر اس چار درجی کی اصلیں مس $\frac{1}{2}$ $ط_1$، مس $\frac{1}{2}$ $ط_2$، مس $\frac{1}{2}$ $ط_3$، مس $\frac{1}{2}$ $ط_4$ ہوں تو

$$\Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1 = \frac{۴\,\text{ب} - ۲\,\text{د}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}} \text{ ،}\quad \Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_2 = \frac{۲\,\text{ع} - ۶\,\text{ا}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}} \text{ ،}$$

$$\Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_2\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_3 = -\frac{۴\,\text{ب} + ۲\,\text{د}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}} \text{ ،}\quad \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_2\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_3\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_4 =$$

$\frac{\text{ا} + \text{ج} + \text{ع}}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع}}$ ؛ اور ان رشتوں سے اِن چار حاصلوں کے تشاکل تفاعل محسوب کیے جا سکتے ہیں۔

اگر $۲\,\text{س} = \text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \text{ط}_3 + \text{ط}_4$ تو

$$\text{مس س} = \frac{\Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1 - \Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_2\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_3}{۱ - \Sigma\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_2 + \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_1\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_2\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_3\,\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ط}_4}$$

$$= \frac{۴\,\text{ب} - ۲\,\text{د} + (۴\,\text{ب} + ۲\,\text{د})}{\text{ا} - \text{ج} + \text{ع} - (۲\,\text{ع} - ۶\,\text{ا}) + \text{ا} + \text{ج} + \text{ع}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

طالب علم حسب ذیل رشتے مشق کے طور پر ثابت کرے۔

$$\frac{\text{ا}}{\text{جم س}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب س}} = \frac{-\text{ج}}{\Sigma\,\text{جم}(\text{س} - \text{ط}_1)} = \frac{-\text{د}}{\Sigma\,\text{جب}(\text{س} - \text{ط}_1)} = \frac{\text{ع}}{\Sigma\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 - \text{ط}_3 - \text{ط}_4)}$$

(۳) اگر

جب عہ جم (عہ + ط) مس ۲ عہ = جب بہ جم (بہ + ط) مس ۲ بہ = جب جہ جم (جہ + ط) مس ۲ جہ
= جب ضہ جم (ضہ + ط) مس ۲ ضہ

(۸۷) اور عہ، بہ، جہ، ضہ میں سے کسی دو زاویوں میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ عہ + بہ + جہ + ضہ + ط، π کا ضعف ہے۔

مساوی مقداروں میں سے ہر مقدار کو ک کے مساوی رکھو تو عہ، بہ، جہ، ضہ مساوات

جب لا جم (لا + ط) مس ۲ لا = ک

کی اصلیں ہیں۔ یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

۲ مس^۲ لا (جم ط ـ جب ط مس لا) = ک (۱ ـ مس^۲ لا)،

پس Σ مس عہ = ۲ جب ط / ک ، Σ مس عہ مس بہ = ۲ جم ط / ک ،

Σ مس عہ مس بہ مس جہ = ۰، مس عہ مس بہ مس جہ مس ضہ = ـ ۱

اس لیے مس (عہ + بہ + جہ + ضہ) = ۲ جب ط / (ک ـ ۲ جم ط ـ ک) = ـ مس ط

پس عہ + بہ + جہ + ضہ + ط، π کا ضعف ہے۔

(۴) اگر عہ، بہ، جہ، غیر مساوی زاویئے ہوں ہر ایک ۲ π سے کم تو ثابت کرو کہ مساواتیں

جم (عہ + ط) قط ۲ عہ = جم (ط + بہ) قط ۲ بہ = جم (ط + جہ) قط ۲ جہ

ایک ساتھ موجود نہیں ہو سکتیں جب تک کہ

جم (بہ + جہ) + جم (جہ + عہ) + جم (عہ + بہ)

صفر کے مساوی نہ ہو۔

ہر مساوی مقدار کو ک کے مساوی رکھنے سے

جم عہ جم ط ـ جب عہ جب ط ـ ک جم ۲ عہ = ۰ ،

جم بہ جم ط ـ جب بہ جب ط ـ ک جم ۲ بہ = ۰ ،

جم جہ جم ط ـ جب جہ جب ط ـ ک جم ۲ جہ = ۰ ،

پس　جم ط اور جب ط کو ساقط کرنے سے

∑ جم ۲ عہ جب (بہ ـ جہ) = ۰ ،

یا　∑ جم (بہ + جہ) ∑ جب (جہ ـ بہ) = ۰ ، بموجب مثال (۲) دفعہ ۶۸

پس　∑ جم (بہ + جہ) = ۰ ، سوائے اس صورت میں جبکہ ∑ جم (جہ ـ بہ) = ۰

یعنی　جبکہ جب $\frac{1}{2}$ (بہ ـ جہ) جب $\frac{1}{2}$ (جہ ـ عہ) جب $\frac{1}{2}$ (عہ ـ بہ) = ۰

یہ مثال بھی مثال (۳) کی طرح حل ہو سکتی ہے۔

اعظم اور اقل قیمتیں ـ لاتساویات

۷۲ ـــ مثالیں ـ

(۱)　ا جم ط + ب جب ط

کی بڑی سے بڑی قیمت ہے　$\sqrt{ا^2 + ب^2}$

رکھو $\frac{ب}{ا}$ = مس عہ ، تو ب = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ جب عہ ، ا = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ جم عہ ،

اس طرح　ا جم ط + ب جب ط = $\sqrt{ا^2 + ب^2}$. جم (ط ـ عہ) ،

اب چونکہ　جم (ط ـ عہ) ہمیشہ ± ۱ کے درمیان واقع ہوتا ہے ، اس لیے ا جم ط + ب جب ط

± $\sqrt{ا^2 + ب^2}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

(۲) اگر　ع = $\sqrt{ا^2 جم^2 ط + ب^2 جب^2 ط}$ + $\sqrt{ا^2 جب^2 ط + ب^2 جم^2 ط}$

تو ع، $\text{ا} + \text{ب}$ اور $\sqrt{۲(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}$ کے درمیان واقع ہوگا۔

(۵۵) فرض کرو $\text{لا} = \text{ا}^۲ \,\text{جم}^۲ \text{ط} + \text{ب}^۲ \,\text{جب}^۲ \text{ط} = \frac{۱}{۲}(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲) + \frac{۱}{۲}(\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\,\text{جم}\,۲\text{ط}$

تب $\text{ع} = \sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{لا}}$ ،

$$\text{ع}^۲ = \text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ + ۲\sqrt{\frac{۱}{۴}(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)^۲ - \left\{\frac{۱}{۲}(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - \text{لا}\right\}^۲}$$

پس ع بڑے سے بڑا ہے جبکہ $\text{لا} = \frac{۱}{۲}(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)$، یا ع کی بڑی سے بڑی قیمت $\sqrt{۲(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}$ ہے؛ نیز ع کم سے کم ہے جبکہ $\frac{۱}{۲}(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲) - \text{لا}$ بڑے سے بڑا ہو یعنی جبکہ لا کم سے کم ہو اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ $\text{جم}\,۲\text{ط} = -۱$؛ اور اس صورت میں $\text{لا} = \text{ب}^۲$ اور تب $\text{ع} = \text{ا} + \text{ب}$؛ اس لیے یہ ع کی کم سے کم قیمت ہے۔

(۳) اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم}\,\frac{۱}{۴}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} > ۲$$

چونکہ

$$\text{مم}\,\frac{۱}{۴}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} = \frac{\text{جب}\,\frac{۳}{۴}\text{ط}}{\text{جب}\,\frac{۱}{۴}\text{ط}\;\text{جب}\,\text{ط}} = \frac{۳ - ۴\,\text{جب}^۲\frac{۱}{۴}\text{ط}}{\text{جب}\,\text{ط}} = \frac{۱ + ۲\,\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}}{\text{جب}\,\text{ط}}$$

پس $\text{مم}\,\frac{۱}{۴}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} = \text{قم}\,\text{ط} + \text{قم}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}$ ؛

اب اگر ط، صفر اور π کے درمیان واقع ہے تو قم ط اور قم $\frac{۱}{۲}$ط ہر ایک اکائی سے ہرگز کم نہیں ہوسکتا، اس لیے $\text{مم}\,\frac{۱}{۴}\text{ط} - \text{مم}\,\text{ط} > ۲$،

(۴) اگر ن زاویوں کا جن میں سے ہر ایک مثبت ہے اور $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے مجموعہ دیا جائے تو بتاؤ کہ اِن زاویوں کی جیوب کا حاصل جمع یا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جب کہ زاویے سب کے سب مساوی ہوں۔

جیوب التمام کے لیے بھی ایسا ہی ایک مسئلہ درست ہے۔

فرض کرو کہ عم، عم۲، ...، عن زاویے ہیں اور ان کا حاصل جمع ص ہے۔

تب جب عر + جب عس = ۲ جب $\frac{1}{2}$ (عر + عس) جم $\frac{1}{2}$ (عر − عس) اور

چونکہ جم $\frac{1}{2}$ (عر − عس) ایک سے کم ہے سوائے اس صورت کہ جبکہ عر = عس

اس لیے جب عر + جب عس $<$ ۲ جب $\frac{1}{2}$ (عر + عس)

اگر عر $\neq$ عس، اس لیے اگر عم، عم۲، ...، عن میں سے کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں، تو ہم اِن دو زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے حسابی اوسط کو درج کرکے Σ جب عم کو بڑھا سکتے ہیں، پس Σ جب عم بڑے سے بڑا ہے جب سب زاویے مساوی ہوں؛

اس لیے Σ جب عم $\not>$ ن جب $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$ ۔

نیز جب عر جب عس = $\frac{1}{2}$ {جم (عر − عس) − جم (عر + عس)}

اور یہ $\frac{1}{2}$ {جم (عر − عس) − جم (عر + عس)} $<$ $\frac{1}{2}$ {۱ − جم (عر + عس)}

یا $<$ جب^2 $\frac{1}{2}$ (عر + عس)

اگر عر $\neq$ عس ۔ پس حسب سابق اگر حاصل ضرب جب عم جب عم۲ × .. جب عن میں کوئی دو زاویے غیر مساوی ہوں تو ہم اِن زاویوں میں سے ہر ایک کی بجائے ان کے اوسط حسابی کو درج کرکے حاصل ضرب کو بڑھا سکتے ہیں؛ اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب عم ..... جب عن بڑے سے بڑا ہے جبکہ عم = عم۲ = ... = عن، اور اس حاصل ضرب کی بڑی سے بڑی قیمت (جب $\frac{\text{ص}}{\text{ن}}$)$^{\text{ن}}$ ہے۔

(۵) پچھلی مثال کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے قاطع التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جب سب زاویے مساوی ہوں ۔

چونکہ

قم عر + قم عس

$$= \text{جب}\ \tfrac{1}{2}(\text{عر}+\text{عس})\left\{\frac{1}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{عر}-\text{عس})-\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{عر}+\text{عس})}+\frac{1}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{عر}-\text{عس})+\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{عر}+\text{عس})}\right\}$$

پس عر + عس کی دی ہوئی قیمت کے لیے قم عر + قم عس کی کم سے کم قیمت ہے جبکہ $\text{جم}\ \tfrac{1}{2}(\text{عر}-\text{عس}) = 1$، یا جبکہ عر = عس ۔ اِس کے بعد استدلال کی صورت وہی ہوگی جو پچھلی مثال کی ہے ۔ (89)

(۶) پچھلی دو مثالوں کی شرطوں کے تحت ثابت کرو کہ زاویوں کے مماسوں یا مماس التماموں کا حاصل جمع کم سے کم ہے جبکہ سب زاویے مساوی ہوں ۔

(۷) اگر عہ + بہ + جہ = π تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم عہ}\ .\ \text{جم بہ}\ .\ \text{جم جہ} \ngtr \tfrac{1}{8}$$

مساواتوں کے استنباطی نظام

۳۷ ——— مساواتوں کے نظام کو استنباطی[1] کہا جائیگا جب کہ مساواتیں باہم موافق نہ ہوں اِلّا آنکہ سر ایک خاص رشتہ کو پورا کریں۔ جب یہ رشتہ پورا ہو تو مساواتوں کے حل تعداد میں لا متناہی ہونگے۔

[1] دیکھو "استنباطی مساواتوں کے نظامات پر" اوسٹن ہوم کا مضمون "Proc. London Math. Soc." جلد چہارم میں۔

نظام

ا جم به جم جه + ب جب به جب جه + ج + اَ (جب به + جب جه) + بَ (جم به + جم جه)
+ جَ جب (به + جه) = ۰ ،

ا جم جه جم عه + ب جب جه جب عه + ج + اَ (جب جه + جب عه) + بَ (جم جه + جم عه)
+ جَ جب (جه + عه) = ۰ ،

ا جم عه جم به + ب جب عه جب به + ج + اَ (جب عه + جب به) + بَ (جم عه + جم به)
+ جَ جب (عه + به) = ۰ ،

تین استنباطی مساواتوں کا ایک نظام ہے۔

مساوات

ا جم عه جم ط + ب جب عه جب ط + ج + اَ (جب عه + جب ط) + بَ (جم عه + جم ط)
+ جَ جب (عه + ط) = ۰ ،

پر غور کرو۔ یہ مساوات پوری ہوتی ہے ط = به اور ط = جه سے۔ اس کو مس ½ ط = م کی مساوات کے طور پر لکھو، اس طرح:

م^{2} (−ا جم عه + ج + اَ جب عه + بَ جم عه − بَ − جَ جب عه)
+ ۲ م (ب جب عه + اَ + جَ جم عه) + (ا جم عه + ج + اَ جب عه + بَ + بَ جم عه
+ جَ جب عه) = ۰ ،

اس مساوات سے ہم معلوم کرتے ہیں

مس ½ به + مس ½ جه، اور مس ½ به مس ½ جه

پس مس ½ (به + جه) = ۲ (ب جب عه + اَ + جَ جم عه) / ۲ (ا جم عه + بَ + جَ جب عه)

اسی طرح ہمیں حاصل ہونا چاہیے

مس ½ (عه + جه) = (ب جب به + اَ + جَ جم به) / (ا جم به + بَ + جَ جب به)،

اب ہم مس ۱/۲ (عہ ـ بہ) کی قیمت اخذ کر سکتے ہیں ؛ یہ قیمت ایک کسر ہوگی جس کا شمار کنندہ ہے

(ب جب بہ + اَ + جَ جم بہ) (ا جم عہ + بَ + جَ جب عہ) - (ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ)

× (ا جم بہ + بَ + جَ جب بہ)

یا

۲ جب ۱/۲ (عہ - بہ) {(جَ^{۲} - ا ب) جم ۱/۲ (عہ - بہ) + (اَ جَ - ب بَ) جم ۱/۲ (عہ + بہ)

- (ا اَ - بَ جَ) جب ۱/۲ (عہ + بہ)}

(۹۰) اور نسب نما ہے

(ب جب عہ + اَ + جَ جم عہ) (ب جب بہ + اَ + جَ جم بہ) + (ا جم عہ + بَ + ج جب عہ)

(ا جم بہ + بَ + جَ جب بہ)

یا

(ا^{۲} + جَ^{۲}) جم عہ جم بہ + (ب^{۲} + جَ^{۲}) جب عہ جب بہ + (اَ^{۲} + بَ^{۲})

+ (اَ ب + بَ جَ) (جب عہ + جب بہ) + (اَ جَ + ا بَ) (جم عہ + جم بہ)

+ (ا + ب) جَ جب (عہ + بہ) ؛

اس کسر کو جب ۱/۲ (عہ ـ بہ) سے تقسیم کرو تو یہ نسب نما

= (جَ^{۲} - ا ب) {ا + جم (عہ - بہ)} + (اَ جَ - ب بَ) (جم عہ + جم بہ) - (ا اَ - بَ جَ) (جب عہ + جب بہ)

پس

(ا + ب) {ا جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ + ج + اَ (جب عہ + جب بہ)

+ بَ (جم عہ + جم بہ) + جَ جب (عہ + بہ)}

= جَ^{۲} - اَ^{۲} - بَ^{۲} + ج ا + ج ب - ا ب

اس لیے جب تک کہ شرط

$$\text{ج}^2-\text{ا}^2-\text{ب}^2+\text{ج ا}+\text{ج ب}-\text{ا ب}=0$$

پوری نہ ہو مساواتوں کا دیا ہوا انتظام پورا نہیں ہو سکتا سوائے عہ، بہ، جہ کی مساوی قیمتوں کے۔ جب یہ شرط پوری ہو تو کوئی ایک مساوات باقی دو مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہے۔

سلسلوں کو جمع کرنا

۴۷ ـــ بہت سے سلسلے جن میں دائری افاعل شامل ہوتے ہیں فرقوں کے طریقہ سے جمع کیے جا سکتے ہیں۔ اس طریقہ کے استعمال کی سب سے اہم مثال وہ سلسلہ ہے جو اُن مقداروں کی جیوب یا جیوب التمام کا ہوتا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ سلسلہ ہے

$$\text{س}=\text{جم عہ}+\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ})+\text{جم}(\text{عہ}+2\,\text{بہ})+\dots+\text{جم}\left[\text{عہ}+(\text{ن}-1)\,\text{بہ}\right]؛$$

اب چونکہ

$$\text{جم عہ}=\frac{1}{2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{1}{2}\text{بہ}\right)-\text{جب}\left(\text{عہ}-\frac{1}{2}\text{بہ}\right)\right]،$$

$$\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ})=\frac{1}{2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{3}{2}\text{بہ}\right)-\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{1}{2}\text{بہ}\right)\right]،$$

. . . .

$$\text{جم}\left\{\text{عہ}+(\text{ن}-1)\,\text{بہ}\right\}=\frac{1}{2\,\text{جب}\,\frac{1}{2}\text{بہ}}\left[\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{2\text{ن}-1}{2}\text{بہ}\right)-\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{2\text{ن}-3}{2}\text{بہ}\right)\right]$$

اس لیے

$$\text{س}=\frac{1}{2}\,\text{قم}\,\frac{1}{2}\text{بہ}\left\{\text{جب}\left(\text{عہ}+\frac{2\text{ن}-1}{2}\text{بہ}\right)-\text{جب}\left(\text{عہ}-\frac{1}{2}\text{بہ}\right)\right\}$$

$$=\text{جم}\left(\text{عہ}+\frac{\text{ن}-1}{2}\text{بہ}\right)\text{جب}\,\frac{\text{ن بہ}}{2}\,\text{قم}\,\frac{\text{بہ}}{2}\text{،}\quad\dots(1)$$

(96

اسی طرح ہمیں حاصل ہوگا

جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ... + جب {عہ + (ن-۱) بہ}

= جب (عہ + $\frac{ن-۱}{۲}$ بہ) جب $\frac{ن بہ}{۲}$ قم $\frac{بہ}{۲}$، . . . (۲)

اس حاصل جمع کو (۱) میں عہ کی بجائے عہ + $\frac{۱}{۲}$ π درج کرکے حاصل کیا جاسکتا ہے

(۱) میں بہ کی بجائے بہ + π رکھو تو سلسلہ

جم عہ - جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) - ... + (-۱)$^{ن-۱}$ جم {عہ + (ن-۱) بہ}

کا حاصل جمع ہوگا

جم (عہ + $\frac{ن-۱}{۲}$ بہ) جم $\frac{ن بہ}{۲}$ قط $\frac{بہ}{۲}$، یا جب (عہ + $\frac{ن-۱}{۲}$ بہ) جب $\frac{ن بہ}{۲}$ قط $\frac{بہ}{۲}$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت۔

سلسلہ

جب عہ - جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) . . .

کا حاصل جمع، (۲) سے اسی طرح معلوم کیا جا سکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ

$\frac{جب\ ن\ عہ}{جب\ عہ}$ = ۲ {جم (ن-۱) عہ + جم (ن-۳) عہ + جم (ن-۵) عہ + ... }

نیز جم ن عہ \ جم عہ کے لیے اسی طرح کا جملہ معلوم کرو۔

(۲) جمع کرو سلسلہ

جم^{۲} عہ + جم^{۲} (عہ + بہ) + ... + جم^{۲} [عہ + (ن-۱) بہ]

چونکہ $\text{جم}^{۲}\text{عہ} = \frac{۱}{۲}(۱+\text{جم ۲ عہ})$، $\text{جم}^{۲}(\text{عہ}+\text{بہ}) = \frac{۱}{۲}\{۱+\text{جم ۲}(\text{عہ}+\text{بہ})\}$، . . .

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$$\frac{۱}{۲}\text{ن} + \frac{۱}{۲}\,\text{جم}\{۲\,\text{عہ} + (\text{ن}-۱)\,\text{بہ}\}\ \text{جب ن بہ قم بہ}$$

اسی طرح سلسلوں (۱) اور (۲) کی رقموں کی کسی ثبت صحیح عددی قوتوں کا مجموعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

(۳) جمع کرو سلسلہ $\text{قم ۲ عہ} + \text{قم ۲}^{۲}\text{عہ} + \dots + \text{قم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ}$

چونکہ $\text{قم ۲ عہ} = \text{ظم عہ} - \text{ظم ۲ عہ}$، $\text{قم ۲}^{۲}\text{عہ} = \text{ظم ۲ عہ} - \text{ظم ۲}^{۲}\text{عہ}$، . . .

$$\text{قم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ} = \text{ظم ۲}^{\text{ن}-۱}\text{عہ} - \text{ظم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ}$$

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے $\text{ظم عہ} - \text{ظم ۲}^{\text{ن}}\text{عہ}$

(۴) جمع کرو سلسلہ

$$\frac{\text{۳ جب لا} - \text{جب ۳ لا}}{\text{جم ۳ لا}} + \frac{\text{۳ جب ۳ لا} - \text{جب ۳}^{۲}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{۲}\text{لا}} + \dots + \frac{\text{۳ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا} - \text{جب ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}{\text{۳}^{\text{ن}-۱}\text{جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

چونکہ $\text{مس ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا} - \frac{۱}{۳}\text{مس ۳}^{\text{ن}}\text{لا}$

$$= \frac{\text{۳ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا} - \text{جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جب ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

$$= \frac{\text{۲ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا} - \text{جب ۲} \times \text{۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}} = \frac{\text{۲ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا}\,(\text{جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا} - \text{جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا})}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

$$= \frac{-\text{۸ جب}^{۲}\,\text{۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}} = -۲\,\frac{\text{۳ جب ۳}^{\text{ن}-۱}\text{لا} - \text{جب ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}{\text{۳ جم ۳}^{\text{ن}}\text{لا}}$$

(92)

اس لیے $\frac{\text{۳ جب لا - جب ۳ لا}}{\text{جم ۳ لا}} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳}\text{مس ۳ لا - مس لا}\right)$،

اس لیے $\frac{\text{۳ جب ۳ لا - جب }۳^۲\text{ لا}}{\text{۳ جم }۳^۲\text{ لا}} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^۲}\text{مس }۳^۲\text{ لا} - \frac{۱}{۳}\text{مس ۳ لا}\right)$،

$\frac{\text{۳ جب }۳^{ن-۱}\text{ لا - جب }۳^{ن}\text{ لا}}{۳^{ن-۱}\text{ جم }۳^{ن}\text{ لا}} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{ن}}\text{مس }۳^{ن}\text{ لا} - \frac{۱}{۳^{ن-۱}}\text{مس }۳^{ن-۱}\text{ لا}\right)$؛

اس لیے مطلوبہ حاصل جمع ہے

$$\frac{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۳^{ن}}\text{مس }۳^{ن}\text{ لا - مس لا}\right)$$

۷۵ ـــــ تشکلوں

$ع_۰\text{ جم عہ} + ع_۱\text{ جم (عہ + بہ)} + ع_۲\text{ جم (عہ + ۲ بہ)} + \dots + ع_{ن}\text{ جم }\{\text{عہ + (ن - ۱) بہ}\}$،

$ع_۰\text{ جب عہ} + ع_۱\text{ جب (عہ + بہ)} + ع_۲\text{ جب (عہ + ۲ بہ)} + \dots + ع_{ن}\text{ جب }\{\text{عہ + (ن - ۱) بہ}\}$

میں سے کسی شکل کے سلسلہ کا حاصل جمع معلوم کیا جا سکتا ہے اگر $ع_ر$، ر کا ایک منطق صحیح تفاعل ہو جس کا درجہ کوئی مثبت صحیح عدد س ہو۔

فرض کرو کہ $\text{سن} = ع_۰\text{ جم عہ} + ع_۱\text{ جم (عہ + بہ)} + ع_۲\text{ جم (عہ + ۲ بہ)} + \dots + ع_{ن}\text{ جم }\{\text{عہ + (ن - ۱) بہ}\}$

تب

$$\text{۲ جم }\frac{\text{بہ}}{۲}\times\text{سن} = ع_۰\left\{\text{جم}\left(\text{عہ} - \frac{\text{بہ}}{۲}\right) + \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{بہ}}{۲}\right)\right\} + ع_۱\left\{\text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{بہ}}{۲}\right) + \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{۳ بہ}}{۲}\right)\right\}$$

$$+ \dots + ع_ر\left\{\text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{۲ر - ۱}}{۲}\text{بہ}\right) + \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{۲ر + ۱}}{۲}\text{بہ}\right)\right\}$$

$$+ \dots + ع_{ن}\left\{\text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{۲ن - ۳}}{۲}\text{بہ}\right) + \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{۲ن - ۱}}{۲}\text{بہ}\right)\right\}$$

اس لیے

$$۲(۱-\text{جم}\,\text{بہ})\,\text{س} = (۲\text{ع}_۱ - \text{ع}_۲)\,\text{جم}\,\text{عہ} + (۲\text{ع}_۲ - \text{ع}_۱ - \text{ع}_۳)\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \cdots$$

$$+ (۲\text{ع}_\text{ر} - \text{ع}_{\text{ر}-۱} - \text{ع}_{\text{ر}+۱})\,\text{جم}(\text{عہ} + \overline{\text{ر}-۱}\,\text{بہ}) + \cdots$$

$$+ (۲\text{ع}_{\text{ن}-۱} - \text{ع}_{\text{ن}-۲} - \text{ع}_\text{ن})\,\text{جم}(\text{عہ} + \overline{\text{ن}-۲}\,\text{بہ})$$

$$+ (۲\text{ع}_\text{ن} - \text{ع}_{\text{ن}-۱})\,\text{جم}(\text{عہ} + \overline{\text{ن}-۱}\,\text{بہ}) - \text{ع}_۱\,\text{جم}(\text{عہ}-\text{بہ}) - \text{ع}_\text{ن}\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{ن}\,\text{بہ})$$

اب جملہ $۲\text{ع}_\text{ر} - \text{ع}_{\text{ر}-۱} - \text{ع}_{\text{ر}+۱}$ ایک منطق صحیح تفاعل ہے ر کا اور اس کا درجہ س - ۱ ہے، اس لیے پہلی رقم اور آخری تین رقموں کو چھوڑنے سے ہمیں ایک ہی قسم کا ایک سلسلہ ملتا ہے لیکن جس کے سر دیے ہوئے سلسلہ کے سروں سے نچلے درجہ کے ہیں۔ ہم پھر اس کو ۱ - جم بہ سے ضرب دیتے ہیں، اور اس طرح کا عمل س مرتبہ دہراتے ہیں؛ تب سلسلہ شکل (۱) میں تحویل ہوجائیگا۔

(93)

امثلہ

(۱) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم}\,\text{عہ} + ۲\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}) + ۳\,\text{جم}(\text{عہ}+۲\text{بہ}) + \cdots + \text{ن}\,\text{جم}\{\text{عہ}+(\text{ن}-۱)\text{بہ}\}$$

اس صورت میں $۲\text{ع}_\text{ر} - \text{ع}_{\text{ر}-۱} - \text{ع}_{\text{ر}+۱} = ۰$، $۲\text{ع}_۱ - \text{ع}_۲ = ۰$، اس لیے

$$۲(۱-\text{جم}\,\text{بہ})\,\text{س} = (\text{ن}+۱)\,\text{جم}\{\text{عہ}+(\text{ن}-۱)\text{بہ}\} - \text{جم}(\text{عہ}-\text{بہ}) - \text{ن}\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{ن}\,\text{بہ})،$$

یا

$$\text{س} = \frac{\frac{۱}{۲}(\text{ن}+۱)\,\text{جم}\{\text{عہ}+(\text{ن}-۱)\text{بہ}\}}{۱-\text{جم}\,\text{بہ}} - \frac{\frac{۱}{۲}\,\text{جم}(\text{عہ}-\text{بہ})}{۱-\text{جم}\,\text{بہ}} - \frac{۱}{۲}\text{ن}\,\frac{\text{جم}(\text{عہ}+\text{ن}\,\text{بہ})}{۱-\text{جم}\,\text{بہ}}$$

(۲) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم عہ} + 2^2\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}) + 3^2\,\text{جم}(\text{عہ}+2\text{بہ}) + \cdots + \text{ن}^2\,\text{جم}\{\text{عہ}+(\text{ن}-1)\text{بہ}\}$$

یہ سلسلہ پچھلی مثال کے سلسلہ میں تحویل ہو جائیگا اگر اس کو (۱-جم بہ) سے ضرب دیا جائے۔

۷۶ — سلسلے

$$\text{جم عہ} + \text{لا}\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \text{لا}^2\,\text{جم}(\text{عہ}+2\text{بہ}) + \cdots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جم}[\text{عہ}+(\text{ن}-1)\text{بہ}]،$$

$$\text{جیب عہ} + \text{لا}\,\text{جیب}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \text{لا}^2\,\text{جیب}(\text{عہ}+2\text{بہ}) + \cdots + \text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{جیب}[\text{عہ}+(\text{ن}-1)\text{بہ}]،$$

متوالی سلسلے ہیں جن کے ربط کا پیمانہ (scale of relation) $1 - 2\,\text{لا}\,\text{جم بہ} + \text{لا}^2$ ہے کیونکہ

$$\text{جم}(\text{عہ}+\text{ر بہ}) + \text{جم}(\text{عہ}+\overline{\text{ر}-2}\,\text{بہ}) = 2\,\text{جم بہ}\,\text{جم}(\text{عہ}+\overline{\text{ر}-1}\,\text{بہ})،$$

اور
$$\text{جیب}(\text{عہ}+\text{ر بہ}) + \text{جیب}(\text{عہ}+\overline{\text{ر}-2}\,\text{بہ}) = 2\,\text{جم بہ}\,\text{جیب}(\text{عہ}+\overline{\text{ر}-1}\,\text{بہ})$$

اس لیے اِن کو متوالی سلسلوں کے جمع کرنے کے معمولی قاعدہ سے جمع کیا جاسکتا ہے۔ اگر س سے پہلے سلسلہ کا حاصل جمع تعبیر ہو تو

$$\text{س}\,(1 - 2\,\text{لا}\,\text{جم بہ} + \text{لا}^2)$$
$$= \text{جم عہ} - \text{لا}\,\text{جم}(\text{عہ}-\text{بہ}) - \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{ن بہ}) + \text{لا}^{\text{ن}+1}\,\text{جم}\{\text{عہ}+(\text{ن}-1)\,\text{بہ}$$

اگر لا $<$ ۱ تو ن کو لا انتہا بڑا کرنے سے لاتناہی سلسلہ

$$\text{جم عہ} + \text{لا}\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{بہ}) + \text{لا}^2\,\text{جم}(\text{عہ}+2\text{بہ}) + \cdots$$

کے حاصل جمع کی انتہائی قیمت حسب ذیل حاصل ہوتی ہے

$$\frac{\text{جم عہ} - \text{لا}\,\text{جم}(\text{عہ}-\text{بہ})}{1 - 2\,\text{لا}\,\text{جم بہ} + \text{لا}^2}$$

رکھو عہ = ۰ تو

$$\frac{۱ - لا\ جم\ بہ}{۱ - ۲\ لا\ جم\ بہ + لا^{۲}} = ۱ + لا\ جم\ بہ + لا^{۲}\ جم\ ۲\ بہ + \ldots \infty\ تک$$

اس لیے نیز

$$\frac{۱ - لا^{۲}}{۱ - ۲\ لا\ جم\ بہ + لا^{۲}} = ۱ + ۲\ لا\ جم\ بہ + ۲\ لا^{۲}\ جم\ ۲\ بہ + \ldots \infty\ تک، \ldots (۳)$$

۷۷ — بعض صورتوں میں سلسلہ کا مجموعہ ایک شکل کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ ہم تمثیلاً دفعہ ۷۴ کے سلسلوں (۱) اور (۲) کو لینگے۔

(94) فرض کرو کہ و $ا_{۱}$، $ا_{۱} ا_{۲}$، $ا_{۲} ا_{۳}$، ....، $ا_{ن-۱} ا_{ن}$ ایک دائرے کے مساوی وتر ہیں، اور فرض کرو کہ و $ا_{۱}$ ممدودہ اور $ا_{۱} ا_{۲}$ کے درمیان زاویہ بہ ہے جہاں و دائرہ کا مرکز ہے، خط مستقیم و لا کھینچو ایسا کہ $ا_{۱}$ و لا = عہ،

تب و $ا_{۱}$، $ا_{۱} ا_{۲}$، ...، $ا_{ن-۱} ا_{ن}$ کے میلان و لا کے ساتھ علی الترتیب یہ ہیں

عہ، عہ + بہ، عہ + ۲ بہ، ...، عہ + (ن - ۱) بہ

اور و $ا_{ن}$ کا میلان عہ + $\frac{۱}{۲}$ (ن - ۱) بہ ہے؛ نیز اگر دائرہ کا قطر ق ہو تو

$$و\ ا_{۱} = ق\ جب\ \tfrac{۱}{۲}\ بہ،\quad و\ ا_{ن} = ق\ جب\ \tfrac{۱}{۲}\ ن\ بہ$$

اب و لا پر و $ا_{۱}$، $ا_{۱} ا_{۲}$، ... $ا_{ن-۱} ا_{ن}$ کے ظلوں کا مجموعہ ہے

$$و\ ا_{۱}\ جم\ (عہ) + ا_{۱} ا_{۲}\ جم\ (عہ + بہ) + \ldots + ا_{ن-۱} ا_{ن}\ جم \{عہ + (ن-۱)\ بہ\}،$$

یا $$ق\ جب\ \tfrac{۱}{۲}\ بہ\ [جم\ عہ + جم\ (عہ + بہ) + \ldots + جم \{عہ + (ن - ۱)\ بہ\}]$$

اور یہ مجموعہ، و $ا_{ن}$ کے ظل کے مساوی ہونا چاہیے۔ جو یہ ہے

$$و\ ا_{ن}\ جم \{عہ + \tfrac{۱}{۲} (ن - ۱)\ بہ\}$$

یا ق جب $\frac{1}{2}$ ن بہ جم {عہ + $\frac{1}{2}$ (ن ـ ۱) بہ }

اس لیے

جم عہ + جم (عہ + بہ) + ... + جم {عہ + (ن ـ ۱) بہ }

= جم {عہ + $\frac{1}{2}$ (ن ـ ۱) بہ } جب $\frac{1}{2}$ ن بہ قم $\frac{1}{2}$ بہ

اگر ہم و لا کے عمود دار خط مستقیم پر ظل لیں تو جیوب کے سلسلہ کا حاصل جمع ملیگا۔

امثلہ

(۱) ایک دائرہ کا قطر و ا ہے، اس کے محیط پر و، ف، ق، ... نقطے ہیں ایسے کہ زاویوں ف ا و، ق ا ف، ر ا ق، ... میں سے ہر ایک عہ ہے: ا ف، ا ق، ا ر، ... و پر کے مماس سے ف، ق، ر پر ملتے ہیں۔ اس شکل کے ذریعہ سلسلہ قطم عہ قط (م + ۱) عہ + قط (م + ۱) عہ قط (م + ۲) عہ + ... ن رقموں تک کا مجموعہ معلوم کرو۔

(۲) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ اگر عہ، بہ، جہ، ... کہ، زاویوں کی کوئی تعداد ہو تو

قط عہ قط (عہ + بہ) جب بہ + قط (عہ + بہ) قط (عہ + بہ + جہ) جب جہ

+ قط (عہ + بہ + جہ) قط (عہ + بہ + جہ + ضہ) جب ضہ + ...

= قط عہ قط (عہ + بہ + جہ + ... + کہ) جب (بہ + جہ + ... + کہ)

چھٹے باب پر مثالیں

(۱) مساواتوں جم^{3} طہ + ا جم طہ = ب، جب^{3} طہ + ا جب طہ = ج

سے طہ ساقط کرو۔

(۲) مساواتوں (ا + ب) مس (طہ - فہ) = (ا - ب) مس (طہ + فہ)،

ا. جم ۲ فہ + ب. جم ۲ طہ = ج

سے طہ ساقط کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ

(95)

(ا جب فہ + ب جم فہ) (ا جب پہ + ب. جم پہ) جب (فہ - پہ)

+ (ا جب پہ + ب. جم پہ) (ا جب طہ + ب جم طہ) جب (پہ - طہ)

+ (ا جب طہ + ب جم طہ) (ا جب فہ + ب جم فہ) جب (طہ - فہ)

+ (ا² + ب²) جب (فہ - پہ) جب (پہ - طہ) جب (طہ - فہ) = ۰ ؛

اور اس مساوات کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۴) مساوات جم² طہ - جم² عہ = ۲ جم³ طہ (جم طہ - جم عہ) - ۲ جب³ طہ (جب طہ - جب عہ)

کو سادہ ترین شکل میں تحویل کرو اور اس کو حل کرو۔

(۵) ثابت کرو کہ تین حادہ زاویوں ا، ب، ج کا مجموعہ ۹۰° سے کم ہے جبکہ یہ زاویے رشتہ جم² ا + جم² ب + جم² ج = ا کو پورا کرتے ہوں۔

(۶) اگر ا + ب + ج = ۹۰° تو ثابت کرو کہ مس² ا + مس² ب + مس² ج کی کم سے کم قیمت ایک ہے۔

(۷) مساواتوں

جب طہ + جب فہ + جب عہ = جم طہ + جم فہ + جم عہ
طہ + فہ = ۲ عہ

سے طہ اور فہ معلوم کرو۔

(۸) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

۸ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج ≯ ۱

(۹) اگر

$$\frac{\text{لا جب ط} + \text{ما جب ف} + \text{ی جب پ}}{\text{لا جم ط} + \text{ما جم ف} + \text{ی جم پ}} = \frac{\text{۴ جب ط جب ف جب پ} + \text{جب}(\text{ط}+\text{ف}+\text{پ})}{\text{۴ جم ط جم ف جم پ} - \text{جم}(\text{ط}+\text{ف}+\text{پ})}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا جب}\tfrac{1}{2}(\text{ف}+\text{پ}-\text{ط}) + \text{ما جب}\tfrac{1}{2}(\text{پ}+\text{ط}-\text{ف}) + \text{ی جب}\tfrac{1}{2}(\text{ط}+\text{ف}-\text{پ})}{\text{لا جم}\tfrac{1}{2}(\text{ف}+\text{پ}-\text{ط}) + \text{ما جم}\tfrac{1}{2}(\text{پ}+\text{ط}-\text{ف}) + \text{ی جم}\tfrac{1}{2}(\text{ط}+\text{ف}-\text{پ})}$$

$$= \frac{\text{۴ جب}\tfrac{1}{2}(\text{ف}+\text{پ}-\text{ط})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{پ}+\text{ط}-\text{ف})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ط}+\text{ف}-\text{پ}) + \text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ط}+\text{ف}+\text{پ})}{\text{۴ جم}\tfrac{1}{2}(\text{ف}+\text{پ}-\text{ط})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{پ}+\text{ط}-\text{ف})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ط}+\text{ف}-\text{پ}) - \text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ط}+\text{ف}+\text{پ})}$$

(۱۰) ثابت کرو کہ

$$\frac{\Sigma\,\text{جب ۳ع جب}(\text{ب}-\text{ج})}{\Sigma\,\text{جب ۲}(\text{ج}-\text{ب})} = \text{جب}(\text{ع}+\text{ب}+\text{ج})$$

اور عام صورت میں جبکہ ن کوئی طاق عدد ہو

$$\frac{\Sigma\,\text{جب ن ع جب}(\text{ب}-\text{ج})}{\Sigma\,\text{جب ۲}(\text{ج}-\text{ب})} = \Sigma\left\{\text{جب}(\text{ف ع}+\text{ق ب}+\text{ر ج})\right\}$$

جہاں ف، ق، ر کوئی طاق اعداد ہیں جن کا مجموعہ ن ہے۔

(۱۱) اگر

$$\text{ا}^{2}\,\text{جم ع جم ب} + \text{ا}\,(\text{جب ع} + \text{جب ب}) + 1 = 0،$$

$$\text{ا}^{2}\,\text{جم ع جم ج} + \text{ا}\,(\text{جب ع} + \text{جب ج}) + 1 = 0،$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{2}\,\text{جم ب جم ج} + \text{ا}\,(\text{جب ب} + \text{جب ج}) + 1 = 0،$$

جہاں ب، ج کم ہیں π سے۔

(96)

(۱۲) اگر ط کی دو قیمتیں ط_1، ط_2 ہوں جو مساوات

$$\text{۱} + \frac{\text{جم ط جم فہ}}{\text{جم}^2\text{ عہ}} + \frac{\text{جب ط جب فہ}}{\text{جب}^2\text{ عہ}} = \text{۰}$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ اس مساوات میں اگر ط، فہ کی بجائے ط_1 اور ط_2 درج کئے جائیں تو وہ مساوات کو پورا کرینگے۔

(۱۳) اگر

ا جم عہ جم بہ + ب جب عہ جب بہ = ج، ا جم بہ جم جہ + ب جب بہ جب جہ = ج،

ا جم جہ جم ضہ + ب جب جہ جب ضہ = ج، ا جم ضہ جم صہ + ب جب ضہ جب صہ = ج

اور ا جم صہ جم عہ + ب جب صہ جب عہ = ج

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{۱}}{\text{ا}^2} + \frac{\text{۱}}{\text{ب}^2} + \frac{\text{۱}}{\text{ج}^2} = \left(\frac{\text{۱}}{\text{ب}} + \frac{\text{۱}}{\text{ج}}\right)\left(\frac{\text{۱}}{\text{ج}} + \frac{\text{۱}}{\text{ا}}\right)\left(\frac{\text{۱}}{\text{ا}} + \frac{\text{۱}}{\text{ب}}\right)$$

جہاں زاویے سب کے سب غیر مساوی، اور صفر اور ۲ π کے درمیان ہیں۔

(۱۴) اگر

جب (ط + عہ) = جب (فہ + عہ) = جب بہ

اور ا جب (ط + فہ) + ب جب (ط - فہ) = ج

تو ثابت کرو کہ یا

ا جب (۲ عہ ± ۲ بہ) = - ج، یا ا جب ۲ عہ ∓ ب جب ۲ بہ = ج

(۱۵) اگر مساوات $\text{جب}^{\text{۲ن+۲}}\text{ ط} \diagdown \text{جب}^{\text{۲ن}}\text{ عہ} + \text{جم}^{\text{۲ن+۲}}\text{ ط} \diagdown \text{جم}^{\text{۲ن}}\text{ عہ} = \text{۱}$

درست رہے جبکہ ن = ا تو ثابت کرو کہ وہ درست رہیگی جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو۔

(۱۶) مساواتوں

۴ (جم عہ جم طہ + جم فہ) (جم عہ جب طہ + جب فہ)

= ۴ (جم عہ جم طہ + جم پہ) (جم عہ جب طہ + جب پہ) = (جم فہ - جم پہ) (جب فہ - جب پہ)

سے طہ ساقط کرو، اور ثابت کرو کہ جم (فہ - پہ) = ۱، یا جم ۲ عہ

(۱۷) اگر مس ما / مس بہ = جب (لا - عہ) / جب عہ ، اور مس ما / مس ۲ بہ = جب (لا - ۲ عہ) / جب ۲ عہ

تو ثابت کرو کہ مس ما / جب ۲ بہ = جب لا / جب ۲ عہ = جم لا / (جم ۲ عہ - جم ۲ بہ)

(۱۸) اگر عہ، بہ، جہ، غیر مساوی ہوں اور ہر ایک π سے کم تو ثابت کرو کہ مساواتوں کا نظام

جب (۲ عہ - بہ - جہ) / جم (۲ عہ + بہ + جہ) = جب (۲ بہ - جہ - عہ) / جم (۲ بہ + جہ + عہ) = جب (۲ جہ - عہ - بہ) / جم (۲ جہ + عہ + بہ)

ایک واحد مساوات

جم ۲ (بہ + جہ) + جم ۲ (جہ + عہ) + جم ۲ (عہ + بہ) = ۰

کے مماثل ہے۔

(۱۹) اگر　لا = ۲ جم (بہ - جہ) + جم (طہ + عہ) + جم (طہ - عہ)

= ۲ جم (جہ - عہ) + جم (طہ + بہ) + جم (طہ - بہ)

= - ۲ جم (عہ - بہ) - جم (طہ + جہ) - جم (طہ - جہ)

تو ثابت کرو کہ لا = جب^۲ طہ اگر زاویوں عہ، بہ، جہ میں سے کسی دو کا فرق نہ معدوم ہو اور نہ π کے کسی ضِعف کے مساوی ہو۔

(۲۰) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° اور اگر

Σ جب (۲ن + ۱) ا جب (ب − ج) = ۰

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے تو ثابت کرو کہ

Σ جب (ن − ۱) ا جب (ن + ۱) (ب − ج) = ۰

(۹۷)

(۲۱) اگر مم $\frac{1}{2}$(عہ + بہ) (جم جہ − جم ضہ) + مم $\frac{1}{2}$(عہ + جہ) (جم ضہ − جم بہ)

+ مم $\frac{1}{2}$ (عہ + ضہ) (جم بہ − جم جہ) = ۰

اور کوئی دو زاویے مساوی نہ ہوں، یا کسی دو زاویوں میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

مم $\frac{1}{2}$(بہ + عہ) (جم جہ − جم ضہ) + مم $\frac{1}{2}$ (بہ + جہ) (جم ضہ − جم عہ)

+ مم $\frac{1}{2}$ (بہ + ضہ) (جم عہ − جم جہ) = ۰

$$\frac{\text{جب (عہ + طہ)}}{\text{جب (عہ + فہ)}} + \frac{\text{جب (بہ + طہ)}}{\text{جب (بہ + فہ)}} = \frac{\text{جم (عہ + طہ)}}{\text{جم (عہ + فہ)}} + \frac{\text{جم (بہ + طہ)}}{\text{جم (بہ + فہ)}} = ۲$$ (۲۲) اگر

تو ثابت کرو کہ یا تو عہ اور بہ میں $\frac{1}{2}\pi$ کے طاق ضعف کا فرق ہے، یا طہ اور فہ میں π کے جفت ضعف کا فرق ہے۔

(۲۳) اگر ا جم (فہ + پہ) + ب جم (فہ − پہ) + ج = ۰،

ا جم (پہ + طہ) + ب جم (پہ − طہ) + ج = ۰،

ا جم (طہ + فہ) + ب جم (طہ − فہ) + ج = ۰،

اور اگر طہ، پہ، فہ سب غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ا^2 − ب^2 + ۲ب ج = ۰

$$\frac{\text{جم (عہ + بہ + طہ)}}{\text{جب (عہ + بہ) جم}^2\text{ جہ}} = \frac{\text{جم (جہ + عہ + طہ)}}{\text{جم (جہ + عہ) جم}^2\text{ بہ}}$$ (۲۴) اگر

اور ب، جہ غیر مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات بالا کا ہر رکن

$$= \frac{\text{جم}\,(\text{ب} + \text{جہ} + \text{ط})}{\text{جب}\,(\text{ب} - \text{جہ})\,\text{جم}^2\,\text{ط}}$$

اور

$$\text{نم ط} = \frac{\text{جب}\,(\text{ب}+\text{جہ})\,\text{جب}\,(\text{جہ}+\text{عہ})\,\text{جب}\,(\text{عہ}+\text{ب})}{\text{جم}\,(\text{ب}+\text{جہ}).\,\text{جم}\,(\text{جہ}+\text{عہ}).\,\text{جم}\,(\text{عہ}+\text{ب}) + \text{جب}^2\,(\text{عہ}+\text{ب}+\text{جہ})}$$

(۲۵) اگر ا، ب، ج مثبت زاویے ہوں جن کا مجموعہ ۱۸۰° ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ا} + \text{جم ب} + \text{جم ج} > ۱ \quad \text{اور} \quad \ngtr \frac{۳}{۲}$$

(۲۶) حل کرو مساوات

$$۶۴\,\text{جب}^7\,\text{ط} + \text{جب}\,۷\,\text{ط} = ۰$$

(۲۷) اگر ۲س = لا + ما + ی تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,(\text{س} - \text{لا}) + \text{مس}\,(\text{س} - \text{ما}) + \text{مس}\,(\text{س} - \text{ی}) - \text{مس س}$$

$$= \frac{۴\,\text{جب لا جب ما جب ی}}{۱ - \text{جم}^2\,\text{لا} - \text{جم}^2\,\text{ما} - \text{جم}^2\,\text{ی} - ۲\,\text{جم لا جم ما جم ی}},$$

نیز

$$\text{مس}^{-1}\,(\text{س} - \text{لا}) + \text{مس}^{-1}\,(\text{س} - \text{ما}) + \text{مس}^{-1}\,(\text{س} - \text{ی}) - \text{مس}^{-1}\,\text{س}$$

$$= \text{مس}^{-1}\,\frac{۱۶\,\text{لا ما ی}}{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 + ۴)^2 - ۴\,(\text{ما}^2\,\text{ی}^2 + \text{ی}^2\,\text{لا}^2 + \text{لا}^2\,\text{ما}^2)}$$

(۲۸) اگر

$$\frac{\text{جم ط}}{\text{جم عہ}} + \frac{\text{جب ط}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{جم فہ}}{\text{جم عہ}} + \frac{\text{جب فہ}}{\text{جب عہ}} = ۱$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ط جم فہ}}{\text{جم}^2\,\text{عہ}} + \frac{\text{جب ط جب فہ}}{\text{جب}^2\,\text{عہ}} + ۱ = ۰$$

(۲۹) اگر $\text{۲ جب عہ جم (ط + فہ)} = \text{۲ جم (ط - فہ)} + \text{جم}^{2}\text{ عہ}$ ،

اور $\text{۲ جب عہ جم (ط + پہ)} = \text{۲ جم (پہ - ط)} + \text{جم}^{2}\text{ عہ}$ ،

تو ثابت کرو کہ $\text{۲ جب عہ جم (فہ + پہ)} = \text{۲ جم (فہ - پہ)} + \text{جم}^{2}\text{ عہ}$

(۳۰) اگر $\text{جم (ما - ی)} + \text{جم (ی - لا)} + \text{جم (لا - ما)} = -\frac{۳}{۲}$

تو ط کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^{3}\text{(لا + ط)} + \text{جم}^{3}\text{(ما + ط)} + \text{جم}^{3}\text{(ی + ط)} - \text{۳ جم(لا + ط) جم(ما + ط) جم(ی + ط)} = ۰$$

(۳۱) اگر

$$\frac{\text{جب ر ا}}{\text{ل}} = \frac{\text{جب (ر + ۱) ا}}{\text{م}} = \frac{\text{جب (ر + ۲) ا}}{\text{ن}}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ر ا}}{\text{۲ م}^{2}\text{ - ل (ل + ن)}} = \frac{\text{جم (ر + ۱) ا}}{\text{م (ن - ل)}} = \frac{\text{جم (ر + ۲) ا}}{\text{ن (ل + ن) - ۲ م}^{2}}$$

(۳۲) ثابت کرو کہ مساواتیں

$$\left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)\text{ جب عہ} = \frac{\text{ما}}{\text{ی}} + \frac{\text{ی}}{\text{ما}} + \text{جم}^{2}\text{ عہ} ،$$

$$\left(\text{ما} + \frac{۱}{\text{ما}}\right)\text{ جب عہ} = \frac{\text{ی}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ی}} + \text{جم}^{2}\text{ عہ} ،$$

$$\left(\text{ی} + \frac{۱}{\text{ی}}\right)\text{ جب عہ} = \frac{\text{لا}}{\text{ما}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} + \text{جم}^{2}\text{ عہ}$$

غیر تابع نہیں ہیں اور وہ

$$\text{لا + ما + ی} = \frac{۱}{\text{لا}} + \frac{۱}{\text{ما}} + \frac{۱}{\text{ی}} = -\text{ جب عہ}$$

کے مماثل ہیں ۔

۳۳ ۔ ثابت کرو کہ جملہ

۲ جم (بہ - جہ) جم (ط + بہ) جم (ط + جہ) + ۲ جم (جہ - عہ) جم (ط + جہ) جم (ط + جہ)

+ ۲ جم (عہ - بہ) جم (ط + عہ) جم (ط + بہ) - جم ۲ (ط + عہ) - جم ۲ (ط + بہ) - جم ۲ (ط + جہ) - ۱

ط پر منحصر نہیں ہے، اس کی قیمت جیوب التمام کے حاصل ضرب کے طور پر ظاہر کرو۔

(۳۴) اگر مساوات

مس (ط + ۱/۴ π) = ۳ مس ۳ ط

کے چار حل عہ، بہ، جہ، ضہ ہوں اور ان میں سے کسی دو کے مماس مساوی نہ ہوں تو ثابت کرو کہ

مس عہ + مس بہ + مس جہ + مس ضہ = ۰،

مس ۲ عہ + مس ۲ بہ + مس ۲ جہ + مس ۲ ضہ = ۴/۳

(۳۵) اگر ۴ مس (ر + لا) = ۳ مس (ر + لا) = ۲ مس (ر + ی)

تو ثابت کرو کہ ۳ جب۲ (لا - ما) + ۵ جب۲ (ما - ی) - ۲ جب۲ (ی - لا) = ۰

(۳۶) حل کرو مساواتیں

جب⁻¹ لا - جب⁻¹ ما = ۲/۳ π
جم⁻¹ لا - جم⁻¹ ما = ۱/۳ π

(۳۷) ثابت کرو کہ مسلسل کسر

۱/(۲ مس عہ +) ۱/(۲ مس عہ +) ۱/(۲ مس عہ) ......

کا ن واں مستدق ہے

[(مس عہ + قط عہ)^ن - (مس عہ - قط عہ)^ن] / [(مس عہ + قط عہ)^(ن+۱) - (مس عہ - قط عہ)^(ن+۱)]

(۳۸) مساواتوں

۳ ل جم ط + ل جم ۳ ط = ۴ لا
۳ ل جب ط - ل جب ۳ ط = ۴ ما

سے ط ساقط کرو۔

(93)

(۳۹) اگر

$$\frac{\text{مس}(ط-عہ)}{ف} = \frac{\text{مس}(فہ-عہ)}{ق} = \frac{\text{مس}(یہ-عہ)}{ر}$$

تو ثابت کرو کہ

ف(ق-ر)^2 جم(فہ-یہ) + ق(ر-ف)^2 جم(یہ-ط) + ر(ف-ق)^2 جم(ط-فہ) = ۰

(۴۰) $\frac{1}{\text{۱ + ا جم ط + ب جب ط}}$ کو اس شکل

$\frac{1}{2}$ + ا$_1$ جم (ط-عہ) + ا$_2$ جم ۲(ط-عہ) + ...

کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(۴۱) مساوات　مس ۳ط - مس ۲ط - مس ط = ۰ کو حل کرو۔

(۴۲) اگر

جم^3 لا + جم^3 ما = جم ۳عہ، جب^3 لا + جب^3 ما = جب ۳عہ اور لا + ما = ۲یہ

تو ثابت کرو کہ

۴ جب^2 ۳(عہ + یہ) = ۲۷ جب ۲یہ جب^2 ۴یہ جم(۳عہ + یہ)

(۴۳) اگر　ا جم فہ جم یہ + ب جب فہ جب یہ = ج،

ا جم یہ جم ط + ب جب یہ جب ط = ج،

ا جم ط جم فہ + ب جب ط جب فہ = ج

تو ثابت کرو کہ　ب ج + ج ا + ا ب = ۰، اِلّا آنکہ ا = ب = ج

(۴۴) حل کرو مساوات

جم$^{-1}$(لا + $\frac{1}{2}$) + جم$^{-1}$ لا + جم$^{-1}$(لا - $\frac{1}{2}$) = $\frac{3}{2}\pi$

(۴۵) مساواتوں

ا جب فہ + ب² لا جم فہ + ا ب (ا² جب² فہ + ب) جم² فہ = ۰،

ا لا قط فہ − ب ما قم فہ = ا² − ب²

سے فہ ساقط کرو۔

(۴۶) حل کرو مساوات

جم ۵ ط + ۵ جم ۳ ط + ۱۰ جم ط = $\frac{1}{2}$

(۴۷) مساواتوں

ا جم ط جم ۲ ط = ۲ (ا جم ط − لا)،

ا جب ط جب ۲ ط = ۲ (ا جب ط − ما)

سے ط ساقط کرو۔

(۴۸) ثابت کرو کہ مساوات ۳ لا + ما = ن (جہاں ن صحیح عدد ہے)
کے حل ثبت صحیح اعداد میں (بشمول صفر) معلوم کیے جائیں تو ان کی تعداد ہے

$$\frac{1}{3}\left[\text{ن} + 2 + (-1)^{\text{ن}} + \frac{\text{جم } \frac{1}{3}(2\text{ن}+1)\pi}{\text{جم } \frac{1}{3}\pi}\right]$$

(۴۹) حل کرو مساوات

۶ جم ۳ ط − جب ۳ ط − ۱۰ جم ۲ ط + ۵ جب ۲ ط + ۲۲ جم ط − ۵ جب ط = ۱۰

(۵۰)

$$\frac{\text{قم}^2\text{ ط} - \text{س}^2\text{ ط}}{\text{قم}^2\text{ ط} + \text{س}^2\text{ ط} - 1}$$

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو۔

(100) (۵۱) ثابت کرو کہ کسر مسلسل

$$\frac{\text{جب ر عہ}}{\text{۲ جب (ر+۱) عہ . جم عہ}} = \frac{\text{قط}^2\text{ عہ}}{4}\,-\,\frac{\text{قط}^2\text{ عہ}}{4}\,-\,\frac{\text{قط}^2\text{ عہ}}{4}\,-\,\ldots\ldots$$

ر خارج قسمتوں تک

(۵۰) مساواتوں

ا جب (ط - عہ) + ب جب (ط + عہ) = لا جب (فہ + بہ) + ما جب (فہ - بہ)،

ا جم (ط - عہ) - ب جم (ط + عہ) = لا جم (فہ + بہ) - ما جم (فہ - بہ)

ط ± فہ = جہ

سے ط، فہ ساقط کرو۔

(۵۱) ثابت کرو کہ

Σ جم عہ (جم ۳ بہ - جم ۳ جہ)

= ۴ (جم بہ - جم جہ) (جم جہ - جم عہ) (جم عہ - جم بہ) (جم عہ + جم بہ + جم جہ)

(۵۲) اگر ا جم عہ + ب جم بہ + ج جم جہ = ۰،

ا جب عہ + ب جب بہ + ج جب جہ = ۰،

ا قط عہ + ب قط بہ + ج قط جہ = ۰

تو ثابت کرو کہ بالعموم ± ا ± ب ± ج = ۰

(۵۳) مساواتوں

جب ۳ ($\frac{1}{4}\pi$ + ط) + ۳ جب ($\frac{1}{4}\pi$ + ط) = ۲ ا،

جب ۳ ($\frac{1}{4}\pi$ - ط) + ۳ جب ($\frac{1}{4}\pi$ - ط) = ۲ ب

سے ط ساقط کرو۔

(۵۴) اگر مساوات مس (ط + عہ) = ک مس ۲ ط

کو پورا کرنیوالی ط کی قیمتیں ط۱، ط۲، ط۳ ہوں اور ان میں سے کسی دو میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو ثابت کرو کہ

ط۱ + ط۲ + ط۳ + عہ

π کا ایک ضعف ہے۔

(۵۷) ثابت کرو کہ

Σ (جم ۳ ا) / (جب ا جب (ا - ب) جب (ا - ج)) = ۸ جب (ا + ب + ج) + قم ا قم ب قم ج

(۵۸) ثابت کرو کہ

۲ {جب³ (ط - عہ) جم ۲ (عہ - فہ) جب (بہ - جہ) + جب³ (ط - بہ) جم ۲ (بہ - فہ) جب (جہ - عہ)
+ جب³ (ط - جہ) جم ۲ (جہ - فہ) جب (عہ - بہ) }

= {جب ۲ عہ + جب ۲ بہ + جب ۲ جہ - ۳ جب ۲ ط} جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

جہاں　فہ = ۱/۲ (عہ + بہ + جہ - ۳ ط)

(۵۹) اگر　ا + ب + ج + د = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

(س - جب ا) (س - جب ب) (س - جب ج) (س - جب د)

= ۱/۴ (جب ا جب ب + جب ج جب د) (جب ب جب ج + جب ا جب د)
(جب ج جب ا + جب ب جب د)

جہاں　۲ س = جب ا + جب ب + جب ج + جب د

(۶۰) ثابت کرو کہ سلسلہ

جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ...

کی ن رقموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ جبکہ ان میں سے دو دو کو لیکر ضرب دیا جائے یہ ہے

۱/۴ قم² ۱/۲ بہ قط ۱/۲ بہ جب ۱/۲ ن بہ [جب ۱/۲ ن بہ جم ۱/۲ بہ + جب ۱/۲ (ن - ۱) بہ
× جم {۲ عہ + (ن - ۱) بہ} - ۱/۲ ن]

(۶۱) اگر　(جم ط + جب ط) / (۲ + جم ۲ ط + جب ۲ ط) = ۴ (جم ط - جب ط) (جم ۲ ط - جب ۲ ط) / (۴ (جم ۲ ط - جب ۲ ط)² - (جم ط - جب ط)²)

تو ثابت کرو کہ ط کی تین قیمتیں ہونگی ایسی کہ

مس ط₁ + مس ط₂ + مس ط₃ = ۹

(101)

(۶۲) اگر مس ۲ط مس ط = مس ۲ فہ ـ مس فہ = مس ۲ بہ ـ مس بہ
تو ثابت کرو کہ ط + فہ + بہ، ۱/۲ π کا ایک طاق ضعف ہے بشرطیکہ مس ط، مس فہ، مس بہ سب غیر مساوی ہوں۔

(۶۳) اگر لا جم عہ + ما جب عہ + ی + جم ۲ عہ = ۰،
لا جم بہ + ما جب بہ + ی + جم ۲ بہ = ۰،
لا جم جہ + ما جب جہ + ی + جم ۲ جہ = ۰،
تو ثابت کرو کہ

لا جم فہ + ما جب فہ + ی + جم ۲ فہ
= ۸ جب ۱/۲ (عہ + بہ + جہ + فہ) جب ۱/۲ (فہ ـ عہ) جب ۱/۲ (فہ ـ بہ) جب ۱/۲ (فہ ـ جہ)

(۶۴) مساواتوں

مس ط + مس فہ = ا،
قط ط + قط فہ = ب،
قم ط + قم فہ = ج

سے ط اور فہ ساقط کرو اور ثابت کرو کہ اگر ب اور ج ہم علامت ہوں تو

ب ج > ۲ ا

(۶۵) ثابت کرو کہ مساواتوں

جم (ط ـ ۳ عہ) / جم³ عہ = جم (ط ـ ۳ بہ) / جم³ بہ = جم (ط ـ ۳ جہ) / جم³ جہ

سے ط کو ساقط کیا جائے تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے

جب (بہ ـ جہ) جب (جہ ـ عہ) جب (عہ ـ بہ) {جم (عہ + بہ + جہ) ـ ۴ جم عہ جم بہ جم جہ} = ۰

(۶۶) اگر (۱ ـ لا + لا²)⁻¹ کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ لاⁿ کا سر

جب ۱/۳ (ن + ۱) π \ جب ۱/۳ π ہے۔

(۶۷) ثابت کرو کہ Σ جم ۴ عہ جب (بہ + جہ) جب (بہ ـ جہ)
= ـ ۸ جب (بہ ـ جہ) جب (جہ ـ عہ) جب (عہ ـ بہ) جب (بہ + جہ) جب (جہ + عہ) جب (عہ + بہ)

(۶۸) ثابت کرو کہ

∑ جم ۲ (بہ + جہ − عہ) جب (بہ − جہ) جم عہ

= ۸ جب (بہ − جہ) جب (جہ − عہ) جب (عہ − بہ) جم عہ جم بہ جم جہ

(۶۹) اگر ا جب ط + ب جم ط = ا قم ط + ب قط ط

تو ثابت کرو کہ مساوات کا ہر رکن

$= (ا^{\frac{۲}{۳}} - ب^{\frac{۲}{۳}}) (ا^{\frac{۲}{۳}} + ب^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}$

(۷۰) جب (بہ − جہ) + جب (جہ − عہ) + جب (عہ − بہ)

کی بڑی سے بڑی قیمت معلوم کرو ۔

(۷۱) حل کرو مساوات (102)

جم (لا − ا) جم (لا − ب) جم (لا − ج)

= جب ا جب ب جب ج جب لا + جم ا جم ب جم ج جم لا

(۷۲) حل کرو مساوات

جم ۲لا + جم ۲(لا − ا) + جم ۲(لا − ب) + جم ۲(لا − ج) = ۴ جم ا جم ب جم ج

(۷۳) حل کرو مساوات

$جب^{۳}$ ۳ا + $جب^{۳}$ ۲ا = $جب^{۲}$ ا (جب ۳ا + جب ۲ا)

(۷۴) مساواتوں

ا جم ۲ط + ب جب ۲ط = ج ،

اَ جم ۳ط + بَ جب ۳ط = ۰

سے ط ساقط کرو ۔

(۷۵) اگر ا + ب + ج = ۱۸۰° تو ثابت کرو کہ

$جب^{۲}\frac{۱}{۲}$ ب $جب^{۲}\frac{۱}{۲}$ج + $جب^{۲}\frac{۱}{۲}$ج $جب^{۲}\frac{۱}{۲}$ا + $جب^{۲}\frac{۱}{۲}$ا $جب^{۲}\frac{۱}{۲}$ ب

$\not< \frac{۱}{۱۲}$ ($جب^{۲}$ ا + $جب^{۲}$ ب + $جب^{۲}$ ج)

(۷۶) مساواتوں

۴ لا = ۵ ا جم ط - ا جم ۵ ط،

۴ ما = ۵ ا جب ط - ا جب ۵ ط

سے ط ساقط کرو۔

(۷۷) اگر جم ۲ ا جب (بہ - جہ) قط (بہ + جہ)

= جم ۲ بہ جب (جہ - عہ) قط (جہ + عہ) = جم ۲ جہ جب (عہ - بہ) قط (عہ + بہ)

تو ثابت کرو کہ

جم ۲ عہ + جم ۲ بہ + جم ۲ جہ = ۰،

اور جب ۲ (بہ + جہ) + جب ۲ (جہ + عہ) + جب ۲ (عہ + بہ) = ۰

(۷۸) ثابت کرو کہ

$\sum_{م=۰}^{م=ھ}$ جم (م عہ + بہ) = جم ($\frac{1}{2}$ ھ عہ + بہ) جب $\frac{1}{2}$ (ھ + ۱) عہ قم $\frac{1}{2}$ عہ

اور $\sum_{م=۰}^{م=ھ}$ $\sum_{ن=۰}^{ن=ن}$ $\sum_{پ=۰}^{پ=پ}$ ... جم (م عہ + ن بہ + پ جہ + ...)

= جم $\frac{1}{2}$ (ھ عہ + ن بہ + پ جہ + ...) جب $\frac{1}{2}$ (ھ + ۱) عہ جب $\frac{1}{2}$ (ن + ۱) بہ ....

× قم $\frac{1}{2}$ عہ قم $\frac{1}{2}$ بہ ....

امثلہ ۷۹ تا ۹۳ کے حسب ذیل سلسلوں کو ن رقموں تک جمع کرو:-

(۷۹) جب^2 عہ + جب^2 ۲ عہ + جب^2 ۳ عہ + ... + جب^2 ن عہ

(۸۰) جب^2 عہ جب ۲ عہ + جب^2 ۲ عہ جب ۳ عہ + ... + جب^2 ن عہ جب (ن + ۱) عہ

(۸۱) قم عہ قم (عہ + بہ) + قم (عہ + بہ) قم (عہ + ۲ بہ) + قم (عہ + ۲ بہ) قم (عہ + ۳ بہ)

+ .... + قم {عہ + (ن - ۱) بہ} قم (عہ + ن بہ)

(۸۲) جب لا جب ۲ لا جب ۳ لا + جب ۲ لا جب ۳ لا جب ۴ لا + ...
+ جب ن لا جب (ن + ۱) لا جب (ن + ۲) لا

(۸۳) جب^{۳} عہ + $\frac{۱}{۳}$ جب^{۳} ۳ عہ + $\frac{۱}{۳^{۲}}$ جب^{۳} ۳^{۲} عہ + . . . + $\frac{۱}{۳^{ن-۱}}$ جب^{۳} ۳$^{ن-۱}$ عہ

(۸۴) مس ط مس ۲ ط + مس ۲ ط مس ۳ ط + . . . + مس ن ط مس (ن + ۱) ط

(۸۵) مس ط قط ۲ ط + مس ۲ ط قط ۲^{۲} ط + . . . + مس ۲$^{ن-۱}$ ط قط ۲^{ن} ط　　(103)

(۸۶) مس لا + $\frac{۱}{۲}$ مس $\frac{لا}{۲}$ + $\frac{۱}{۴}$ مس $\frac{لا}{۴}$ + . . . + $\frac{۱}{۲^{ن-۱}}$ مس $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$

(۸۷) مس لا قط^{۲} لا + $\frac{۱}{۸}$ مس $\frac{لا}{۲}$ قط^{۲} $\frac{لا}{۲}$ + $\frac{۱}{۸^{۲}}$ مس $\frac{لا}{۲^{۲}}$ قط^{۲} $\frac{لا}{۲^{۲}}$ + ...
+ $\frac{۱}{۸^{ن-۱}}$ مس $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$ قط^{۲} $\frac{لا}{۲^{ن-۱}}$

(۸۸) ۱ + ج جم ط جم فہ + ج^{۲} جم ۲ ط جم ۲ فہ + . . . + ج$^{ن-۱}$ جم (ن - ۱) ط جم (ن - ۱) فہ

(۸۹) $\frac{\text{جم ۲ ط}}{\text{جب}^{۲}\text{ ۲ ط}}$ + $\frac{\text{۲ جم ۴ ط}}{\text{جب}^{۲}\text{ ۴ ط}}$ + $\frac{\text{۴ جم ۸ ط}}{\text{جب}^{۲}\text{ ۸ ط}}$ + . . . + $\frac{\text{۲}^{ن-۱}\text{ جم ۲}^{ن}\text{ ط}}{\text{جب}^{۲}\text{ ۲}^{ن}\text{ ط}}$

(۹۰) $\frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط + جم}^{۲}\text{ ط}}$ + $\frac{\text{جب ۲ ط}}{\text{جم ۲ ط + جم}^{۲}\text{ ط}}$ + . . . + $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ن ط + جم}^{ن}\text{ ط}}$

(۹۱) $\frac{\text{جم ۲ عہ}}{\text{۱ - جم}^{۲}\text{ ۲ عہ قط}^{۲}\text{ عہ}}$ + $\frac{\text{جم ۳ عہ}}{\text{۱ - جم}^{۲}\text{ ۳ عہ قط}^{۲}\text{ عہ}}$ + . . . + $\frac{\text{جم (ن + ۱) عہ}}{\text{۱ - جم}^{۲}\text{ (ن + ۱) عہ قط}^{۲}\text{ عہ}}$

(۹۲) ۱ × ۳ جب $\frac{\pi}{ن}$ + ۳ × ۵ جب $\frac{۳\pi}{ن}$ + . . . + (۲ن - ۱) (۲ن + ۱) جب $\frac{(۲ن - ۱)\pi}{ن}$

(۹۳) ۳ × ۴ جب عہ + ۴ × ۵ جب ۲ عہ + . . . + (ن + ۲) (ن + ۳) جب ن عہ

(۹۴) اگر مساوات

جب (ط + عہ) + جب (ط + بہ) + جب (عہ + بہ) = ۰

کے دو حل ط۱، ط۲ ہوں جہاں ط۱، ط۲، عہ، بہ میں سے ہر ایک ۲ π سے کم ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب}(\text{ط}_1+\text{ط}_2)+\text{جب}(\text{بہ}+\text{ط}_1)+\text{جب}(\text{بہ}+\text{ط}_2)=0$$

(۹۵) - ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{2}\,\text{مم}^{-1}\,\frac{2\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}\pi$$

اور
$$\frac{1}{2}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\,\text{مس}^{-1}\,\frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{36}\pi$$

(۹۶) اگر ط کی چار غیر مساوی قیمتیں عہ، بہ، جہ، ضہ ہر ایک ۲ π سے کم ہو اور وہ مساوات

$$\text{جم}_2(\text{لہ}-\text{ط})+\text{جم}(\text{مہ}-\text{ط})+\text{جم نہ}=0$$

کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ

$$\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ}+\text{ضہ}-4\,\text{لہ}=2\,\text{ن}\,\pi\text{،}$$

اور
$$\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{بہ}+\text{جہ}+\text{ضہ}-\text{عہ}-2\,\text{مہ})+\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{جہ}+\text{ضہ}+\text{عہ}-\text{بہ}-2\,\text{مہ})$$
$$+\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ضہ}+\text{عہ}+\text{بہ}-\text{جہ}-2\,\text{مہ})+\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{عہ}+\text{بہ}+\text{جہ}-\text{ضہ}-2\,\text{مہ})=0$$

(۱۷۰)

ساتواں باب

ضعفی زاویوں کے تفاعلوں کو پھیلانا

جیب یا جیب التمام کی نزولی قوتوں میں سلسلہ

۷۸ — دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۲۰) میں اگر ہم $\text{جیب}^{۲}\, ا$ کی بجائے اس کی قیمت $(۱ - \text{جم}^{۲}\, ا)$ لکھیں اور سلسلہ کو جم ا کی قوتوں میں ترتیب دیں تو جم ن ا کے لیے صرف جم ا کی قوتوں میں ایک جملہ حاصل ہوگا۔ ا کی بجائے ط رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ن ط} = \text{جم}^{ن}\,ط - \frac{ن(ن-۱)}{|\underline{۲}}\,\text{جم}^{ن-۲}\,ط\,(۱-\text{جم}^{۲}\,ط) + \cdots$$

$$+ (-۱)^{ر}\,\frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{|\underline{۲ر}}\,\text{جم}^{ن-۲ر}\,ط\,(۱-\text{جم}^{۲}\,ط)^{ر} + \cdots$$

اس سلسلے میں $(-۱)^{ر}\,\text{جم}^{ن-۲ر}\,ط$ کا سر ہے

$$\frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{|\underline{۲ر}} + \frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-۲ر-۱)}{|\underline{۲ر+۲}}\,(\ldots)$$

$$+ \frac{ن(ن-۱)\cdots(ن-۲ر-۳)}{|\underline{۲ر+۴}} \times \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{|\underline{۲}} + \cdots$$

یہ سر $(۱+لا)^{ن}$ اور $(۱-\frac{۱}{لا})^{-(ر+۱)}$ سے حاصل ضرب میں $لا^{۲ر}$ کا سر

سر ہے اُس کے مساوی ہے جہاں لا کو ایک سے بڑا فرض کیا گیا ہے؛
اس لیے یہ سر، اُس سر کے مساوی ہے جو $(۱+لا)^{ن-ر-۱}\left(۱-\frac{۱}{لا}\right)^{-(ر+۱)}$ کے
پھیلاؤ میں $لا^{ر-۱}$ کا ہے - یہ آخری سر

$$= \frac{(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\underline{|ر}}\Big\{ر+(ن-۲ر)(ر+۱)+$$

$$\frac{(ن-۲ر)(ن-۲ر-۱)}{\underline{|۲}}(ر+۲)+\cdots\Big\}$$

(105)

اور یہ

$$= \frac{(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\underline{|ر}}\left\{ر(۱+۱)^{ن-۲ر}+(ن-۲ر)(۱+۱)^{ن-۲ر-۱}\right\}$$

$$= \frac{ن(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\underline{|ر}}\,۲^{ن-۲ر-۱}$$

$جم^{ن}ط$ کا سر $\frac{۱}{۲}\left\{(۱+۱)^{ن}+(۱-۱)^{ن}\right\}$ یعنی $۲^{ن-۱}$ حاصل ہوتا ہے؛ $جم^{ن-۲}ط$
کا سر $(۱+لا)^{ن-۲}\left(۱-\frac{۱}{لا}\right)^{-۲}$ کے پھیلاؤ میں اُس رقم کے مساوی ہے جس میں
لا شامل نہیں ہوتا اور یہ رقم ہے $(۱+۱)^{ن-۲}+(ن-۲)(۱+۱)^{ن-۳}$ یا

$$ن\times ۲^{ن-۳}$$

پس

$$جم\,ن\,ط=۲^{ن-۱}جم^{ن}ط-\frac{ن}{\underline{|۱}}\,۲^{ن-۳}جم^{ن-۲}ط+\frac{ن(ن-۳)}{\underline{|۲}}\,۲^{ن-۵}جم^{ن-۵}ط\cdots(۱)$$

اس کی عام رقم ہے

$$(-۱)^{ر}\frac{ن(ن-ر-۱)\cdots(ن-۲ر+۱)}{\underline{|ر}}\,۲^{ن-۲ر-۱}جم^{ن-۲ر}ط$$

اسی طرح دفعہ ۱۵ کے ضابطہ (۳۹) سے ہمیں سلسلہ ملتا ہے

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{۲}^{\text{ن-۱}}\,\text{جم}^{\text{ن-۱}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن-۲}}{\text{۱}}\,\text{۲}^{\text{ن-۳}}\,\text{جم}^{\text{ن-۳}}\,\text{ط} + \frac{(\text{ن-۳})(\text{ن-۴})}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{۲}^{\text{ن-۵}}\,\text{جم}^{\text{ن-۵}}\,\text{ط}\ \ldots\ (\text{۲})$$

اور اس کی عام رقم ہے

$$(-\text{۱})^{\text{ر}}\,\frac{(\text{ن-ر-۱})\ldots(\text{ن-۲ر})}{\underline{|\text{ر}}}\,\text{۲}^{\text{ن-۲ر-۱}}\,\text{جم}^{\text{ن-۲ر-۱}}\,\text{ط}$$

۷۹ — اگر ضابطوں (۱) اور (۲) میں ط کو $\frac{۱}{۲}\pi$ - ط میں تبدیل کریں تو ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}}{\text{۲}}}\,\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن-۱}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}}{\text{۱}}\,\text{۲}^{\text{ن-۳}}\,\text{جب}^{\text{ن-۲}}\,\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن-۳})}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{۲}^{\text{ن-۵}}\,\text{جب}^{\text{ن-۴}}\,\text{ط} - \ldots\ldots\ (\text{۳})$$

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{ن}}{\text{۲}}-\text{۱}}\,\text{جب ن ط}\,\big\backslash\,\text{جم ط} = \text{۲}^{\text{ن-۱}}\,\text{جب}^{\text{ن-۱}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن-۲}}{\text{۱}}\,\text{۲}^{\text{ن-۳}}\,\text{جب}^{\text{ن-۳}}\,\text{ط} + \frac{(\text{ن-۳})(\text{ن-۴})}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{۲}^{\text{ن-۵}}\,\text{جب}^{\text{ن-۵}}\,\text{ط} - \ldots\ (\text{۴})$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن-۱})}\,\text{جب ن ط} = \text{۲}^{\text{ن-۱}}\,\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن}}{\text{۱}}\,\text{۲}^{\text{ن-۳}}\,\text{جب}^{\text{ن-۲}}\,\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن-۳})}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{۲}^{\text{ن-۵}}\,\text{جب}^{\text{ن-۴}}\,\text{ط} - \ldots\ (\text{۵})$$

(106

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن-۱})}\,\text{جم ن ط}\,\big\backslash\,\text{جم ط} = \text{۲}^{\text{ن-۱}}\,\text{جب}^{\text{ن-۱}}\,\text{ط} - \frac{\text{ن-۲}}{\text{۱}}\,\text{۲}^{\text{ن-۳}}\,\text{جب}^{\text{ن-۳}}\,\text{ط} + \frac{(\text{ن-۳})(\text{ن-۴})}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{۲}^{\text{ن-۵}}\,\text{جب}^{\text{ن-۵}}\,\text{ط}\ \ldots\ (\text{۶})$$

جبکہ ن طاق ہو۔

جیب یا جیب التمام کی صعودی قوتوں میں سلسلے

۸۰ — جم ن ط، جب ن ط کے پھیلاؤ. جم ط یا جب ط کی صعودی قوتوں میں معلوم کرنے کے لیے ہم اُن چھ سلسلوں کو جو اوپر حاصل کیے گئے ہیں اُلٹی ترتیب میں لکھ سکتے ہیں۔ تاہم مطلوبہ سلسلوں کو بالراست معلوم کرنا بہتر ہوگا۔

اول فرض کرو کہ ن جفت ہے تو

$$\text{جم ن ط} = (1-\text{جب}^2\text{ط})^{\frac{\text{ن}}{2}} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\underline{|2}}(1-\text{جب}^2\text{ط})^{\frac{\text{ن}}{2}-1}\,\text{جب}^2\text{ط}$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{\underline{|4}}(1-\text{جب}^2\text{ط})^{\frac{\text{ن}}{2}-2}\,\text{جب}^4\text{ط} - \dots\dots ؛$$

اب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۱ - جب² ط کی ہر قوت کو پھیلانے سے

$$\text{جم ن ط} = 1 - \left\{\frac{\text{ن}}{2} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\right\}\text{جب}^2\text{ط} + \left\{\frac{\frac{\text{ن}}{2}\left(\frac{\text{ن}}{2}-1\right)}{\underline{|2}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2}\left(\frac{\text{ن}}{2}-1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{\underline{|4}}\right\}\text{جب}^4\text{ط} - \dots\dots$$

اس پھیلاؤ میں $(-1)^{\text{س}}\,\text{جب}^{2\text{س}}\,\text{ط}$ کا سر ہے

$$\frac{\frac{\text{ن}}{2}\left(\frac{\text{ن}}{2}-1\right)\dots\left(\frac{\text{ن}}{2}-\text{س}+1\right)}{\underline{|\text{س}}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{\left(\frac{\text{ن}}{2}-1\right)\left(\frac{\text{ن}}{2}-2\right)\dots\left(\frac{\text{ن}}{2}-\text{س}+1\right)}{\underline{|\text{س}-1}}$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)(\text{ن}-3)}{\underline{|4}}\cdot\frac{\left(\frac{\text{ن}}{2}-2\right)\dots\left(\frac{\text{ن}}{2}-\text{س}+1\right)}{\underline{|\text{س}-2}} + \dots\dots$$

جس کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{1}{|\underline{س}}\times\left\{\frac{ن(ن-۲)(ن-۴)\cdots(ن-۲س+۲)}{۱\times۳\times۵\cdots\times(۲س-۱)}\right\}\left[\left(\frac{۲س-۱}{۲}\right)\left(\frac{۲س-۱}{۲}-۱\right)\cdots\left(\frac{۲س-۱}{۲}-س+۱\right)\right.$$

$$+س\left(\frac{۲س-۱}{۲}\right)\left(\frac{۲س-۱}{۲}-۱\right)\cdots\left(\frac{۲س-۱}{۲}-س+۲\right)\left(\frac{ن-۱}{۲}\right)$$

$$+\frac{س(س-۱)}{|\underline{۲}}\left(\frac{۲س-۱}{۲}\right)\left(\frac{۲س-۱}{۲}-۱\right)\cdots\left(\frac{۲س-۱}{۲}-س+۳\right)\left(\frac{ن-۱}{۲}\right)\left(\frac{ن-۱}{۲}-۱\right)$$

$$+\cdots\cdots$$

اب وانڈر مانڈ کا مسئلہ[۱] ہے (107)

$$(ف+ق)_س=ف_س+س\,ف_{س-۱}\,ق_۱+\frac{س(س-۱)}{|\underline{۲}}\,ف_{س-۲}\,ق_۲+\cdots$$

جس میں $ف_س$، $ف(ف-۱)\cdots(ف-س+۱)$ کو تعبیر کرتا ہے۔ چونکہ یہ مسئلہ ف اور ق کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے، اس لیے فرض کرو کہ $ف=\frac{۲س-۱}{۲}$، $ق=\frac{ن-۱}{۲}$، تب خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلوں پر یہ مسئلہ استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $(-۱)^س$ جب^{۲س} ط کا سر ہے

$$\frac{1}{|\underline{س}}\cdot\frac{ن(ن-۲)\cdots(ن-۲س+۲)}{۱\times۳\times۵\cdots\times(۲س-۱)}\left(\tfrac{۱}{۲}ن+س-۱\right)\left(\tfrac{۱}{۲}ن+س-۲\right)\cdots\left(\tfrac{۱}{۲}ن\right)$$

یا

$$\frac{ن^۲(ن^۲-۲^۲)(ن^۲-۴^۲)\cdots\left(ن^۲-(۲س-۲)^۲\right)}{|\underline{۲س}}$$

---

[۱] دیکھو اسمتھ کا الجبرا صفحہ ۲۸۸، یا کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ ۹۔

پس جب ، ن جفت ہو تو

$$\text{جم ن ط} = ۱ - \frac{\text{ن}^۲}{|۲}\text{جب}^۲\text{ط} + \frac{\text{ن}^۲(\text{ن}^۲-۲^۲)}{|۴}\text{جب}^۴\text{ط} \; . \; . \; . \; .$$

$$+ (-۱)^{\text{س}} \frac{\text{ن}^۲(\text{ن}^۲-۲^۲)\ldots(\text{ن}^۲-\overline{۲\text{س}-۲}^۲)}{|۲\text{س}}\text{جب}^{۲\text{س}}\text{ط} + \ldots \quad (۷)$$

یہ سلسلہ، سلسلہ (۳) الٹی ترتیب میں لکھا ہوا ہے۔

۸۱ — نیز

$$\text{جب ن ط} = \text{جم ط}\left\{\text{ن}(۱-\text{جب}^۲\text{ط})^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{|۳}(۱-\text{جب}^۲\text{ط})^{\frac{\text{ن}-۳}{۲}}\text{جب}^۳\text{ط} + \ldots\right\}$$

فرض کرو کہ ن جفت ہے، سلسلہ کی ہر رقم کو جب² ط کی قوتوں میں پھیلاؤ تو ہمیں

$(-۱)^{\text{س}+۱}$. جم ط جب$^{۲\text{س}-۱}$ ط کا سر ملتا ہے

$$\frac{۱}{|\text{س}-۱}\left\{\frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)\ldots(\text{ن}-۲\text{س}+۲)}{۱\times۳\times۵\times\ldots(۲\text{س}-۱)}\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)_{\text{س}-۱} + (\text{س}-۱)\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)_{\text{س}-۲}\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}\right)_۱\right.$$

$$\left.+ \frac{(\text{س}-۱)(\text{س}-۲)}{|۲}\left(\frac{۲\text{س}-۱}{۲}\right)_{\text{س}-۳}\left(\frac{\text{ن}-۱}{۲}\right)_۲ + \ldots\ldots\right\}$$

جو

$$= \frac{۱}{|\text{س}-۱} \times \frac{\text{ن}(\text{ن}-۲)\ldots(\text{ن}-۲\text{س}+۲)}{۱\times۳\times۵\times\ldots(۲\text{س}-۱)}(\tfrac{۱}{۲}\text{ن}+\text{س}-۱)\ldots(\tfrac{۱}{۲}\text{ن}+۱)$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۲^۲)(\text{ن}^۲-۴^۲)\ldots(\text{ن}^۲-\overline{۲\text{س}-۲}^۲)}{|۲\text{س}-۱}$$

پس ن جفت ہونے کی صورت میں

$$\text{جب ن ط}/\text{جم ط} = \frac{\text{ن}}{|۱}\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۲^۲)}{|۳}\text{جب}^۳\text{ط} + \ldots\ldots$$

$$+ (-۱)^{\text{س}-۱}\frac{\text{ن}(\text{ن}^۲-۲^۲)\ldots(\text{ن}^۲-\overline{۲\text{س}-۲}^۲)}{|۲\text{س}-۱}\text{جب}^{۲\text{س}-۱}\text{ط} + \ldots$$

۸۲ — جب، ن طاق ہو تو

$$\text{جم ن ط} = \text{جم ط}\left\{(\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})}{\text{۲}!}(\text{۱}-\text{جب}^{\text{۲}}\text{ط})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۳})}\text{جب}^{\text{۲}}\text{ط} + \dots\dots\right\}،$$

اور

$$\text{جب ن ط} = \text{ن}\,(\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\text{ط})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})}\text{جب ط}$$

$$- \frac{\text{ن}(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})}{\text{۳}!}(\text{۱}-\text{جب}^{\text{۲}}\text{ط})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۳})}\text{جب}^{\text{۳}}\text{ط} + \dots$$

اب پچھلی دفعہ کی طرح جب ط کی قوتوں میں سلسلوں کو پھیلانے سے اسی طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم ن ط}/\text{جم ط} = \text{۱} - \frac{\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}}}{\text{۲}!}\text{جب}^{\text{۲}}\text{ط} + \frac{(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{\text{۴}!}\text{جب}^{\text{۴}}\text{ط} - \dots$$

$$+ (-\text{۱})^{\text{س}}\frac{(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})\dots(\text{ن}^{\text{۲}}-\overline{\text{۲س}-\text{۱}}^{\,\text{۲}})}{\text{۲س}!}\text{جب}^{\text{۲س}}\text{ط}$$

$$+ \dots\dots \qquad (\text{۹})$$

اور

$$\text{جب ن ط} = \frac{\text{ن}}{\text{۱}}\text{جب ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})}{\text{۳}!}\text{جب}^{\text{۳}}\text{ط} + \frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})}{\text{۵}!}\text{جب}^{\text{۵}}\text{ط}$$

$$- \dots + (-\text{۱})^{\text{س}-\text{۱}}\frac{\text{ن}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})\dots(\text{ن}^{\text{۲}}-\overline{\text{۲س}-\text{۳}}^{\,\text{۲}})}{\text{۲س}-\text{۱}!}\text{جب}^{\text{۲س}-\text{۱}}\text{ط}$$

$$+ \dots \dots\dots \qquad (\text{۱۰})$$

۸۳ — اگر ضابطوں (۷)، (۸)، (۹)، (۱۰) میں ط کو $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$ - ط سے بدل دیا جائے تو حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$(-\text{۱})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}}\text{جم ن ط} = \text{۱} - \frac{\text{ن}^{\text{۲}}}{\text{۲}!}\text{جم}^{\text{۲}}\text{ط} + \frac{\text{ن}^{\text{۲}}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})}{\text{۴}!}\text{جم}^{\text{۴}}\text{ط}$$

$$- \frac{\text{ن}^{\text{۲}}(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})(\text{ن}^{\text{۲}}-\text{۴}^{\text{۲}})}{\text{۶}!}\text{جم}^{\text{۶}}\text{ط} + \dots\dots \qquad (\text{۱۱})$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}\text{ن}+1}\ \text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = \frac{\text{ن}}{1}\ \text{جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-2^2)}{\lfloor 3}\ \text{جم}^3\text{ط}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-2^2)(\text{ن}^2-4^2)}{\lfloor 5}\ \text{جم}^5\text{ط} - \ldots \quad (12)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\ \text{جب ن ط} \backslash \text{جب ط} = 1 - \frac{\text{ن}^2-1^2}{\lfloor 2}\ \text{جم}^2\text{ط}$$

$$+ \frac{(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-3^2)}{\lfloor 4}\ \text{جم}^4\text{ط} - \ldots \quad (13)$$

اور

$$(-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\ \text{جم ن ط} = \frac{\text{ن}}{1}\ \text{جم ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)}{\lfloor 3}\ \text{جم}^3\text{ط}$$

(109)

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2-1^2)(\text{ن}^2-3^2)}{\lfloor 5}\ \text{جم}^5\text{ط} - \ldots \quad (14)$$

جبکہ ن طاق ہو۔ یہ سب ضابطے وہی ہیں جو دفعات ۷۸ اور ۷۹ میں حاصل کئے گئے تھے۔

تحت ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۸۴ — اگر ہم ضابطوں (۱) تا (۶) میں یا ان کی مماثل شکلوں (۷) تا (۱۴) میں ط کی بجائے $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ لکھیں تو ایسی مساواتیں ملتی ہیں جن سے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ یا جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ دریافت ہو سکتا ہے جبکہ جم ط اور جب ط دیے گئے ہوں ۔ ہم مختلف صورتوں پر غور کرینگے ۔

(۱) فرض کرو کہ جم ط دیا گیا ہے، تب اُسی مساوات سے جو (۱) سے حاصل کی گئی ہے جم $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی ن قیمتیں ملینگی۔ پس جم ط دیا گیا ہے تو اُن تمام زاویوں کی جیوب التمام معلوم ہونے کی امید رکھنی چاہیے جو $\frac{2\text{ک}\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}}$

میں شامل ہیں، کیونکہ ۲ک π ± ط سے وہ تمام زاویے تعبیر ہوتے ہیں جن کی جیب التمام وہی ہے جو ط کی ہے، اس میں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ اب ک کی خواہ کوئی قیمت ہو ہم رکھ سکتے ہیں ± ک = س + کَ ن جس میں س کی قیمت ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ن - ۱ میں سے ہمیشہ کوئی ایک ہے اور کَ مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ تب

$$\text{جم}\,\frac{۲\text{ک}\,\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}} = \text{جم}\left(\frac{\text{ط}+۲\text{س}\,\pi}{\text{ن}} \pm ۲\pi\,\text{کَ}\right) = \text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲\text{س}\,\pi}{\text{ن}}$$

اس طرح ہمیں حسب ذیل ن قیمتوں کے حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے:-

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}،\ \text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲\pi}{\text{ن}}،\ \text{جم}\,\frac{\text{ط}+۴\pi}{\text{ن}}،\ \ldots،\ \text{جم}\,\frac{\text{ط}+۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

اور یہ قیمتیں اُس مساوات کی اصلیں ہونگی جو (۱) سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سب اصلیں بالعموم مختلف ہوتی ہیں کیونکہ ان میں سے کسی دو زاویوں کا مجموعہ یا فرق ۲ π کا ضعف نہیں ہے۔

(۲) فرض کرو، جم ط دیا گیا ہے، تب اُن مساواتوں سے جو (۳) یا (۶) سے حاصل ہوتی ہیں جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی قیمتیں ملینگی۔ (۶) کو استعمال کرنے سے بیشتر ہمیں اس کی ہر جانب کا مربع لینا چاہیے، اور جم$^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی بجائے ۱-جب$^۲\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ لکھنا چاہیے۔ اس طرح (۶) سے جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کے لیے ۲ ن درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے جبکہ ن طاق ہو، اور مساوات (۳) سے ن درجہ کی ایک مساوات ملتی ہے جبکہ ن جفت ہو۔ پس ہمیں جب $\frac{۲\text{ک}\,\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}}$ کی تمام قیمتیں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیے جبکہ جم ط دیا گیا ہو۔ پچھلی صورت کی طرح ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ یہ تمام قیمتیں جملہ جب $\frac{۲\text{س}\,\pi \pm \text{ط}}{\text{ن}}$ میں شامل ہیں جہاں س کی قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ن - ۱ ہیں۔ جب، ن طاق ہو تو یہ سب قیمتیں مختلف ہوتی ہیں اور اس لیے ۲ ن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ اُس مساوات کی ۲ ن اصلیں ہیں جو (۶) سے حاصل ہوتی ہے۔ جب، ن جفت ہو تو جب $\frac{(\text{ن}-۲\text{س})\pi-\text{ط}}{\text{ن}}$ = جب $\frac{۲\text{س}\,\pi+\text{ط}}{\text{ن}}$

(110)

اس لیے اُس صورت میں صرف ن قیمتیں ہیں اور وہ (۳) سے حاصل کردہ مساوات سے ملتی ہیں۔

(۳) فرض کرو جب ط دیا گیا ہے۔ تب جم $\frac{ط}{ن}$ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے: اس مساوات سے جم $\frac{ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں حاصل ہوتی ہیں، کیونکہ اس مساوات کو استعمال کرنے سے پیشتر ہمیں طرفین کا مربع لینا اور جب^2 $\frac{ط}{ن}$ کی بجائے ۱ - جم^2 $\frac{ط}{ن}$ رکھنا پڑتا ہے۔ حسب سابق ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ جملہ جم $\frac{س\,\pi + (-1)^{س}\,ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں ہیں؛ اس طرح ۲ن درجہ کی ایک مساوات سے جم $\frac{ط}{ن}$ جب ط کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے۔

(۴) فرض کرو کہ جب ط دیا گیا ہے، تب جب $\frac{ط}{ن}$ معلوم کرنے کے لیے ہم وہ مساوات استعمال کرتے ہیں جو (۴) یا (۵) سے حاصل ہوتی ہے بموجب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہے۔ اگر ن جفت ہے تو (۴) سے حاصل کردہ مساوات سے جب $\frac{ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں ملتی ہیں، یہ قیمتیں جب $\frac{س\,\pi + (-1)^{س}\,ط}{ن}$ کی ۲ن قیمتیں ہونگی۔ اگر ن طاق ہے تو (۵) سے حاصل کردہ مساوات سے جب $\frac{ط}{ن}$ کی ن قیمتیں ملینگی جو جب $\frac{س\,\pi + (-1)^{س}\,ط}{ن}$ کی ن مختلف قیمتیں ہونگی۔

مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعل

(111)

۸۵ — ضابط (۱) کو جم ط میں ن ویں درجہ کی ایک مساوات خیال کیا جا سکتا ہے جبکہ جم ن ط دیا گیا ہو۔ اب چونکہ ن زاویوں ط، ط + $\frac{2\pi}{ن}$، ط + $\frac{4\pi}{ن}$، ..... ط + $\frac{2(ن-1)\pi}{ن}$ میں سے ہر زاویہ ایسا ہے کہ اس کے ن گنے کی جیب التمام جم ن ط کے مساوی ہے اور چونکہ جم ط، جم $(ط + \frac{2\pi}{ن})$، جم $(ط + \frac{4\pi}{ن})$، ..... جم $\{ط + \frac{2(ن-1)\pi}{ن}\}$ سب کے سب مختلف ہیں، وہ جم ط کی مساوات

کی اصلیں ہیں؛ اب ہم ن جیوب التمام جم (ط + $\frac{۲ر}{ن}$ π ، جہاں ر = ۰، ۱، ۲، ... ن-۱ رکھنے سے حاصل ہوتی ہیں کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں وہ معمولی مسئلے استعمال کرسکتے ہیں جو مساواتوں کی اصلوں کے متشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوئے تھے۔ اگر ضابطوں (۱۱) اور (۱۴) کے استعمال کرنے میں سہولت ہو تو ہم انہیں استعمال کرسکتے ہیں کیونکہ وہ (۱) سے مماثل ہیں۔
نیز مساوات (۲)، اُن (ن - ۱) زاویوں کی جیوب التمام کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے جن کے لیے جب ن ط \ جب ط کی قیمت دی ہوئی ہو۔

اسی طرح مساوات (۳)، ۲ م جیوب

$$\text{جب ط، جب} \left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{م}}\right)\text{، جب} \left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{م}}\right)\text{، ...، جب} \left(\text{ط} + \frac{۲\text{م}\pi - \pi}{\text{م}}\right)$$

کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتی ہے جبکہ ن = ۲ م۔

اسی طرح مسئلہ (۵)، ۲ م + ۱ جیوب

$$\text{جب ط، جب} \left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{۲\text{م}+۱}\right)\text{، جب} \left(\text{ط} + \frac{۴\pi}{۲\text{م}+۱}\right)\text{، ... جب} \left(\text{ط} + \frac{۴\text{م}\pi}{۲\text{م}+۱}\right)$$

کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال ہوسکتا ہے جبکہ ن = ۲ م + ۱۔

مساوات

$$\text{مس ن ط} \left\{ ۱ - \frac{\text{ن(ن-۱)}}{\lfloor ۲} \text{مس}^۲\text{ط} + \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}}{\lfloor ۴} \text{مس}^۴\text{ط} ... \right\}$$

$$= \text{ن مس ط} - \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}}{\lfloor ۳} \text{مس}^۳\text{ط} + ...$$

کو مس ط کی مساوات سمجھا جاسکتا ہے جس کی اصلیں ہیں

$$\text{مس ط، مس} \left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\text{، مس} \left(\text{ط} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\text{، ... مس} \left(\text{ط} + \frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$$

اور اس لیے اُس کو اِن جملوں کے تشاکل تفاعلات محسوب کرنے میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔

(112)

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ زاویوں

$$ط، ط + \frac{\pi}{ن}، \ldots، ط + \frac{(ن-1)\pi}{ن}$$

میں سے دو دو کے قاطع التماموں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $-\frac{1}{2}ن^2$ قم$^2\frac{1}{2}$ن ط ہے جہاں ن ایک جفت عدد ہے۔

مساوات (۷) استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ اگر مندرجہ بالا زاویوں میں سے ن-۲، ن-۲ زاویوں کی جیوب کے حاصل ضربوں کے مجموعہ کو ان سب زاویوں کی جیوب کے حاصل ضرب سے تقسیم کیا جائے تو حاصل قسمت مطلوبہ مجموعہ ہے؛ یہ حاصل قسمت جب^2 ط کے سر کے مساوی ہے اگر اس کو اُس رقم سے تقسیم کیا جائے جس میں جب ط شامل نہیں ہوتا یعنے

$$\text{مطلوبہ مجموعہ} = -\frac{ن^2}{2(1-\text{جم ن ط})}$$

$$= -\frac{ن^2}{4}\text{ قم}^2\frac{1}{2}\text{ن ط}$$

(۲) ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^4\frac{1}{9}\pi + \text{جم}^4\frac{2}{9}\pi + \text{جم}^4\frac{3}{9}\pi + \text{جم}^4\frac{4}{9}\pi = \frac{19}{16}$$

اور

$$\text{قط}^4\frac{1}{9}\pi + \text{قط}^4\frac{2}{9}\pi + \text{قط}^4\frac{3}{9}\pi + \text{قط}^4\frac{4}{9}\pi = 1120$$

اگر جب ۹ ط / جب ط کو جم ط کی رقوم میں بیان کیا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو اِس آٹھویں درجہ کی مساوات کو حل کرنے سے جم ط کی جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ہونگی

$$\text{جم}\frac{1}{9}\pi،\ \text{جم}\frac{2}{9}\pi، \ldots،\ \text{جم}\frac{8}{9}\pi$$

لیکن ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جم}\ \tfrac{۸}{۹}\pi = -\text{جم}\ \tfrac{۱}{۹}\pi،\quad \text{جم}\ \tfrac{۷}{۹}\pi = -\text{جم}\ \tfrac{۲}{۹}\pi، \ldots\ldots$$

اس لیے مساوات متذکرہ بالا کی اصلیں ہیں

$$\pm\ \text{جم}\ \tfrac{۱}{۹}\pi،\ \pm\ \text{جم}\ \tfrac{۲}{۹}\pi،\ = \text{جم}\ \tfrac{۳}{۹}\pi،\ \pm\ \text{جم}\ \tfrac{۴}{۹}\pi$$

اب ہم سلسلہ (۲) استعمال کر سکتے ہیں یا عمل کو اس طرح جاری کر سکتے ہیں :—

اگر جب ۹ ط = ۰ تو

$$\text{جب ۵ ط . جم ۴ ط + جم ۵ ط جب ۴ ط} = ۰$$

یا

$$(\text{جب ۳ ط . جم ۲ ط + جم ۳ ط جب ۲ ط})\ (۲\ \text{جم}^۲\ ۲\ \text{ط} - ۱)$$

$$+ (\text{جم ۳ ط جم ۲ ط} - \text{جب ۳ ط جب ۲ ط})\ ۲\ \text{جب ۲ ط جم ۲ ط} = ۰$$

جب ۳ ط، جم ۲ ط، وغیرہ کی بجائے ان کی قیمتیں درج کرو اور جزو ضربی جب ط کو خارج کرو اور فرض کرو کہ لا = جم^۲ ط تو لا میں حسب ذیل چار درجی مساوات حاصل ہوگی

$$\{(۴\ \text{لا} - ۱)(۲\ \text{لا} - ۱) + ۲(۴\ \text{لا}^۲ - ۳\ \text{لا})\}\{۲(۲\ \text{لا} - ۱)^۲ - ۱\} + ۴(۲\ \text{لا} - ۱)(۴\ \text{لا}^۲ - ۳\ \text{لا})$$

$$- ۸(۴\ \text{لا} - ۱)(۱ - \text{لا})\ \text{لا}\ (۲\ \text{لا} - ۱) = ۰$$

یا $(۱۶\ \text{لا}^۲ - ۱۲\ \text{لا} + ۱)(۸\ \text{لا}^۲ - ۸\ \text{لا} + ۱) + (۶۴\ \text{لا}^۳ - ۸۰\ \text{لا}^۲ + ۲۰\ \text{لا})(۲\ \text{لا} - ۱) = ۰$

یا لا کی قوتوں کے بموجب ترتیب دینے سے

$$۲۵۶\ \text{لا}^۴ - ۴۴۸\ \text{لا}^۳ + ۲۴۰\ \text{لا}^۲ - ۴۰\ \text{لا} + ۱ = ۰$$

اس مساوات کی اصلوں کا حاصل جمع $\frac{۴۴۸}{۲۵۶}$ ہے اور دو دو اصلوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۲۴۰}{۲۵۶}$ ہے، اس لیے اصلوں کے مربعوں کا مجموعہ $= \frac{۴۴۸^۲ - ۲ \times ۲۴۰ \times ۲۵۶}{(۲۵۶)^۲}$

$= \frac{۱۹}{۱۶}$، نیز اصلوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $= ۴۰^۲ - ۲ \times ۲۴۰ = ۱۱۲۰$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\text{جب ع + جب ۲ ع + جب ۴ ع} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{۷}$$

(113)

جہاں $\text{عہ} = \frac{2}{7}\pi$ ۔

ہم دیکھتے ہیں کہ $(\text{جب عہ} + \text{جب ۲عہ} + \text{جب ۴عہ})^2 = \text{جب}^2\,\text{عہ} + \text{جب}^2\,\text{۲عہ} + \text{جب}^2\,\text{۴عہ}$

اگر جب ۷ط \ جب ط کو جب ط کی رقوم میں پھیلایا جائے اور پھر اس کو صفر کے مساوی رکھا جائے تو جب ط کی مساوات کی اصلیں ہونگی

$$\pm\,\text{جب عہ}،\ \pm\,\text{جب ۲عہ}،\ \pm\,\text{جب ۴عہ}$$

رکھو $\text{لا} = \text{جب}^2\,\text{ط}$ تو لا میں مساوات حاصل ہوتی ہے

$$64\,\text{لا}^3 - 112\,\text{لا}^2 + 56\,\text{لا} - 7 = 0$$

اس لیے $\text{جب}^2\,\text{عہ} + \text{جب}^2\,\text{۲عہ} + \text{جب}^2\,\text{۴عہ} = \frac{112}{64} = \frac{7}{4}$

اس لیے $\text{جب عہ} + \text{جب ۲عہ} + \text{جب ۴عہ} = \frac{1}{2}\sqrt{7}$

(۴) جب $\frac{\pi}{17}$ کی قیمت معلوم کرو۔

لکھو $\text{عہ} = \frac{2\pi}{17}$ تو اُس ضابطہ سے جو زاویوں کی جیوب التمام کے مجموعہ کے لیے ہے جبکہ زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہوں ہم معلوم کرتے ہیں۔

$$(\text{جم عہ} + \text{جم ۹عہ} + \text{جم ۱۳عہ} + \text{جم ۱۵عہ}) + (\text{جم ۳عہ} + \text{جم ۵عہ} + \text{جم ۷عہ} + \text{جم ۱۱عہ}) = -\frac{1}{2}$$

نیز (جم عہ + جم ۹عہ + جم ۱۳عہ + جم ۱۵عہ) اور (جم ۳عہ + جم ۵عہ + جم ۷عہ + جم ۱۱عہ) کو باہم ضرب دینے اور ہر دو جیوب التمام کے حاصل ضرب کی بجائے اِن دو جیوب التمام کے مجموعہ کا نصف رکھنے سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$(\text{جم عہ} + \text{جم ۹عہ} + \text{جم ۱۳عہ} + \text{جم ۱۵عہ})(\text{جم ۳عہ} + \text{جم ۵عہ} + \text{جم ۷عہ} + \text{جم ۱۱عہ}) = -1$$

پس خطوط وحدانی کے اندر کی دو مقداریں دو درجی مساوات $\text{ی}^2 + \frac{1}{2}\text{ی} - 1 = 0$ کی اصلیں ہیں؛ لیکن اس مساوات کی اصلیں $\frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{17})$ ہیں۔ اب یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ جم عہ + جم ۹عہ + جم ۱۳عہ + جم ۱۵عہ مثبت ہے اور جم ۳عہ + جم ۵عہ + جم ۷عہ + جم ۱۱عہ منفی ہے۔ اس لیے

$$\text{جم عہ} + \text{جم ۹عہ} + \text{جم ۱۳عہ} + \text{جم ۱۵عہ} = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1)،$$

$$\text{جم ۳عہ} + \text{جم ۵عہ} + \text{جم ۷عہ} + \text{جم ۱۱عہ} = -\frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1)$$

اب ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ $(\text{جم عہ} + \text{جم ۱۳عہ})(\text{جم ۹عہ} + \text{جم ۱۵عہ}) = -\frac{1}{4}$

اس لیے جم عہ + جم ۱۳ عہ، جم ۹ عہ + جم ۱۵ عہ اس دو درجی مساوات

$$\text{لا}^2 - \tfrac{1}{4}(\sqrt{17}-1)\,\text{لا} - \tfrac{1}{4} = 0$$

کی اصلیں ہیں۔ پس

$$\text{جم عہ} + \text{جم } 13\text{ عہ} = \tfrac{1}{8}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}\right)؛$$

اسی طرح حاصل ہوگا

$$\text{جم } 3\text{ عہ} + \text{جم } 5\text{ عہ} = \tfrac{1}{8}\left(-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)$$

اب $\text{جم عہ جم } 13\text{ عہ} = \tfrac{1}{2}(\text{جم } 12\text{ عہ} + \text{جم } 14\text{ عہ}) = \tfrac{1}{2}(\text{جم } 3\text{ عہ} + \text{جم } 5\text{ عہ})$؛ اور چونکہ ہم نے جم عہ، جم ۱۳ عہ کے مجموعہ اور حاصل ضرب کو معلوم کر لیا ہے اس لیے ہم ان میں سے ہر ایک کو معلوم کر سکتے ہیں۔ یہ دیکھتے ہوئے کہ جم عہ > جم ۱۳ عہ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم عہ} = \tfrac{1}{16}\left\{\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right\}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب}\,\frac{\pi}{17} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\text{جم عہ})}$$

$$= \tfrac{1}{8}\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}}$$

(۵) ثابت کرو کہ[1] اگر ف (لا، ما) ایک متجانس تفاعل ہو لا، ما کا جس کے ابعاد ن−۱ ہیں تو

$$\frac{\text{ف (جب لا، جم ما)}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{عہ}_1)\,\text{جب}(\text{لا}-\text{عہ}_2)\cdots\text{جب}(\text{لا}-\text{عہ}_\text{ن})}$$

$$= \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\text{ن}} \frac{\text{ف (جب عہ}_\text{ر}\text{، جم عہ}_\text{ر})}{\text{جب}(\text{لا}-\text{عہ}_\text{ر})\,\text{جب}(\text{عہ}_\text{ر}-\text{عہ}_1)\,\text{جب}(\text{عہ}_\text{ر}-\text{عہ}_2)\cdots\text{جب}(\text{عہ}_\text{ر}-\text{عہ}_\text{ن})}$$

[1] ہرسٹ نے اس مسئلہ کو ایک مضمون Sur l' Integration des Fonctions circulaires میں بیان کیا ہے جو Proc. Lond. math. Soc. بابتہ ۱۸۷۲ء میں شائع ہوا تھا۔

(114)

اس مساوات کی دائیں طرف کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{ف(م^2، 1)}{(م-ل_1)(م-ل_2)\ldots(م-ل_ن)} \times \frac{1}{جم لا جم ع_1 جم ع_2 \ldots جم ع_ن}،$$ جہاں م = مس لا، ل = مس ع

اب چونکہ ف(م^2، 1) ن-1 درجہ کا ہے جو ن سے کم ہے اس لیے جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے معمولی طریقہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ف(م^2، 1)}{(م-ل_1)(م-ل_2)\ldots(م-ل_ن)} = \sum_{ر=1}^{ر=ن} \frac{ف(ل_ر^2، 1)}{(م-ل_ر)(ل_ر-ل_1)(ل_ر-ل_2)\ldots(ل_ر-ل_ن)}$$

$$= \sum \frac{ف(جب ع_ر^2، جم ع_ر) جم لا جم ع_1 جم ع_2 \ldots جم ع_ن}{جب(لا-ع_ر) جب(ع_ر-ع_1)\ldots جب(ع_ر-ع_ن)}$$

اس طرح مطلوبہ نتیجہ اس سے حاصل ہو جاتا ہے۔

اجزائے ضربی

۸۶ ــــــ چونکہ جم ن ط کو جم ط میں ن ویں درجہ کے ایک منطق صحیح تفاعل کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اس لیے ہم جم ن ط کو ن اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے طور پر جو جم ط میں خطی ہوں بیان کر سکتے ہیں۔ جم ط کی وہ قیمتیں جن کے لیے جم ن ط معدوم ہوتا ہے یہ ہیں:

$$جم \frac{\pi}{2ن}،\ جم \frac{3\pi}{2ن}،\ \ldots،\ جم \frac{(2ن-1)\pi}{2ن}؛$$

یہ جیوب التمام سب کی سب مختلف ہیں؛ اس لیے

$$جم ن ط = ا\left(جم ط - جم \frac{\pi}{2ن}\right)\left(جم ط - جم \frac{3\pi}{2ن}\right)\ldots\left(جم ط - جم \frac{(2ن-1)\pi}{2ن}\right)$$

جس میں ا ایک عددی جزوِ ضربی ہے۔ چونکہ جم ن ط کے لیے جو جملہ جم ط میں ہے

اس میں جم ط کی اعلیٰ ترین قوت $\text{۲}^{\text{ن}-1}$ جم$^{\text{ن}}$ط ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ا} = \text{۲}^{\text{ن}-1}$؛ اس لیے

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-1}\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{3\pi}{\text{۲ن}}\right)\cdots\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{(\text{۲ن}-1)\pi}{\text{۲ن}}\right)$$

اب $\text{جم}\frac{\text{ر}\pi}{\text{۲ن}} = -\text{جم}\frac{(\text{۲ن}-\text{ر})\pi}{\text{۲ن}}$، اس لیے یہ جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-1}\,\text{جم ط}\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{۲ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{3\pi}{\text{۲ن}}\right)\cdots\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{\text{۲ن}}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-1}\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{۲ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{3\pi}{\text{۲ن}}\right)\cdots\left(\text{جم}^2\text{ط} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{\text{۲ن}}\right) \quad (115)$$

جبکہ ن جفت ہو۔ نیز یہ جملے لکھے جا سکتے ہیں

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \text{۲}^{\text{ن}-1}\left(\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\left(\text{جب}^2\frac{3\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-1}\left(\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\left(\text{جب}^2\frac{3\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{\text{۲ن}} - \text{جب}^2\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ان جملوں میں سے ہر ایک میں ط = ۰ رکھنے سے ہمیں حسب ذیل مسئلے حاصل ہوتے ہیں:-

$$\left.\begin{array}{l} \text{۲}^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\,\text{جب}\frac{3\pi}{\text{۲ن}}\cdots\text{جب}\frac{(\text{ن}-2)\pi}{\text{۲ن}} = 1، \\ \text{جبکہ ن طاق ہو، اور} \\ \text{۲}^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{۲ن}}\,\text{جب}\frac{3\pi}{\text{۲ن}}\cdots\text{جب}\frac{(\text{ن}-1)\pi}{\text{۲ن}} = 1 \end{array}\right\} \cdots (\text{۱۵})$$

جبکہ ن جفت ہو۔

جذر المربع نکالنے میں مثبت علامت لیگئی ہے کیونکہ زاویے سب کے سب حادہ ہیں۔
جم ن ط ÷ جم ط یا جم ن ط کے لیے جو جملے اوپر حاصل ہوئے ہیں اُن کو اگر ہم
(۱۵) میں بیان کردہ حاصل ضربوں میں سے متناظر حاصل ضرب کا مربع لیکر اس
سے تقسیم کریں تو ہمیں یہ جملے حاصل ہوتے ہیں:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{2\text{ن}}}\right)\left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{3\pi}{2\text{ن}}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots(16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{2\text{ن}}}\right)\left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{3\pi}{2\text{ن}}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots\ldots(17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

ہم اِن مسئلوں (۱۶) اور (۱۷) کو لکھ سکتے ہیں اس طرح :-

(116)

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)}\left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots\ldots(16)$$

جبکہ ن طاق ہو، اور

$$\text{جم ن ط} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}}\left(1 - \frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{جب}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)\ldots\ldots(17)$$

جبکہ ن جفت ہو۔

۸۷ —— دفعہ ماسبق کی طرح چونکہ جب ن ط / جب ط، جم ط
میں ن ـ ۱ درجہ کا ایک جبری تفاعل ہے اس لیے اس کے لیے ایک

تناظر جملہ اجزائے ضربی میں معلوم کیا جا سکتا ہے جو (اجزائے ضربی) جم طہ میں خطی ہوں؛ اس صورت میں

$$\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\,،\ \text{جم}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}\,،\ \ldots\,،\ \text{جم}\,\frac{(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}$$

جم طہ کی وہ قیمتیں ہیں جن کے لیے جب ن طہ \ جب طہ صفر کے مساوی ہے۔ یہ قیمتیں لکھی جا سکتی ہیں:

$$\pm\,\text{جم}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\,،\ \pm\,\text{جم}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}\,،\ \ldots$$

پس حسب سابق

$$\text{جب ن طہ} \backslash \text{جب طہ} = 2^{\text{ن}-1}\,\text{جم طہ}\left(\text{جم}^2\text{طہ} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{طہ} - \text{جم}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\left(\text{جم}^2\text{طہ} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\,\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن طہ} \backslash \text{جب طہ} = 2^{\text{ن}-1}\left(\text{جم}^2\text{طہ} - \text{جم}^2\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^2\text{طہ} - \text{جم}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\left(\text{جم}^2\text{طہ} - \text{جم}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\,\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

اِن جملوں کو ہم حسب ذیل شکلوں میں لکھ سکتے ہیں:۔

$$\text{جب ن طہ} \backslash \text{جب طہ} = 2^{\text{ن}-1}\,\text{جم طہ}\left(\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{طہ}\right)\left(\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{طہ}\right)\ldots\left(\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\,\text{ن}} - \text{جب}^2\text{طہ}\right)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن طہ} \backslash \text{جب طہ} = 2^{\text{ن}-1}\left(\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{طہ}\right)\left(\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^2\text{طہ}\right)\ldots\left(\text{جب}^2\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\,\text{ن}} - \text{جب}^2\text{طہ}\right)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

(۱۱۷) آیندہ باب میں ہم یہ دکھائینگے کہ $\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ کی انتہا ن ہے جبکہ طہ لاانتہا چھوٹا ہو؛ پس

$$\text{ن} = 2^{\text{ن}-1}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}\,\ldots\ldots \quad (18)$$

بائیں جانب آخری جزوِ ضربی جب $\frac{(\text{ن}-2)\pi}{2\,\text{ن}}$ یا جب $\frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\,\text{ن}}$ ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔ پس

$$\text{جب ن طہ} \backslash \text{ن جب طہ} = \text{جم طہ} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-2)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{طہ}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right) \quad \ldots\ldots (19)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{جب ن طہ} \backslash \text{ن جب طہ} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{طہ}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right) \quad \ldots\ldots (20)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۸۸ ـــــ جملہ جم ن طہ ـ جم ن فہ کو جم طہ کا ن ویں درجہ کا ایک جبری تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے اور اس لیے اُس کو اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے؛ جم طہ کی وہ قیمتیں جن کے لیے یہ جملہ معدوم ہوتا ہے یہ ہیں

$$\text{جم فہ، جم}\left(\text{فہ} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\text{، جم}\left(\text{فہ} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right)\text{،} \ldots\ldots$$

اس لیے

$$\text{جم ن طہ} - \text{جم ن فہ} = 2^{\text{ن}-1} \prod_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \left\{\text{جم طہ} - \text{جم}\left(\text{فہ} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\} \quad \ldots\ldots (21)$$

۸۹ ـــــ[1] اب ہم جملہ $\text{لا}^{2\text{ن}} - 2\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن طہ} + 1$ کے اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$\text{لا}^{\text{ن}} - 2\,\text{جم ن طہ} + \text{لا}^{-\text{ن}} = \left(\text{لا}^{\text{ن}} + \text{لا}^{-\text{ن}+1}\right)\left(\text{لا} - 2\,\text{جم طہ} + \text{لا}^{-1}\right)$$
$$+\, 2\,\text{جم طہ}\left(\text{لا}^{\text{ن}-1} - 2\,\text{جم}(\text{ن}-1)\,\text{طہ} + \text{لا}^{-\text{ن}+1}\right)$$
$$-\left(\text{لا}^{\text{ن}-2} - 2\,\text{جم}(\text{ن}-2)\,\text{طہ} + \text{لا}^{-\text{ن}+2}\right)$$

---

[1] فیررز (Ferrers) نے یہ طریقہ میسنجر آف میتھمیٹکس کی پانچویں جلد میں بیان کیا ہے۔

اگر ہم $\text{لا}^{\text{ن}} - ۲\,\text{جم ن ط} + \text{لا}^{-\text{ن}}$ کو $\text{ع}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کریں تو ہم اس متماثلہ کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \left(\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{-\text{ن}+۱}\right)\text{ع}_۱ + ۲\,\text{ع}_{\text{ن}-۱}\,\text{جم ط} - \text{ع}_{\text{ن}-۲}\text{؛}$$

اس مساوات سے ظاہر ہے کہ $\text{ع}_{\text{ن}}$، $\text{ع}_۱$ سے تقسیم پذیر ہے بشرطیکہ $\text{ع}_{\text{ن}-۱}$ اور $\text{ع}_{\text{ن}-۲}$، $\text{ع}_۱$ سے تقسیم پذیر ہوں۔

$$\text{اب}\quad \text{ع}_۲ = \left(\text{لا} - ۲\,\text{جم ط} + \text{لا}^{-۱}\right)\left(\text{لا} + ۲\,\text{جم ط} + \text{لا}^{-۱}\right)$$

اس لیے $\text{ع}_۲$، $\text{ع}_۱$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $\text{ع}_۳$ بھی تقسیم پذیر ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

(118) پس $\text{ع}_{\text{ن}}$، $\text{ع}_۱$ سے تقسیم پذیر ہے اور اس لیے $\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + ۱$ کا ایک جزو ضربی $\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم ط} + ۱$ ہے؛ اب چونکہ جم ن ط کو بدلے بغیر ط کو $\text{ط} + \frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}$ میں تبدیل کیا جا سکتا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}\right) + ۱$$

دیئے ہوئے جملہ کا ایک جزو ضربی ہے جبکہ ر کوئی صحیح عدد ہو۔ اگر ہم فرض کریں ر = ۰، ۱، ۲، ... ن - ۱ تو ہمیں دیئے ہوئے جملہ کے ن مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور کل اجزائے ضربی یہی ہیں؛ پس

$$\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + ۱ = \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱}\left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}\right) + ۱\right\} \quad ...(۲۲)$$

اس کو شکل ذیل میں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + \text{ا}^{۲\text{ن}} = \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱}\left\{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{ا}\,\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^۲\right\} \quad ...(۲۳)$$

۹۰ ——— مساوات (۲۲) میں رکھو ط = ۰ تو

$$\left(\text{لا}^{\text{ن}} - ۱\right)^۲ = \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱}\left(\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{ر}\,\pi}{\text{ن}} + ۱\right)$$

اور چونکہ $\text{جم}\,\frac{۲ر\pi}{\text{ن}} = \text{جم}\,\frac{۲(\text{ن}-ر)\pi}{\text{ن}}$ اس لیے بائیں جانب کے اجزائے ضربی میں سے دو دو مساوی ہیں اِلّا آنکہ جب، ن جفت ہو تو ایک واحد جزوِ ضربی $\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے، اور خواہ ن جفت ہو یا طاق بہرصورت جزو ضربی $\text{لا}^{۲} - ۲\text{لا} + ۱$ ہے؛ اس لیے

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا}^{۲} - ۱) \prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)} \left(\text{لا}^{۲} - ۲\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲ر\pi}{\text{ن}} + ۱\right) \quad \ldots\ (۲۴)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{لا}^{\text{ن}} - ۱ = (\text{لا} - ۱) \prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)} \left(\text{لا}^{۲} - ۲\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲ر\pi}{\text{ن}} + ۱\right) \quad \ldots\ (۲۵)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

نیز ضابطہ (۲۲) میں $\text{ط} = \frac{\pi}{\text{ن}}$ رکھنے سے

$$(\text{لا}^{\text{ن}} + ۱)^{۲} = \prod_{ر=۰}^{ر=\text{ن}-۱} \left\{\text{لا}^{۲} - ۲\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲ر+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} ؛$$

لیکن $\text{جم}\,\frac{(۲ر+۱)\pi}{\text{ن}} = \text{جم}\,\frac{۲(\text{ن}-ر)-۱}{\text{ن}}\pi$

اس لیے دو دو اجزائے ضربی مساوی ہیں اِلّا آنکہ جب، ن طاق ہو تو واحد جزو ضربی $\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} + ۱$ ہے؛ پس

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = \prod_{ر=۰}^{ر=\frac{۱}{۲}\text{ن}-۱} \left\{\text{لا}^{۲} - ۲\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲ر+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} \quad \ldots\ (۲۶)$$

جبکہ ن جفت ہو، اور

$$\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = (\text{لا} + ۱) \prod_{ر=۰}^{ر=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۳)} \left\{\text{لا}^{۲} - ۲\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲ر+۱)\pi}{\text{ن}} + ۱\right\} \quad \ldots\ (۲۷)$$

جبکہ ن طاق ہو۔

۱۹ــــ مساوات (۲۲) میں رکھو لا = ا تو

$$\text{۱} - \text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}} \prod_{\text{ر}=\text{۰}}^{\text{ر}=\text{ن}-\text{۱}} \left\{ \text{۱} - \text{جم}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲ر}\pi}{\text{ن}}\right) \right\} ;$$

ط کو ۲ ط میں تبدیل کرنے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ن ط} = \text{۲}^{\text{۲ن}-\text{۲}}\,\text{جب}^{\text{۲}}\,\text{ط}\;\text{جب}^{\text{۲}}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\text{جب}^{\text{۲}}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\text{جب}^{\text{۲}}\left(\text{ط} + \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}}\pi\right)$$

$$\text{یا}\quad \text{جب ن ط} = \pm\,\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جب ط}\;\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}}\pi\right)$$

جس میں مبہم علامت ابتک غیر معین ہے۔ دفعہ ۵۱ میں یہ بتایا جا چکا ہے کہ جب ط اور جم ط کی رقوم میں جب ن ط کے پھیلاؤ کی شکل معین ہے، اس لیے بائیں جانب کے حاصل ضرب کی علامت ہمیشہ ایک ہی ہے! اب رکھو ط = $\frac{\pi}{\text{۲ن}}$ تو صریحاً علامت جو لیجانی چاہیے مثبت ہے کیونکہ ہر جزو ضربی مثبت ہے۔

اس لیے

$$\text{جب ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جب ط}\;\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{ن}}\pi\right) \quad \ldots\ldots (\text{۲۸})$$

(اگر ۲۸) میں ط کو ط + $\frac{\pi}{\text{۲ن}}$ سے بدل دیا جائے تو

$$\text{جم ن ط} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\pi}{\text{۲ن}}\right)\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}}\right)\ldots\text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{۲ن}-\text{۱}}{\text{۲ن}}\pi\right) \quad \ldots\ldots (\text{۲۹})$$

مسئلہ (۲۸) میں ط = ۰ رکھنے اور جذر المربع لینے سے مسئلہ (۱۸) حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح (۲۹) سے مسئلہ (۱۵) اخذ کیا جا سکتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق صحیح عدد ہو تو جب ن ط + جم ن ط
جب ط + جم ط سے، ورنہ جب ط − جم ط سے
تقسیم پذیر ہے۔

فرض کرو $ع_ن = \text{جب}\,ن\,ط + \text{جم}\,ن\,ط$

تب $ع_ن + ع_{ن-۴} = ۲\,\text{جم}\,۲ط \times ع_{ن-۲} = ۲(\text{جم}^۲ط - \text{جب}^۲ط)\,ع_{ن-۲}$

پس اگر $ع_{ن-۴}$، جم ط + جب ط سے یا جم ط − جب ط سے تقسیم پذیر ہے تو $ع_ن$ بھی اُسی مقدار سے تقسیم پذیر ہے۔ اب $ع_۱ =$ جب ط + جم ط، اس لیے $ع_۵$، $ع_۹$، $ع_{۱۳}$، ... سب کے سب جب ط + جم ط سے تقسیم پذیر ہیں، نیز $ع_{-۱} =$ جم ط − جب ط اس لیے $ع_۳$، $ع_۷$، $ع_{۱۱}$، ... سب کے سب جم ط − جب ط سے تقسیم پذیر ہیں۔

(۲) مس ن ط − مس ن ع کے اجزائے ضربی دریافت کرو۔

$$\text{مس}\,ن\,ط - \text{مس}\,ن\,ع = \frac{\text{جب}\,ن(ط-ع)}{\text{جم}\,ن\,ط\,\text{جم}\,ن\,ع}$$

ضابطہ (۲۸) میں ط کی بجائے ع − ط رکھو تو

$$\text{جب}\,ن(ط-ع) = (-۱)^{ن-۱}\,۲^{ن-۱}\prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱}\text{جب}\left(ط-ع-\frac{ر\pi}{ن}\right)$$

$$= (-۱)^{ن-۱}\,۲^{ن-۱}\,\text{جم}^{ن}ط\prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱}\text{جم}\left(ع+\frac{ر\pi}{ن}\right)\left\{\text{مس}\,ط-\text{مس}\left(ع+\frac{ر\pi}{ن}\right)\right\}$$

$$= (-۱)^{ن-۱}\,\text{جم}^{ن}ط\,\text{جب}\,ن\left(ع+\frac{\pi}{۲}\right)\prod_{ر=۰}^{ر=ن-۱}\left\{\text{مس}\,ط-\text{مس}\left(ع+\frac{ر\pi}{ن}\right)\right\}$$

نیز (۱۶) اور (۱۷) سے

$$\text{جم}\,ن\,ط = \text{جم}\,ط\prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}(ن-۱)}\left(۱-\frac{\text{جب}^۲ط}{\text{جب}^۲\frac{۲ر-۱}{۲ن}\pi}\right)\text{، یا }\prod_{ر=۱}^{ر=\frac{۱}{۲}ن}\left(۱-\frac{\text{جب}^۲ط}{\text{جب}^۲\frac{۲ر-۱}{۲ن}\pi}\right)$$

بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت۔ اب $1 - \frac{\text{جب}^2 \text{ط}}{\text{جب}^2 \text{ب}} = \text{جم}^2 \text{ط} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \text{ط}}{\text{مس}^2 \text{ب}}\right)$ اس لیے جم ن ط کا جملہ لکھا جا سکتا ہے

$$\text{جم ن ط} \prod_{\text{ر}=1}^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \text{ط}}{\text{مس}^2 \frac{2\text{ر}-1}{2\text{ن}} \pi}\right) \text{ یا جم}^{\text{ن}} \text{ط} \prod_{\text{ر}=1}^{\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \text{ط}}{\text{مس}^2 \frac{2\text{ر}-1}{2\text{ن}} \pi}\right)$$

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس ن ط} - \text{مس ن عہ} = (-1)^{\text{ن}-1} \frac{\text{جب ن}\left(\text{عہ} + \frac{\pi}{2}\right)}{\text{جم ن عہ}} \cdot \frac{\prod_{\text{ر}=0}^{\text{ر}=\text{ن}-1} \left\{\text{مس ط} - \text{مس}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}}{\prod_{\text{ر}=1} \left(1 - \frac{\text{مس}^2 \text{ط}}{\text{مس}^2 \frac{2\text{ر}-1}{2\text{ن}} \pi}\right)}$$

نسب نما میں حاصل ضرب $\text{ر} = \frac{1}{2}\text{ن}$ یا $\text{ر} = \frac{1}{2}(\text{ن} - 1)$ تک لینا چاہیے بموجب اس کے کہ ن جفت ہو یا طاق۔

ساتویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور $\text{عہ} = \frac{\pi}{\text{ن}}$ تو

$$\text{مس ن ف} = (-1)^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \text{مس ف مس}(\text{ف} + \text{عہ}) \ldots \text{مس}(\text{ف} + \overline{\text{ن}-1}\,\text{عہ})$$

اور $\text{ن مس ن ف} = \text{مس ف} + \text{مس}(\text{ف} + \text{عہ}) + \ldots + \text{مس}(\text{ف} + \overline{\text{ن}-1}\,\text{عہ})$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ۵ ط} - \text{جم ۵ ط}}{\text{جب ۵ ط} + \text{جم ۵ ط}} = \text{مس}\left(\text{۲ ط} - \frac{1}{4}\pi\right) \frac{1 - 2\,\text{جب ۲ ط} - 4\,\text{جب}^2 \text{۲ ط}}{1 + 2\,\text{جب ۲ ط} - 4\,\text{جب}^2 \text{۲ ط}}$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن جم ن عہ} = \text{جم عہ} + \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right) + \dots + \text{جم}\left(\text{عہ} + \frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}\pi\right)$$

جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔

(۱۲۱)

۴۔ اگر فہ = $\frac{\pi}{۱۲}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم فہ} + \text{جم ۳ فہ} + \text{جم ۹ فہ} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right)،$$

اور

$$\text{جم ۵ فہ} + \text{جم ۷ فہ} + \text{جم ۱۱ فہ} = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right)$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\frac{\pi}{15}\ \text{جم}\frac{2\pi}{15}\ \text{جم}\frac{3\pi}{15} \dots \text{جم}\frac{7\pi}{15} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\frac{2\pi}{7} + \text{جم}\frac{4\pi}{7} + \text{جم}\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

وہ کعبی مساوات بناؤ جس کی اصلیں ہیں

$$\text{جم}\frac{2\pi}{7}،\ \text{جم}\frac{4\pi}{7}،\ \text{جم}\frac{6\pi}{7}$$

۷۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{لا}^3 - 3\sqrt{3}\,\text{لا}^2 - 3\,\text{لا} + \sqrt{3} = 0$$

کی اصلیں مس ۲۰°، مس ۸۰°، مس ۱۴۰° ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^4\text{عہ} + \text{جب}^4 3\text{عہ} + \text{جب}^4 7\text{عہ} + \text{جب}^4 9\text{عہ} + \text{جب}^4 11\text{عہ} + \text{جب}^4 13\text{عہ} + \text{جب}^4 17\text{عہ} + \text{جب}^4 19\text{عہ} = \frac{13}{4}$$

جہاں عہ = $\frac{\pi}{20}$

۹۔ ثابت کرو کہ

$$2^{\text{ن}-1}\,\text{جب فہ جب}\left(\text{فہ} + \frac{2\pi}{\text{ن}}\right)\text{جب}\left(\text{فہ} + \frac{4\pi}{\text{ن}}\right)\dots\text{جب}\left(\text{فہ} + \frac{2\text{ن}-1}{\text{ن}}\pi\right)$$

$$= \text{جم}\frac{\text{ن}\pi}{2} - \text{جم ن}\left(\text{فہ} + \frac{\pi}{2}\right)$$

۱۰ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس عہ} + \text{مس}\left(\frac{\pi}{\text{۲ن}} - \text{عہ}\right) + \text{مس}\left(\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}} + \text{عہ}\right) + \text{مس}\left(\frac{\text{۳}\pi}{\text{۲ن}} - \text{عہ}\right) \ldots$$

۲ ن ارقام تک = ۲ ن قم ۲ ن عہ

۱۱ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}\,\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}}\ \text{جب}\,\frac{\text{۴}\pi}{\text{۲ن}} \ldots \text{جب}\,\frac{\text{ن}-\text{۴}}{\text{۲ن}}\pi\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}-\text{۲}}{\text{۲ن}}\pi\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}}{\text{۲ن}}\pi = \sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}}}$$

جہاں ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ہے ۔

۱۲ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ن}}{\text{۲ن}-\text{۱}} = \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}}}{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}-\text{۱}}} \times \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}}}{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}-\text{۱}}} \times \ldots \times \frac{\text{جب}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲ن}}\pi\right)}{\text{جب}^{\text{۲}}\frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{۲ن}-\text{۱}}\pi}$$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے ۔

۱۳ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ن فہ جب ن ط}}{\text{جب فہ جب ط}} = \text{۲}^{\text{ن}-\text{۱}}\left\{\text{جم}(\text{فہ}-\text{ط}) - \text{جم}(\text{فہ}+\text{ط})\right\}\left\{\text{جم}(\text{فہ}-\text{ط}) - \text{جم}\left(\text{فہ}+\text{ط}+\frac{\text{۲}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}\left\{\ldots + \frac{\text{۴}\pi}{\text{ن}}\right\}\ldots\ldots$$

بائیں جانب اجزائے ضربی کی تعداد ن ۔ ۱ ہے ۔

(122) ۱۴ ۔ ثابت کرو کہ م جب ن ط ۔ ن جب م ط ، $\text{جب}^{\text{۳}}$ ط سے تقسیم پذیر ہے اگر م اور ن طاق صحیح عدد ہوں ۔

۱۵ ۔ ثابت کرو کہ اگر م ایک مثبت صحیح عدد ہو تو $\text{قط}^{\text{۲م}}$ ا + $\text{قم}^{\text{۲م}}$ ا ، قم ۲ ا کی قوتوں کے ایک سلسلہ سے بیان کیا جا سکتا ہے ۔

۱۶ ۔ ثابت کرو کہ
$$\text{ن} = \frac{\text{جب ۲عہ جب ۴عہ} \ldots \text{جب}(\text{۲ن}-\text{۲})\text{عہ}}{\text{جب عہ جب ۳عہ} \ldots \text{جب}(\text{۲ن}-\text{۱})\text{عہ}}$$

جہاں $\text{عہ} = \frac{\pi}{\text{۲ن}}$

۱۷ ـ ثابت کرو کہ

$$(۱)\quad \frac{\text{جب}^{۲}\,\text{لا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ج})} = \Sigma\,\frac{\text{جب}^{۲}\,\text{ا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ج})}$$

$$(۲)\quad \frac{\text{جب}\,\text{لا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{لا}-\text{ج})} = \Sigma\,\frac{\text{جم}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}\,\text{ا}}{\text{جب}(\text{لا}-\text{ا})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ب})\,\text{جب}(\text{ا}-\text{ج})}$$

۱۸ ـ ثابت کرو کہ

$$(۱+\text{جم}\,\text{عہ})\left(۱+\text{جم}\left(\text{عہ}+\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\right)\ldots\left(۱+\text{جم}\left(\text{عہ}+\frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)\right)$$

کا حاصل ضرب ہے

$$۲^{۲-\text{ن}}\left\{(-۱)^{\frac{۱}{۲}\text{ن}}-\text{جم}\,\tfrac{۱}{۲}\text{ن}\,\text{عہ}\right\}^{۲} \quad \text{یا} \quad ۲^{۱-\text{ن}}\,(۱+\text{جم}\,\text{ن}\,\text{عہ})$$

بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔

۱۹ ـ ثابت کرو کہ

$$\text{ن}^{۲} = \left(\text{سہہ}\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)^{-۱} + \left(\text{سہہ}\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)^{-۱} + \left(\text{سہہ}\,\frac{۵\pi}{۲\text{ن}}\right)^{-۱} + \ldots$$

بائیں جانب ن رقمیں لیگئی ہیں ـ

۲۰ ـ ثابت کرو کہ

$$(\text{مس}\,۷\tfrac{۱}{۲}^{\circ} + \text{مس}\,۳۷\tfrac{۱}{۲}^{\circ} + \text{مس}\,۶۷\tfrac{۱}{۲}^{\circ})(\text{مس}\,۲۲\tfrac{۱}{۲}^{\circ} + \text{مس}\,۵۲\tfrac{۱}{۲}^{\circ} + \text{مس}\,۸۲\tfrac{۱}{۲}^{\circ}) = ۱۷ + ۸\sqrt{۳}$$

۲۱ ـ اگر م طاق ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\,\text{م}\,\text{فہ} = \text{مس}\,\text{فہ}\,\text{مس}\left(\text{فہ}+\frac{\pi}{\text{م}}\right)\text{مس}\left(\text{فہ}+\frac{۲\pi}{\text{م}}\right)\ldots\text{مس}\left(\text{فہ}+\frac{\text{م}-۱}{\text{م}}\pi\right)$$

۲۲ ـ اگر ۲۸ عہ = π تو ثابت کرو کہ

√۱۳ = ۲^۱۳ جب عہ جب ۲عہ × ... × جب ۱۳عہ،

اور جم ۲عہ + جم ۶عہ + جم ۱۸عہ = ۱/۲ √۷

۲۳ - ثابت کرو کہ مس π/۲ن مس ۲π/۲ن × ... × مس (ن-۱)/۲ن π = ۱
جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے -

۲۴ - ثابت کرو کہ

قم لا + قم (لا + ۲π/ن) + ... + قم (لا + ۲(ن-۱)π/ن)

= ن {قم ن لا + قم (ن لا + π) + ... + قم (ن لا + (ن-۱) π)}

(193)

۲۵ - ثابت کرو کہ

۲ (۱ + جم ن ط) یا (۱ + جم ن ط)/(۱ + جم ط)

۲ جم ط کے ایک منطق صحیح تفاعل کا مربع ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔ دکھاؤ

۱ + جم ۹ط = (۱ + جم ط) (۱۶ جم^۴ ط - ۸ جم^۳ ط - ۱۲ جم^۲ ط + ۴ جم ط + ۱)^۲

۲۶ - ثابت کرو کہ ۲^(ن-۱) جم^ن ط - جم ن ط، ۱ + ۲ جم ۲ط سے تقسیم پذیر ہے اگر ن کی شکل ۶م - ۱ ہو اور (۱ + ۲ جم ۲ط)^۲ سے تقسیم پذیر ہے اگر ن کی شکل ۶م + ۱ ہو جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے -

ثابت کرو کہ

۲^۱۰ جم^۱۱ ط - جم ۱۱ط = ۱۱ جم ط (۱ + ۲ جم ۲ط) {(۱ + ۲ جم ۲ط)^۳ + (۱ + ۲ جم ۲ط) + ۱}

۲۷ - اگر ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو اور

مس (۱/۴ π + ۱/۲ ف) = مس^ن (۱/۴ π + ۱/۲ ط)

توثابت کروکہ

$$\text{جب فہ} = \text{ن جب ط} \prod_{\text{ر}=1}^{\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left\{ \frac{1 + \text{جب}^2 \text{ط مم}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}{1 + \text{جب}^2 \text{ط مس}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}} \right\}$$

۲۸ - ثابت کروکہ شکل ف (جب ط، جم ط)/فہ (جب ط، جم ط) کا کوئی تفاعل جہاں ف اور فہ سے ن درجے کے منطق صحیح تفاعل تعبیر ہوتے ہیں اور جن میں $\text{جم}^{\text{ن}}$ ط شامل ہے شکل $\text{ا} \frac{\prod \text{جب} \frac{1}{2}(\text{ط} - \text{عہ})}{\prod \text{جب} \frac{1}{2}(\text{ط} - \text{عہ}')}$ میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں ا اور مقداریں عہ، عہَ منحصر نہیں ہیں ط پر اور شمار کنندہ میں ۲ ن اجزائے ضربی ہیں اور نسب نما میں ۲ ن اجزائے ضربی۔

اگر تفاعل $\frac{\text{ا جم ۲ط + ب جم ط + ج جب ط + د}}{\text{اَ جم ۲ط + بَ جم ط + جَ جب ط + دَ}}$ کو اس شکل میں بیان کیا جائے تو ثابت کروکہ Σ عہ اور Σ عہَ، π کے جفت ضعف ہیں۔

۲۹ - ثابت کروکہ $\text{مس} \frac{\pi}{11} + \text{۴ جب} \frac{2\pi}{11} = \sqrt{11}$

۳۰ - ثابت کروکہ

$$\frac{2^6 \text{جب}^7 \text{ط} + \text{جب ۷ط}}{2^6 \text{جم}^7 \text{ط} - \text{جم ۷ط}} = \text{مس ط مس}^2 \left(\text{ط} + \frac{\pi}{4}\right) \text{مس}^2 \left(\text{ط} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(124

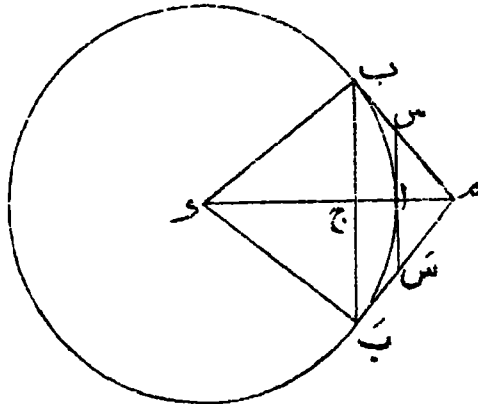
آٹھواں باب

ایک زاویے کے دائری تفاعل اور دائری ناپ کے درمیان رشتے

۹۲ ــــ اب ہم اُن مسئلوں کی تحقیق کرینگے جن سے ایسی حدود کا تعین ہوتا ہے جن کے درمیان ایک زاویہ کی جیب، جیب التمام، اور مماس واقع ہونے چاہئیں جبکہ اس زاویہ کا دائری ناپ ط، $\frac{1}{2}$ π سے کم ہو۔

پہلا مسئلہ جس کو ہم ثابت کرینگے یہ ہے کہ اگر ایک زاویہ کا دائری ناپ ط ہو جو $\frac{1}{2}$ π سے کم ہے تو

جب ط < ط < مس ط

اِلّا آنکہ ط = ۰

فرض کرو او ب = او بَ = ط؛ اور فرض کرو کہ م ب اور م بَ، ب اور بَ پر مماس ہیں، اور فرض کرو کہ ا پر کا مماس س ا سَ ہے۔
دفعہ ۱۱ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ قوس ا ب کا طول، ا س + س ب سے متجاوز نہیں ہوتا؛ اور اس طرح قوس ب ا بَ، ب س + بَ سَ + س سَ سے تجاوز نہیں کرتی اور اس لیے قوس ب ا بَ < ب م + م بَ، یا قوس ب ا < ب م۔
نیز

$$\text{قوس ب ا} > \text{ب ا} > \text{ب ج}$$

اس لیے

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{و ب}} < \frac{\text{قوس ب ا}}{\text{و ب}} < \frac{\text{ب م}}{\text{و ب}}$$

$$\text{اب ط} = \frac{\text{قوس ب ا}}{\text{و ب}}\text{، جب ط} = \frac{\text{ب ج}}{\text{و ب}} \text{ اور مس ط} = \frac{\text{ب م}}{\text{و ب}}$$

(125) اس لیے جب ط < ط < مس ط۔ اگر ط، $\frac{1}{2}\pi$ سے بڑا ہوتا تو م، و کی دوسری جانب واقع ہوتا اور وہ نامساواتیں جن کو ہم نے استعمال کیا ہے ممکن ہے درست نہ رہتیں۔
چونکہ جب ط < ط < مس ط، اس لیے $1 < \frac{\text{ط}}{\text{جب ط}} < \text{قط ط}$؛
اب فرض کرو کہ ط کو لا انتہا گھٹا دیا گیا ہے، تب قط ط کی انتہا جبکہ ط = ۰، ایک ہے؛ اس لیے نیز $\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}$ کی انتہا بھی جبکہ ط کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے ایک ہے۔ نیز چونکہ

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = (\text{ط قم ط})^{-1} \text{ اور } \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = \text{قط ط} \times (\text{ط قم ط})^{-1}$$

اس لیے ہمیں یہ مسئلے ملتے ہیں کہ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ کی انتہا جبکہ ط

کو لا انتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک ایک ہے۔
اس مسئلہ کو یوں بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:۔ مثلث و ا ب، قاطع و ا بَ اور مثلث و ب م مقدار کی صعودی ترتیب میں ہیں؛ اور مثلث و ا ب = $\frac{1}{2}$ و ا × ب ج = $\frac{1}{2}$ و ا^2 جب ط، نیز قاطع و ا ب = $\frac{1}{2}$ و ا^2 × ط، اور

$$\triangle \text{ و ب م} = \frac{1}{2} \text{ و ب} \times \text{ب م} = \frac{1}{2} \text{ و ب}^2 \times \text{مس ط}$$

اس لیے جب ط $<$ ط $<$ مس ط

۹۳ ـــــ دفعہ ۵ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ نظری مقاصد کے لیے زاویہ کا دائری ناپ دوسرے ناپوں کے مقابلہ میں زیادہ سہولت بخش ہے، اس کا سبب یہ ہے کہ اس ناپ میں زاویہ کی جیب اور مماس دونوں انتہا میں خود زاویہ کے مساوی ہوتے ہیں جبکہ زاویہ کو لا انتہا گھٹا دیا جاتا ہے؛ لیکن اگر ہم کوئی اور ناپ استعمال کریں، مثلاً ثانئے، تو یہ صورت نہیں ہوتی۔ چنانچہ ثانیوں کی صورت میں

$$\frac{\text{جب ن}''}{\text{ن}''} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \times \frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$$

$$\frac{\text{مس ن}''}{\text{ن}''} = \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} \times \frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$$

جہاں ن ثانیوں کا دائری ناپ ط ہے؛ اس لیے $\frac{\text{جب ن}''}{\text{ن}''}$، $\frac{\text{مس ن}''}{\text{ن}''}$ کی انتہاؤں میں سے ہر ایک جبکہ ن کو لا انتہا گھٹا دیا جائے $\frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$ کے مساوی ہے۔ پس اگر ہم دائری ناپ کی بجائے ثانیے استعمال کریں تو ضابطوں کی اُس بڑی جماعت میں جس میں ط = ۰ کے لیے $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ کی انتہائیں شریک ہوتی ہیں ایک کی بجائے ہمیشہ عدد $\frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}$

واقع ہوتا رہیگا۔

(126) م جب $\frac{\text{ع}}{\text{م}}$ ، م مس $\frac{\text{ع}}{\text{م}}$ میں سے ہر ایک کی اِنتہا جبکہ م لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے ع ہے، کیونکہ م جب $\frac{\text{ع}}{\text{م}} = \text{ع} \left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)$ ، م مس $\frac{\text{ع}}{\text{م}} = \text{ع} \left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)$ جہاں ط $= \frac{\text{ع}}{\text{م}}$ ، اور جب م کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو ط لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے۔

$\frac{\text{جب ف ط}}{\text{جب ق ط}}$ اور $\frac{\text{مس ف ط}}{\text{مس ق ط}}$ میں سے ہر ایک کی انتہا جبکہ ط لا انتہا گھٹا دیا جائے $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہے۔

۹۴ — اگر ط $< \frac{1}{2}\pi$ تو مس $\frac{1}{2}$ ط $> \frac{1}{2}$ ط اور جب $\frac{1}{2}$ ط $> \frac{1}{2}$ ط جم $\frac{1}{2}$ ط، اس لیے

$$\text{۲ جب } \tfrac{1}{2}\text{ط . جم } \tfrac{1}{2}\text{ط} > \text{ط جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ط}$$

یا $\quad \text{جب ط} > \text{ط} \left(1 - \text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{ط}\right)$

اب $\quad \text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{ط} < \left(\tfrac{1}{2}\text{ط}\right)^2$

اس لیے $\quad \text{جب ط} > \text{ط} \left(1 - \tfrac{1}{4}\text{ط}^2\right)$ ، یا $\text{جب ط} > \text{ط} - \tfrac{1}{4}\text{ط}^3$

نیز $\text{جم ط} = 1 - 2\,\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{ط}$ اور یہ بڑا ہے $1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\text{ط}\right)^2$ سے یا

$$\text{جم ط} > 1 - \tfrac{1}{2}\text{ط}^2$$

نیز چونکہ جب $\tfrac{1}{2}$ ط $> \tfrac{1}{2}\text{ط} - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\text{ط}\right)^3$ اس لیے

$$\text{جم ط} < 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\text{ط} - \tfrac{1}{32}\text{ط}^3\right)^2 < 1 - \tfrac{1}{2}\text{ط}^2 + \tfrac{1}{16}\text{ط}^4 - \frac{2\,\text{ط}^6}{32^2}$$

پس $\text{جم ط} < 1 - \tfrac{1}{2}\text{ط}^2 + \tfrac{1}{16}\text{ط}^4$ ۔ محصلہ نتائج کو بیان کیا جاسکتا ہے اس طرح:

اگر ایک زاویہ کا دائری ناپ ط، ہو جو $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے

تو جب ط، ط اور ط ـ $\frac{1}{6}$ ط^3 کے درمیان واقع ہوتا ہے اور
جم ط
۱ ـ $\frac{1}{2}$ ط^2 اور ۱ ـ $\frac{1}{2}$ ط^2 + $\frac{1}{16}$ ط^4
کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۹۵ـــ اب ہم یہ دکھائینگے کہ اگر ط > $\frac{1}{2}$ π تو
جب ط > ط ـ $\frac{1}{6}$ ط^3 اور جم ط > ۱ ـ $\frac{1}{2}$ ط^2 + $\frac{1}{24}$ ط^4
اس سے جب ط اور جم ط کی حدود دفعہ سابق میں حاصل کردہ حدود سے زیادہ تنگ ہو جاتی ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ

۳ جب $\frac{1}{3}$ ط ـ جب ط = ۴ جب^3 $\frac{1}{3}$ ط،

۳ جب $\frac{ط}{3^2}$ ـ جب $\frac{ط}{3}$ = ۴ جب^3 $\frac{ط}{3^2}$ ،

- - - - - - - - - - - - - - -

۳ جب $\frac{ط}{3^ن}$ ـ جب $\frac{ط}{3^{ن-1}}$ = ۴ جب^3 $\frac{ط}{3^ن}$

ان مساواتوں کو علی الترتیب ۱، ۳، ۳^2، . . .، ۳$^{ن-1}$ سے ضرب دو اور پھر جمع کرو تو

۳^ن جب $\frac{ط}{3^ن}$ ـ جب ط = ۴ (جب^3 $\frac{ط}{3}$ + ۳ جب^3 $\frac{ط}{3^2}$ + . . . ۳$^{ن-1}$ × جب^3 $\frac{ط}{3^ن}$)

اس لیے (127)

ط × $\frac{جب \frac{ط}{3^ن}}{\frac{ط}{3^ن}}$ ـ جب ط > ۴ ($\frac{ط^3}{3^3}$ + $\frac{ط^3}{3^5}$ + . . . + $\frac{ط^3}{3^{2ن+2}}$)

اب ن کو لا انتہا بڑا کرو تو $\frac{جب \frac{ط}{3^ن}}{\frac{ط}{3^ن}}$ کی انتہا ایک ملتی ہے اور سلسلہ

۱ + $\frac{1}{3^2}$ + $\frac{1}{3^4}$ + . . .

کی انتہا $= \dfrac{۱}{۱-\dfrac{۱}{۳^{۲}}} = \dfrac{۹}{۸}$؛

اس لیے $\text{ط} - \text{جب ط} < \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}$، یا $\text{جب ط} > \text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}$

نیز $\text{جم ط} = ۱ - ۲\,\text{جب}^{۲}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}$

اس لیے $\text{جم ط} < ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۲}\text{ط} - \frac{۱}{۴۸}\text{ط}^{۳}\right)^{۲} < ۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۲۴}\text{ط}^{۴}$

پس جب ط، ط اور $\text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ اور جم ط، $۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲}$ اور $۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۲۴}\text{ط}^{۴}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ط، $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہو۔

نیز چونکہ مس ط = جب ط \ جم ط اس لیے

$\text{مس ط} > \left(\text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲}\right)^{-۱} > \left(\text{ط} - \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۳}\right)\left(۱ + \frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲} + \frac{۱}{۴}\text{ط}^{۴}\right)$

یا $\text{مس ط} > \text{ط} + \frac{۱}{۳}\text{ط}^{۳} + \frac{۱}{۶}\text{ط}^{۵} - \frac{۱}{۲۴}\text{ط}^{۷}$، اس لیے $\text{مس ط} > \text{ط} + \frac{۱}{۳}\text{ط}^{۳}$

یولر کا حاصل ضرب

۹۶. ——— چونکہ $\text{جب ط} = ۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}\,\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\text{ط}$،

$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۲}}$،

$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۲}} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۳}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲^{۳}}$

. . . .

$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{ن-۱}} = ۲\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲^{ن}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{۲^{ن}}$

اس لیے عمل ضرب سے

$$\text{جب } ط = ۲^{ن} \text{ جم } \frac{ط}{۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۳} \cdots \text{ جم } \frac{ط}{۲^{ن}} \text{ جب } \frac{ط}{۲^{ن}}$$

اب جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جاتا ہے تو $۲^{ن}$ جب $\frac{ط}{۲^{ن}}$ کی انتہا ط ہے۔ پس حاصل ضرب (123)

$$\text{جم } \frac{ط}{۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۲} \text{ جم } \frac{ط}{۲^۳} \cdots \text{ جم } \frac{ط}{۲^{ن}}$$ -

کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کیا جائے $\frac{\text{جب } ط}{ط}$ ہے۔

اس حاصل ضرب میں رکھو $ط = \frac{1}{۲} \pi$ تو ہمیں π کے لیے ویٹا کا یہ جملہ

$$\frac{۲}{\pi} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}}{۲} \times \cdots$$

حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ

(۱) ثابت کرو کہ جیسے ط، صفر سے $\frac{1}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے $\frac{\text{جب } ط}{ط}$ مسلسل گھٹتا ہے اور $\frac{\text{مس } ط}{ط}$ مسلسل بڑھتا ہے۔

ہم دکھائیں گے کہ $\frac{\text{جب } ط}{ط} > \frac{\text{جب } (ط + ھ)}{ط + ھ}$، یعنی

$$(ط + ھ) \text{ جب } ط > ط \,(\text{جم } ھ \text{ جب } ط + \text{جم } ط \text{ جب } ھ)$$ یا

$$\frac{\text{مس } ط}{ط} > \frac{\text{جب } ھ}{ھ + (1 - \text{جم } ھ)\, ط}$$

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{\text{مس } ط}{ط} > 1 > \frac{\text{جب } ھ}{ھ}$ اور $\frac{\text{جب } ھ}{ھ} > \frac{\text{جب } ھ}{ھ + (1 - \text{جم } ھ)\, ط}$

کیونکہ ۱ ـ جم ھ مثبت ہے، اور اس لیے نامساوات بالا ثابت ہو چکی، اس طرح $\frac{\text{جب } ط}{ط}$

ایک سے $\frac{۲}{\pi}$ تک گھٹتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے۔
پھر ہم یہ دکھائینگے کہ

$$\frac{\text{مس}(ط+ھ)}{ط+ھ} > \frac{\text{مس}\,ط}{ط}\text{، یا}$$

$$ط\,\text{جب}\,(ط+ھ)\,\text{جم}\,ط > (ط+ھ)\,\text{جب}\,ط\,\text{جم}\,(ط+ھ)$$

یعنی $ط\,\text{جب}\,ھ > ھ\,\text{جب}\,ط\,\text{جم}\,(ط+ھ)$

یا $\frac{\text{جب}\,ھ}{ھ} > \frac{\text{جب}\,ط}{ط}\,\text{جم}\,(ط+ھ)$؛

اب ہم فرض کر سکتے ہیں ھ < ط، پس پہلے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{جب}\,ھ}{ھ} > \frac{\text{جب}\,ط}{ط}\text{، اور اس لیے } \frac{\text{جب}\,ط}{ط} > \frac{\text{جب}\,ط}{ط}\,\text{جم}\,(ط+ھ)$$

اس طرح $\frac{\text{مس}\,ط}{ط}$ ایک سے ∞ تک بڑھتا ہے جیسے ط صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے۔
دفعہ ۳۲ میں دی ہوئی جم ط اور جب ط کی ترسیموں سے یہ نظر آئیگا کہ مسائل بالا درست ہیں؛ چنانچہ پہلی صورت میں وہ نسبت جو معین کو فصلہ کے ساتھ ہے گھٹتی ہے اور دوسری صورت میں بڑھتی ہے جیسے ط صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ مساوات مس لا = لہ لا کی حقیقی اصلوں کی تعداد لا انتہا ہے، نیز بڑی اصلوں کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

دفعہ ۳۱ میں تفاعل مس لا کی ترسیم کھینچی گئی ہے؛ اُسی شکل میں تفاعل لہ لا کی ترسیم کھینچو، یہ ایک خطِ مستقیم ہے جو و میں سے گزرتا ہے۔ یہ خطِ مستقیم صریحاً مس لا کی ترسیم کی ہر شاخ کو قطع کریگا، اور لا کی وہ قیمتیں جو نقاطِ تقاطع کے (129) تناظر ہیں دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔ اس لیے مساوات کی ایک اصل

$$لا = (۲ک-۱)\frac{\pi}{۲}\text{ اور }(۲ک+۱)\frac{\pi}{۲}$$

کے درمیان ہے جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ اگر ک لہ بڑا ہو تو $(\text{۲ک}+۱)\frac{\pi}{۲}$ صریحاً ایک تقریبی حل ہے: اس سے زیادہ نزدیک کا تقریب معلوم کرنا ہو تو فرض کرو $\text{لا} = (\text{۲ک}+۱)\frac{\pi}{۲} + \text{ما}$ جہاں ما چھوٹا ہے، تب $-\text{مم ما} = \text{لہ ما} + (\text{۲ک}+۱)\frac{\text{لہ}\pi}{۲}$: اب جم ما = ۱، جب ما = ما رکھنے سے اور $\text{ما}^۲$ کو نظرانداز کرنے سے

$$-۱ = (\text{۲ک}+۱)\frac{\text{لہ}\pi}{۲}\,\text{ما}\ \text{یا}\ \text{ما} = -\frac{۲}{(\text{۲ک}+۱)\,\text{لہ}\,\pi}\text{، اس لیے}\ \text{لا} = (\text{۲ک}+۱)\frac{\pi}{۲} - \frac{۲}{(\text{۲ک}+۱)\,\text{لہ}\,\pi}$$

تقریبی حل ہے۔ اس سے بھی زیادہ تقریبی حل معلوم کرنے کے لیے $\text{ما}^۳$ نظرانداز کرو تو اُن رقموں میں جن میں $\text{ما}^۲$ شامل ہے $\text{ما} = -\frac{۲}{(\text{۲ک}+۱)\,\text{لہ}\,\pi}$ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{۲}\text{ما}^۲ - ۱ = \left\{\text{لہ ما} + (\text{۲ک}+۱)\frac{\text{لہ}\pi}{۲}\right\}\text{ما} = \text{لہ ما}^۲ + \text{ما}(\text{۲ک}+۱)\frac{\text{لہ}\pi}{۲}\text{،}$$

اس لیے

$$\text{ما}(\text{۲ک}+۱)\frac{\text{لہ}\pi}{۲} = -۱ + \left(\frac{۱}{۲} - \text{لہ}\right)\frac{۴}{(\text{۲ک}+۱)^۲\,\text{لہ}^۲\,\pi^۲}$$

یا

$$\text{ما} = -\frac{۲}{(\text{۲ک}+۱)\,\text{لہ}\,\pi} + \left(\frac{۱}{۲} - \text{لہ}\right)\frac{۸}{(\text{۲ک}+۱)^۳\,\text{لہ}^۳\,\pi^۳}$$

اس لیے لا کی تقریبی قیمت ہے

$$\text{لا} = (\text{۲ک}+۱)\frac{\pi}{۲} - \frac{۲}{(\text{۲ک}+۱)\,\text{لہ}\,\pi} + \left(\frac{۱}{۲} - \text{لہ}\right)\frac{۸}{(\text{۲ک}+۱)^۳\,\text{لہ}^۳\,\pi^۳}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{\text{ط}} = \text{مم ط} + \frac{۱}{۲}\text{مس}\frac{\text{ط}}{۲} + \frac{۱}{۴}\text{مس}\frac{\text{ط}}{۴} + \frac{۱}{۸}\text{مس}\frac{\text{ط}}{۸} + \ldots\ \text{تک}$$

یہ آسانی کے ساتھ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{۱}{۲}\text{مم}\frac{\text{ط}}{۲} - \text{مم ط} = \frac{۱}{۲}\text{مس}\frac{\text{ط}}{۲}\text{،}$$

اس لیے نیز $\frac{1}{4}$ مم $\frac{ط}{4}$ − $\frac{1}{2}$ مم $\frac{ط}{2}$ = $\frac{1}{4}$ مس $\frac{ط}{4}$،

. . . .

$\frac{1}{2^ن}$ مم $\frac{ط}{2^ن}$ − $\frac{1}{2^{ن-1}}$ مم $\frac{ط}{2^{ن-1}}$ = $\frac{1}{2^ن}$ مس $\frac{ط}{2^ن}$

اس لیے عمل جمع سے

$\frac{1}{2}$ مس $\frac{ط}{2}$ + $\frac{1}{2^2}$ مس $\frac{ط}{2^2}$ + ... + $\frac{1}{2^ن}$ مس $\frac{ط}{2^ن}$ = $\frac{1}{2^ن}$ مم $\frac{ط}{2^ن}$ − مم ط

اب اگر ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو $\frac{1}{2^ن}$ مم $\frac{ط}{2^ن}$ کی انتہائی قیمت $\frac{1}{ط}$ ہے، اس لیے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ $\frac{1}{ط}$ − مم ط ہے ۔

اگر ہم رکھیں ط = $\frac{1}{2}$ π تو حسب ذیل مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{1}{π}$ = $\frac{1}{4}$ مس $\frac{π}{4}$ + $\frac{1}{8}$ مس $\frac{π}{8}$ + $\frac{1}{16}$ مس $\frac{π}{16}$ + ...

بعض جملوں کی انتہایں

(130)

۹۷ ——— اگر ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو جم $\frac{ط}{ن}$، $\frac{جب \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}$ میں سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے؛ اس لیے (جم $\frac{ط}{ن}$)^ر، $\left(\frac{جب \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^ر$ میں سے ہر ایک کی انتہا بھی ایک ہے بشرطیکہ ر کوئی عدد ہو جو ن کے تابع نہیں ہے : لیکن اگر ر، ن کا تفاعل ف (ن) ہو جو ن کے لاانتہا ہونے پر لاانتہا ہو جاتا ہے تو جملے (جم $\frac{ط}{ن}$)$^{ف(ن)}$، $\left(\frac{جب \frac{ط}{ن}}{\frac{ط}{ن}}\right)^{ف(ن)}$ جماعت 1^∞ سے متعلق غیر معین شکلیں ہیں اور ان کی

انتہاؤں کی قیمتیں ف (ن) کی شکل پر منحصر ہیں ۔

(جم ط/ن)^ف(ن) کی انتہائی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو ء سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک و ء = ۱/۲ ف (ن) لوک و (۱ − جب۲ ط/ن)

اب ہم اس مسئلہ کو معلومہ مسئلہ کے طور پر مان لینگے کہ اگر لا کو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو

نہا (لوک و (۱ − لا))/لا = − ۱

تب چونکہ

لوک و ء = ۱/۲ ف (ن) جب۲ ط/ن (لوک و (۱ − جب۲ ط/ن))/(جب۲ ط/ن)

اس لیے لوک و ء کی انتہا ' ۱/۲ ف (ن) جب۲ ط/ن کی انتہا کے مساوی ہے مگر مختلف علامت کے ساتھ بشرطیکہ یہ موخرالذکر انتہا موجود ہو ۔ ہم حسب ذیل صورتوں میں لوک و ء کی انتہا اور اس لیے ء کی انتہا معلوم کر سکتے ہیں :-

(۱) اگر ف (ن) = ن تو اس صورت میں ف (ن) جب۲ ط/ن = ن جب ط/ن جب ط/ن اور ن جب ط/ن کی انتہا ط ہے اور جب ط/ن کی صفر ہے ؛ اس لیے لوک و ء کی انتہا صفر ہے اور اس لیے ء کی انتہا ایک ہے ۔

(181)

(۲) اگر ف (ن) = ن۲ تو اس صورت میں ف (ن) جب۲ ط/ن = (ن جب ط/ن)۲ جس کی انتہا ط۲ ہے ۔ اس لیے لوک و ء کی انتہا − ۱/۲ ط۲ ہے اور ء کی و^(− ۱/۲ ط۲) ۔

(۳) اگر ف(ن) = $\text{ن}^{\text{ف}}$ جہاں ف > ۲ تو اس صورت میں

ف(ن) $\text{جب}^{۲}\frac{\text{ط}}{\text{ن}} = \text{ن}^{\text{ف}-۲}\left(\text{ن جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)^{۲}$ اور یہ لا انتہا بڑھتا ہے جبکہ (ن)

لا انتہا بڑھتا ہے۔ اس لیے $\text{لوک}_{\text{و}}$ ع کی انتہا ـ ∞ ہے اور اس لیے ع کی انتہا صفر ہے۔

۹۸ ـــ $\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرنے کے لیے

چونکہ $\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}$ ایک سے کم ہے اور $\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\text{مس}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}$ (یا جم ط) سے بڑا ہے

اس لیے $\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا، $۱^{\text{ن}}$ یا ۱ اور $\left(\text{جم}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہے ؛ اس طرح دفعہ ماسبق کی صورت (۱) سے $\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا ایک ہے ۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ $\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}^{۲}}$ اور $\left(\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}{\frac{\text{ط}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}^{\text{ف}}}$

(ف > ۲) کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب ۱ اور $\text{و}^{-\frac{۱}{۲}\text{ط}^{۲}}$ کے درمیان، اور ایک اور صفر کے درمیان واقع ہیں ۔

زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے سلسلے اس کے دائری ناپ کی قوتوں میں

۹۹ ـــ چوتھے باب کے ضابطوں (۳۹)، (۴۰) میں ا کی بجائے ط لکھو

اور فرض کرو لا = ن ط تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^{\text{ن}-1}\text{ط جب ط} - \frac{\text{ن(ن}-1)(\text{ن}-2)}{\underline{\lvert 3}}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{ط جب}^{3}\text{ط} + \dots$$

$$-(-1)^{\text{ر}}\frac{\text{ن(ن}-1)\dots(\text{ن}-2\text{ر})}{\underline{\lvert 2\text{ر}+1}}\,\text{جم}^{\text{ن}-2\text{ر}-1}\text{ط جب}^{2\text{ر}+1}\text{ط} + \dots,$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{ن(ن}-1)}{\underline{\lvert 2}}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\text{ط جب}^{2}\text{ط} + \dots$$

$$+(-1)^{\text{س}}\frac{\text{ن(ن}-1)\dots(\text{ن}-2\text{س}+1)}{\underline{\lvert 2\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-2\text{س}}\text{ط جب}^{2\text{س}}\text{ط} + \dots.$$

(132) ان سلسلوں کو حسب ذیل شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے:-

$$\text{جب لا} = \text{لا جم}^{\text{ن}-1}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right) - \frac{\text{لا(لا}-\text{ط)(لا}-2\text{ط)}}{\underline{\lvert 3}}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{3} + \dots$$

$$+(-1)^{\text{ر}}\frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}\dots(\text{لا}-2\text{رط})}{\underline{\lvert 2\text{ر}+1}}\,\text{جم}^{\text{ن}-2\text{ر}-1}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{2\text{ر}+1} + \dots$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{ط} - \frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}}{\underline{\lvert 2}}\,\text{جم}^{\text{ن}-2}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{2} + \dots\dots.$$

$$+(-1)^{\text{س}}\frac{\text{لا(لا}-\text{ط)}\dots(\text{لا}-\overline{2\text{س}-1}\,\text{ط})}{\underline{\lvert 2\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-2\text{س}}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{2\text{س}} + \dots$$

ان میں سے ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد ن پر منحصر ہوتی ہے اور جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے رقموں کی تعداد لا انتہا بڑھتی ہے۔ پس اس غرض کے لیے کہ جملوں کی انتہائیں حاصل ہوں جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یہ ضروری ہے کہ ان میں سے ہر سلسلہ کی بجائے ایک ایسا

سلسلہ رکھا جائے جس میں رقموں کی تعداد مستقل ہو اور ن کے ساتھ لا انتہا نہ بڑھے ۔

جب لا کے لیے جو سلسلہ ہے اُس کی (ر + ۲) ویں رقم کو (ر + ۱) ویں رقم کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ہے

$$-\frac{(\text{لا}-\overline{2ر+1}\,\text{ط})(\text{لا}-\overline{2ر+2}\,\text{ط})}{(2ر+2)(2ر+3)}\times\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2 ؛$$

یہ عدد منفی ہے اور

$$\left[\frac{\text{لا}^2}{(2ر+2)(2ر+3)}+\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^2+\frac{\text{لا}^2}{\text{ن}}\times\frac{1}{ر+1}\right]\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2$$

سے عدداً کم ہے ۔

اگر لا کی کوئی مستقل قیمت ہو تو $\left(\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}\right)^2$ گھٹتا ہے جیسے ن بڑھتا ہے ؛

ن اور ر کی قیمتیں ن، ، ر منتخب کی جا سکتی ہیں ایسی کہ جملہ بالا کی قیمتیں ن ≥ ن، اور ر ≥ ر کے لیے ایک سے چھوٹی حاصل ہوں ۔ پس لا کی اس مستقل قیمت کے لیے اور ن کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جو ن، سے بڑی یا اس کے مساوی ہیں ، جب لا کا سلسلہ ایسا ہے کہ ایک ثابت رقم (جس کا عمل ن پر منحصر نہیں ہے) سے اور اس کے بعد ہر رقم اپنی ما قبل رقم سے عدداً چھوٹی ہے ۔ اب چونکہ ایک ایسے سلسلہ کا مجموعہ جس کی ارقام متبادلاً مثبت منفی ہوں اور ہر رقم اپنی ما قبل رقم سے عدداً چھوٹی ہو پہلی رقم سے چھوٹا ہوتا ہے اس لیے

$$\text{جب لا}=\text{لا جم}^{\text{ن}-1}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)-\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\cdots(\text{لا}-2\text{ط})}{\underline{|3}}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^3$$

$$+\cdots+(-1)^{ر}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\cdots(\text{لا}-2ر\text{ط})}{\underline{|2ر+1}}\,\text{جم}^{\text{ن}-2ر-1}\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{2ر+1}$$

جہاں $\text{ط}=\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ بشرطیکہ ن ≥ ن، ؛ ر، ن پر منحصر نہیں ہے اور صہ

(133) صفر اور ۱ کے درمیان ایک عدد ہے - صحیح عدد ر کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے جو ر سے کم نہ ہو۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{ط} - \frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})}{\underline{|۲}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲}$$

$$+\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})(\text{لا}-۲\text{ط})(\text{لا}-۳\text{ط})}{\underline{|۴}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۴}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۴} - \cdots$$

$$+(-۱)^{\text{س}}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا}(\text{لا}-\text{ط})\cdots(\text{لا}-\overline{۲\text{س}-۱}\,\text{ط})}{\underline{|۲\text{س}}}\,\text{جم}^{\text{ن}-۲\text{س}}\,\text{ط}\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{۲\text{س}}$$

بشرطیکہ ن ≮ نَ؛ س، ن پر منحصر نہیں ہے اور صَہ، صفر اور ایک کے درمیان ایک عدد ہے۔

اب فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑھا دیا گیا ہے تو جب لا اور جم لا کے لیے جو جملے ہیں ان کی انتہا، ان تفاعلوں کو تعبیر کرنی چاہیں۔ اب چونکہ ہر سلسلہ میں رقموں کی تعداد مستقل ہے اور ن کے تابع نہیں اس لیے ہمیں صرف مختلف رقموں کی انتہاؤں کو جمع کرنا ہوگا تاکہ مجموعہ کی انتہا معلوم ہو سکے۔ $\left(\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}\right)^{\text{ک}}$ کی انتہا جبکہ ک ن پر منحصر نہیں ہے ایک ہے۔ نیز $\text{جم}^{\text{ن}-\text{ک}}$ ط کی انتہا = $\frac{\text{جم}^{\text{ن}}\ \text{ط کی انتہا}}{\text{جم}^{\text{ک}}\ \text{ط کی انتہا}}$

اور دفعہ ۹۷ میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ لوک $\text{جم}^{\text{ن}}$ ط = ۱، اور چونکہ لوک جم ط = ۱ اس لیے لوک $\text{جم}^{\text{ک}}$ ط = ۱ حاصل ہوتا ہے؛ اس لیے لوک $\text{جم}^{\text{ن}-\text{ک}}$ ط = ۱؛ اعداد صہ اور صَہ، ن پر منحصر ہیں لیکن ن کی ہر قیمت کے لیے وہ صفر اور ایک کے درمیان ہیں اور اس لیے ان کی انتہائیں صہ اور صَہ ایک سے تجاوز نہیں کر سکتیں۔ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \cdots + (-۱)^{\text{ر}}\,\text{صہ}\,\frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\underline{|۲\text{ر}+۱}} ،$$

$$\text{جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \cdots + (-۱)^{\text{س}}\,\text{صہ}'\,\frac{\text{لا}^{۲\text{س}}}{\underline{|۲\text{س}}}$$

جہاں صہ اور صہ' مثبت عدد ہیں جو ایک سے تجاوز نہیں کر سکتے ۔

یہ نتیجے درست رہتے ہیں لا کی ہر قیمت کے لیے اور ر اور س کی تمام قیمتوں کے لیے جو ثابت صحیح اعداد م اور س سے بڑے یا ان کے مساوی ہوں ۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ لا کی ہر قیمت کے لیے جب لا حسب ذیل مستدق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \cdots + (-۱)^{\text{م}}\,\frac{\text{لا}^{۲\text{م}+۱}}{\underline{|۲\text{م}+۱}} + \cdots$$

اور جم لا حسب ذیل مستدق سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے

$$۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \cdots + (-۱)^{\text{م}}\,\frac{\text{لا}^{۲\text{م}}}{\underline{|۲\text{م}}} + \cdots$$

کیونکہ پہلے سلسلہ کی رقموں کی ایک مقررہ تعداد کا مجموعہ، جب لا سے بقدر $\frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\underline{|۲\text{ر}+۱}}$ سے زیادہ فرق نہیں رکھتا جو لا کی ہر قیمت کے لیے (134) اتنا چھوٹا ہو سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اگر ر کو کافی بڑا لیا جائے ۔

یہ واقعہ اس امر کے مشاہدہ کرنے سے واضح ہے کہ نسبت $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲\text{ر}\,(۲\text{ر}+۱)}$

$\times\ \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\underline{|۲\text{ر}+۱}} : \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}-۱}}{\underline{|۲\text{ر}-۱}}$ ، لا کی کسی مقررہ قیمت کے لیے ر کو کافی بڑا لینے سے اتنی چھوٹی بنائی جا سکتی ہے جتنی ہم چاہیں ۔

اسی طرح کا استدلال جم لا کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثالیں

(۱) $\text{جم}^{۳}\,\text{لا}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$\text{جم}^{۳}\,\text{لا} = \frac{۱}{۴}(\text{جم}\,۳\,\text{لا} + ۳\,\text{جم}\,\text{لا})$؛ اس لیے جم ۳ لا، جم لا کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے ہمیں $\text{جم}^{۳}\,\text{لا}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم حاصل ہوتی ہے

$$(-۱)^{\text{ن}}\,\frac{۳^{۲\text{ن}} + ۳}{۴\,\lfloor ۲\text{ن}}\,\text{لا}^{۲\text{ن}}$$

یہ معلوم ہوگا کہ جم لا یا جب لا کی کسی صحیح عددی قوت کو یا ایسی قوتوں کے حاصل ضرب کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے اگر ہم اس جملہ کو لا کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں بیان کریں۔

(۲) مس لا کو لا کی قوتوں میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں $\text{لا}^{۷}$ شامل ہے۔

$$\text{مس}\,\text{لا} = \text{جب}\,\text{لا} \diagdown \text{جم}\,\text{لا}$$

$$= \left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰} - \frac{\text{لا}^{۷}}{۵۰۴۰}\right\}\left\{۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴} - \frac{\text{لا}^{۶}}{۷۲۰}\right\}^{-۱}$$

$\text{لا}^{۷}$ سے اعلیٰ رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے۔ دوسرے جزو ضربی کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}\,\text{لا} = \left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۶} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰} - \frac{\text{لا}^{۷}}{۵۰۴۰}\right\}\left\{۱ + \left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴} + \frac{\text{لا}^{۶}}{۷۲۰}\right) + \left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}\right)^{۳}\right\}$$

ضرب دینے اور $\text{لا}^{۷}$ تک کی رقموں کے سروں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{مس}\,\text{لا} = \text{لا} + \frac{۱}{۳}\,\text{لا}^{۳} + \frac{۲}{۱۵}\,\text{لا}^{۵} + \frac{۱۷}{۳۱۵}\,\text{لا}^{۷}$$

(۳) $\dfrac{\text{جب}(\text{مس لا}) - \text{مس}(\text{جب لا})}{\text{لا}^{۷}}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ لا = ۰

اس جملہ کا شمار کنندہ جبکہ مثال ماسبق کا پھیلاؤ استعمال کیا جائے

$$= \text{مس لا} - \tfrac{۱}{۶}\,\text{مس}^{۳}\,\text{لا} + \tfrac{۱}{۱۲۰}\,\text{مس}^{۵}\,\text{لا} - \tfrac{۱}{۵۰۴۰}\,\text{مس}^{۷}\,\text{لا} - \text{جب لا} - \tfrac{۱}{۳}\,\text{جب}^{۳}\,\text{لا}$$
$$- \tfrac{۲}{۱۵}\,\text{جب}^{۵}\,\text{لا} - \tfrac{۱۷}{۳۱۵}\,\text{جب}^{۷}\,\text{لا}$$

اور یہ لا^۷ سے اعلیٰ رتبہ کی رقموں کو خارج کر دینے سے

$$= (\text{لا} + \tfrac{۱}{۳}\text{لا}^{۳} + \tfrac{۲}{۱۵}\text{لا}^{۵} + \tfrac{۱۷}{۳۱۵}\text{لا}^{۷}) - \tfrac{۱}{۶}\text{لا}^{۳}(۱ + \text{لا}^{۲} + \tfrac{۱۱}{۱۵}\text{لا}^{۴}) + \tfrac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰}(۱ + \tfrac{۵}{۳}\text{لا}^{۲})$$
$$- \tfrac{\text{لا}^{۷}}{۵۰۴۰} - (\text{لا} - \tfrac{۱}{۶}\text{لا}^{۳} + \tfrac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰} - \tfrac{\text{لا}^{۷}}{۵۰۴۰}) - \tfrac{\text{لا}^{۳}}{۳}(۱ - \tfrac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \tfrac{\text{لا}^{۴}}{۴۰} + \tfrac{\text{لا}^{۴}}{۱۲})$$
$$- \tfrac{۲}{۱۵}(۱ - \tfrac{۵}{۶}\text{لا}^{۲}) - \tfrac{۱۷}{۳۱۵}\text{لا}^{۷}$$

یہ جملہ $-\tfrac{۱}{۳۰}\text{لا}^{۷}$ میں تحویل ہو جاتا ہے۔ اس لیے دیے ہوئے جملہ کی انتہا $-\tfrac{۱}{۳۰}$ ہے

(135)

مثلثی اور جبری متماثلات کے درمیان ایک رشتہ

۱۰۰ — کسی مثلثی متماثلہ سے جس میں زاویے حرفوں کے متجانس تفاعل ہوں جبری متماثلات کا ایک سلسلہ اخذ کیا جا سکتا ہے اس طور پر کہ دائری تفاعلوں کو زاویوں کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلایا جائے اور ایک ہی رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھا جائے۔ مثلاً ضابطہ
$\text{جب ا جب ب} = \tfrac{۱}{۲}\{\text{جم}(\text{ا} - \text{ب}) - \text{جم}(\text{ا} + \text{ب})\}$ میں جیوب اور جیوب التمام میں سے ہر ایک کو پھیلاؤ اور دوسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھو تو

$$\text{ا ب} = \tfrac{۱}{۴}\{(\text{ا} + \text{ب})^{۲} - (\text{ا} - \text{ب})^{۲}\}$$

چوتھے باب کے دفعات ۴۶ اور ۴۷ میں ہم نے متعدد مثالیں متماثل مثلثی اور جبری متماثلات کی دی ہیں، ہر صورت میں مثلثی متماثلات سے جبری متماثلات حاصل ہو سکتی ہے اگر مذکورہ بالا طریقہ کو کام میں لایا جائے۔ مثلاً دفعہ ۴۷ کی مثال (۱۱) پر غور کرو، اس کو لکھا جا سکتا ہے

$$\Sigma\ \text{جب}^{۲}\ \text{ا}\ \text{جب}\ (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) - ۲\ \text{جب ا جب ب جب ج}$$
$$= \text{جب}\ (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})\ \text{جب}\ (\text{ج} + \text{ا} - \text{ب})\ \text{جب}\ (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})$$

اگر ہم جیوب کو پھیلانے کے بعد تیسرے رتبہ کی رقموں کو مساوی رکھیں تو ہمیں حسب ذیل متماثل جبری متماثلہ مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\Sigma\ \text{ا}^{۲}(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) - ۲\ \text{ا ب ج} = (\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})(\text{ج} + \text{ا} - \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})$$

آٹھویں باب پر مثالیں

۱۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} \geqslant ۲\ \text{مس}\ \tfrac{۱}{۲}\ \text{ط}،\ \text{جہاں ط} < \tfrac{۱}{۲}\pi$$

۲۔ مس ۳ ط مم^{۳} ط کی قیمت میں جو تبدیلیاں ہوتی ہیں جبکہ ط صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے ان کو مرتسم کرو۔
ثابت کرو کہ اس جملہ کی اقل قیمت $۱۷ - ۱۲\sqrt{۲}$ ہے اور اعظم قیمت $۱۷ + ۱۲\sqrt{۲}$ ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مس ۳ ط مم ط، ۳ اور $\frac{۱}{۳}$ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

۴۔ ثابت کرو کہ $\text{ط} > \dfrac{۳\ \text{جب ط}}{۲ + \text{جم ط}}$، جہاں ط $< \frac{۱}{۲}\pi$

۵۔ ثابت کرو کہ ۳ مس ۵ ط > ۵ مس ۳ ط، اگر ط، صفر اور $\frac{\pi}{۱۰}$ کے درمیان واقع ہو۔

۶۔ ثابت کرو کہ $\dfrac{۱}{\text{جب}^{۲}\ \text{ط}} - \dfrac{۱}{\text{ط}^{۲}}$ کی انتہائی قیمت (جبکہ ط = ۰) $\frac{۱}{۳}$ ہے۔

۷ - ثابت کرو کہ $\text{جب}\,(\text{جم}\,\text{طہ}) < \text{جم}\,(\text{جب}\,\text{طہ})$، طہ کی تمام قیمتوں کے لیے - (136)

۸ - ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$\left(1-\text{مس}^2\frac{\text{طہ}}{2}\right)\left(1-\text{مس}^2\frac{\text{طہ}}{2^2}\right)\left(1-\text{مس}^2\frac{\text{طہ}}{2^3}\right)\ldots\ldots$$

کی انتہائی قیمت $\frac{\text{طہ}}{\text{مس}\,\text{طہ}}$ ہے -

۹ - اگر $\frac{\text{جب}\,(\text{طہ}-\text{فہ})}{\text{جب}\,\text{فہ}} = 1+\text{ن}$ اور ن بہت چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب}\,\text{فہ} = \left(1-\frac{1}{2}\,\text{ن}\right)\text{جب}\,\frac{1}{2}\,\text{طہ}\text{، تقریباً}$$

۱۰ - $\frac{\text{جب}\,(\text{طہ}\,\text{جم}\,\text{طہ})}{\text{جم}\,(\text{طہ}\,\text{جب}\,\text{طہ})}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ $\text{طہ} = \frac{1}{2}\pi$

۱۱ - $\frac{\text{مس}\,2\,\text{طہ} - 2\,\text{مس}\,\text{طہ}}{\text{طہ}^3}$ کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ $\text{طہ} = 0$

۱۲ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{جم}\,\text{طہ}}{\sqrt{2-2\,\text{جب}\,\text{طہ}}}\right)^{\text{مس}^2\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\text{طہ}\right)}$$

کی انتہائی قیمت $\text{ہر}^{\frac{3}{2}}$ ہے جبکہ $\text{طہ} = \frac{1}{2}\pi$

۱۳ - ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{\text{جب}\,\text{لا}}{\text{لا}}\right)^2 = 1-\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{2}-\text{جم}^2\frac{\text{لا}}{2}\,\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{4}-\text{جم}^2\frac{\text{لا}}{2}\,\text{جم}^2\frac{\text{لا}}{4}\,\text{جب}^2\frac{\text{لا}}{8}-\ldots$$

۱۴ - اگر مساوات $\text{مس}\,\text{طہ} = \frac{1}{\text{جم}\,\text{عہ}_1+\text{جم}\,\text{عہ}_2}+\frac{1}{\text{جم}\,\text{عہ}_3+\text{جم}\,\text{عہ}_4}$

میں عہ_1، عہ_2، عہ_3، عہ_4 سب زاویے تقریباً مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ طہ

$$=\frac{1}{4}\left(\text{عہ}_1+\text{عہ}_2+\text{عہ}_3+\text{عہ}_4\right)$$

کے تقریباً مساوی ہے۔

۱۵۔ سلسلہ ذیل جمع کرو۔

جم $\frac{ط}{۲}$ + ۲ جم $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۲}$ + ۲^۲ جم $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۲}$ جم $\frac{ط}{۲^۳}$ + ... ن رقموں تک

۱۶۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

مس $\frac{لا}{۲}$ قط لا + مس $\frac{لا}{۲^۲}$ قط $\frac{لا}{۲}$ + مس $\frac{لا}{۲^۳}$ قط $\frac{لا}{۲^۲}$ + ... ن تک

کا حاصل جمع مس لا ہے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ

ط ـ جب ط جم ط = ۲ جب ط جب^۲ $\frac{ط}{۲}$ + ۲^۲ جب $\frac{ط}{۲}$ جب^۲ $\frac{ط}{۲^۲}$

+ ۲^۳ جب $\frac{ط}{۲^۲}$ جب $\frac{ط}{۲^۳}$ + ... ن تک

۱۸۔ ثابت کرو کہ مس ط = $\frac{۲}{\text{جم } \frac{ط}{۲} - }$ $\frac{۲}{\text{جم } \frac{ط}{۴} - }$ $\frac{۲}{\text{جم } \frac{ط}{۸} - }$ .....

۱۹۔ اگر ط > π تو ثابت کرو کہ

۲ [جب $\frac{ط}{۲}$ + جب $\frac{ط}{۲^۲}$ + ... + جب $\frac{ط}{۲^ن}$] [جم $\frac{ط}{۲}$ + جم $\frac{ط}{۲^۲}$ + ... + جم $\frac{ط}{۲^ن}$]

≯ ن [جب ط × جب $\frac{ط}{۲}$ ..... × جب $\frac{ط}{۲^{ن-۱}}$]$^{\frac{۱}{ن}}$

(137) ۲۰۔ اگر ا اور ب مثبت مقداریں ہوں اور اگر ا$_۱$ = $\frac{۱}{۲}$(ا + ب)، ب$_۱$ = (ا$_۱$ ب)$^{\frac{۱}{۲}}$

ا$_۲$ = $\frac{۱}{۲}$(ا$_۱$ + ب$_۱$)، ب$_۲$ = (ا$_۲$ ب$_۱$)$^{\frac{۱}{۲}}$ اور علیٰ ہذا تو ثابت کرو کہ

ا$_∞$ = ب$_∞$ = $\frac{(ب^۲ - ا^۲)^{\frac{۱}{۲}}}{\text{جم}^{-۱} \frac{ا}{ب}}$

بتاؤ کہ کس طرح π کی قیمت اس ضابطہ کے ذریعہ محسوب کی جا سکتی ہے ۔

۲۱ ۔ لاتناہی حاصل ضرب

$$\left(\text{جب ط جم } \tfrac{1}{2}\text{ ط}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ ط جم } \tfrac{1}{4}\text{ ط}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\text{جب } \tfrac{1}{4}\text{ ط جم } \tfrac{1}{8}\text{ ط}\right)^{\frac{1}{8}} \ldots$$

کی انتہائی نسبت معلوم کرو ۔

۲۲ ۔ اگر س ط = ۴ ط تو ط کی قیمت صفر اور $\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان یہ ہوگی

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{11}{24\pi^{3}} + \frac{402}{480\pi^{5}} + \ldots\ldots\right)$$

۲۳ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ط}}{1 + 2\,\text{جم ط}} = \sum^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{n}} \times \frac{\text{جب } \frac{\text{ط}}{2^{n}}}{2\,\text{جم } \frac{\text{ط}}{2^{n}} - 1} \right\}$$

۲۴ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{2\,\text{جم } 2^{n}\,\text{ط} + 1}{2\,\text{جم ط} + 1} = (2\,\text{جم ط} - 1)(2\,\text{جم } 2\,\text{ط} - 1)\ldots(2\,\text{جم } 2^{n-1}\,\text{ط} - 1)$$

۲۵ ۔ ن رقموں تک جمع کرو سلسلہ

$$\frac{1}{2}\,\text{لوک مس } 2\,\text{ط} + \frac{1}{2^{2}}\,\text{لوک مس } 2^{2}\,\text{ط} + \frac{1}{2^{3}}\,\text{لوک مس } 2^{3}\,\text{ط} + \ldots$$

۲۶ ۔ اگر یہ دیا جائے کہ $\frac{\text{ط}^{n}\ \text{جب}^{n}\,\text{ط}}{\text{ط}^{n} - \text{جب}^{n}\,\text{ط}}$ کی انتہائی قیمت جبکہ ط = ۰ نہ صفر ہے نہ لاتناہی تو ن معلوم کرو ۔

۲۷ ۔ $$\frac{1 - \text{جم } 2\,\text{لا} + \text{جم } 4\,\text{لا} - \text{جم } 6\,\text{لا} + \text{جم } 8\,\text{لا} - \text{جم } 10\,\text{لا} - \text{جم } 14\,\text{لا} + \text{جم } 16\,\text{لا}}{3 - 4\,\text{جم } 2\,\text{لا} + \text{جم } 4\,\text{لا}}$$

کی انتہائی قیمت معلوم کرو جبکہ لا = ۰

۲۸ - ثابت کرو کہ اس لا متناہی سلسلہ کا مجموعہ جس کی رویں رقم

$$(-1)^{ر-1} \frac{ر}{2ر-1} \times \frac{1}{\lfloor 2ر-2}$$

ہے $\frac{1}{4}$ جب $(\frac{1}{4}\pi + 1)$ ہے۔

۲۹ - اگر صہ بہت چھوٹا ہو اور فہ = طہ - ۲ صہ جب طہ + $\frac{3}{4}$ صہ^2 جب ۲ طہ تو ثابت کرو
طہ = فہ + ۲ صہ جب فہ + $\frac{5}{4}$ صہ^2 جب ۲ فہ، تقریباً

۳۰ - اگر ما = ی + ک جب (ی + ک ما) تو ی کو چھوٹی مقدار ک کی قوتوں میں اس رقم تک پھیلاؤ جس میں ک^3 شامل ہے۔

۳۱ - مثلثی متماثلہ

جب(د-ب) جب(ا-ج) + جب(ب-ج) جب(ا-د) + جب(ج-د) جب(ا-ب) = ۰

سے جبری متماثلہ

$$(د-ب)(ا-ج)\{(د-ب)^2 + (ا-ج)^2\} + (ب-ج)(ا-د)\{(ب-ج)^2 + (ا-د)^2\}$$
$$+ (ج-د)(ا-ب)\{(ج-د)^2 + (ا-ب)^2\} = ۰$$

اخذ کرو۔

۳۲ - ثابت کرو کہ فہ، $\frac{3 \text{ جب } 2 \text{ فہ}}{2(2 + \text{ جم } 2 \text{ فہ})}$ سے تقریباً $\frac{4}{45}$ فہ^5 کا فرق رکھتا ہے جہاں (138

فہ ایک چھوٹا زاویہ ہے۔

۳۳ - اس چھوٹے سے چھوٹے زاویہ کا دائری ناپ اعشاریہ کے ۵ مقامات تک معلوم کرو جو مساوات

جب (لا + $\frac{1}{4}\pi$) = ۱۰ جب لا

کو پورا کرتا ہے۔

۳۴ - مساوات (جب طہ)$^{جم طہ}$ = پ کو تقریبی طور پر حل کرو جہاں پ مثبت ہے

اور بڑا نہیں ہے اور یہ معلوم ہے کہ ط، عہ کے تقریباً مساوی ہے اور عہ خود بہت چھوٹا نہیں ہے۔

۳۵۔ ثابت کرو کہ ط کی صرف ایک مثبت قیمت ہے ایسی کہ ط = ۲ جب ط؛ اس کی قیمت اعشاریہ کے دو مقامات تک لوکارثمی جدول کے ذریعہ معلوم کرو۔

۳۶۔ رشتہ ا جب^ا لا = ب جب^ا ما میں جہاں ا اور ب، ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد، صحیح عدد ہیں ثابت کرو کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ۲ب قیمتیں ہیں سوائے اُس صورت کے جبکہ ا اور ب دونوں طاق ہوں اور اس صورت میں ما کی ب قیمتیں ہیں۔

۳۷۔ یہ مانکر کہ اگر عہ وہ حادہ زاویہ ہو جس کی جیب $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ہے جب ۷عہ کو $\frac{\sqrt{۳}}{۲۵۶}$ ہونا چاہیئے ثابت کرو کہ جم عہ ۔ جم $\frac{\pi}{۷}$ کا اضافہ $\frac{۳}{۷\times۲\times۱۰}$ پر ۵....۰ سے کم ہے۔

نواں باب

مثلثی جدولیں

(139)

۱۰۱ ـــــــــ علم مثلث کے ضابطوں کو مثلثوں کے حل میں اور عددی اعمال میں عملاً مفید ہونے کیلیے یہ ضروری ہے کہ ہمارے پاس عددی جدولیں موجود ہوں جن میں زاویوں کے دائری تفاعل درج ہوں، چنانچہ ان جدولوں سے ہم ایک دیے ہوئے زاویے کے متناظر دائری تفاعلوں کی قیمتیں کافی صحت کے ساتھ معلوم کرسکیں اور (بالعکس) وہ زاویہ معلوم کرسکیں جو تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے متناظر ہو۔ ایسی جدولیں دو قسم کی ہوتی ہیں، (۱) طبعی جیوب، جیوب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں زاویوں کی جیوب، جیوب التمام، ماسوں وغیرہ کی عددی قیمتیں اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتی ہیں، اور (۲) لوکارثمی جیوب، جیوب التمام، ماسوں وغیرہ کی جدولیں جن میں اساس ۱۰ پر ان تفاعلوں کے لوکارثم اعشاریہ کے چند مقامات تک درج شدہ ہوتے ہیں۔

ـــــــــ

سلہ۔ لوکارثموں کو پہلے "مصنوعی اعداد" کہا جاتا تھا اور اس لیے معمولی اعداد طبعی اعداد کہلاتے تھے۔

موخرالذکر جدولیں اکثر علمی مقاصد کے لیے استعمال ہوتی ہیں، اس قسم کی تقریباً تمام جدولوں میں تمام لوکارثموں کو بقدر ۱۰ کے بڑھا دیا جاتا ہے اور اس طرح منفی لوکارثموں کے استعمال سے اجتناب کیا جاتا ہے۔ اس طریقہ پر اضافہ شدہ لوکارثموں کو جدولی لوکارثم کہتے ہیں اور ان کو لکھا جاتا ہے یوں ل جب ۳۰°، اس لیے

ل جب ۳۰° = ۱۰ + لوک جب ۳۰°

طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں محسوب کرنا

۱۰۳ ———— ہم اول یہ بتائیں گے کہ طبعی دائری تفاعلوں کی جدولیں کس طرح محسوب کی جاتی ہیں جن سے ان تفاعلوں کی قیمتیں، صفر سے ۹۰° تک یا ۱′ کے وقفوں سے تمام زاویوں کے لیے، اعشاریہ کے چند خاص مقررہ مقامات تک صحیح طور پر معلوم ہونگی۔ ہم پہلے ۱′ اور ۱۰′ کی جیب اور جیب التمام محسوب کریں گے۔

(140)

(۱) جب ۱′، جم ۱′ معلوم کرنا۔

فرض کرو $ط = \frac{\pi}{۶۰ \times ۱۸۰}$، ۱′ کے دائری ناپ کو تعبیر کرتا ہے، تب

$$ط = \frac{۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳}{۱۰۸۰۰} = ۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲۰۸۶۶۵$$

اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک، اس لیے

$$\frac{۱}{۶} ط^{۳} = \frac{۱}{۶}(۰٫۰۰۰۳)^{۳} = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴$$

اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک۔

اب دفعہ ۹۵ کے مسئلہ کی رو سے جب ۱′، ط اور $ط - \frac{۱}{۶} ط^{۳}$ کے

درمیان واقع ہوتا ہے اور یہ دو عدد صرف اعشاریہ کے بارہویں مقام میں ایک دوسرے سے فرق رکھتے ہیں، اس لیے اعشاریہ کے ۱۱ مقامات تک جب اَ کی صحیح قیمت ہے

۰٫۰۰۰۲۹۰۸۸۸۲۰

نیز ہمیں حاصل ہوتا ہے ۱ - $\frac{۱}{۲}$ ط^{۲} = ٫۹۹۹۹۹۹۹۵۷۶۹۲۰۲۵۰۲۹، اعشاریہ کے ۱۸ مقامات تک۔ اور

$\frac{۱}{۲۴}$ ط^{۴} = $\frac{۱}{۲۴}$ (۰٫۰۰۰۲۹)^{۴} = ٫۰۰۰ ۰۰ ....۲۹، اعشاریہ کے ۱۷ مقامات تک۔

اب جم اَ، ۱ - $\frac{۱}{۲}$ ط^{۲} اور ۱ - $\frac{۱}{۲}$ ط^{۲} + $\frac{۱}{۲۴}$ ط^{۴} کے درمیان واقع ہے، اور چونکہ یہ دو عدد صرف اعشاریہ کے ۱۶ویں مقام میں ایک دوسرے سے فرق رکھتے ہیں اس لیے اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

جم اَ = ٫۹۹۹۹۹۹۹۵۷۶۹۲۰۲۵

(۲) جب ۱۰″، جم ۱۰″ معلوم کرنا۔

اگر ط = $\frac{\pi}{۶۴۸۰۰۰}$، جو ۱۰″ کا دائری ناپ ہے

تو ط = ٫۰۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸۱۱۰، اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

$\frac{۱}{۶}$ ط^{۳} = ٫۰ ....۲۱، اعشاریہ کے ۱۵ مقامات تک

اس لیے ط اور ط - $\frac{۱}{۶}$ ط^{۳} یہ دو عدد ۱۲ویں مقام تک ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔

اس لیے جب ۱۰″ = ٫۰۰۰۰۴۸۴۸۱۳۶۸، اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک

نیز $\frac{۱}{۲۴}$ ط^{۴} اعشاریہ کے ۱۷ مقامات تک صفر ہے، اس لیے جم ۱۰″ = ۱ - $\frac{۱}{۲}$ ط^{۲} یا

جم ۱۰″ = ٫۹۹۹۹۹۹۹۹۸۸۲۴۸، اعشاریہ کے ۱۳ مقامات تک

۱۰۳ ـــــ ضابطوں

جب ن۱ = ۲ جم ۱ جب (ن - ۱) ۱ - جب (ن - ۲) ۱،

جم ن ۱ = ۲ جم ۱ جم (ن - ۱) ۱ - جم (ن - ۲) ۱

کی مدد سے ہم اَ یا ۰اً کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام محسوب کر سکتے ہیں۔ فرض کرو ا = ۰اً ۲؛ جم ۰اً = ۲ - ک جہاں ک = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۰۴؛ تو یہ ضابطے لکھے جا سکتے ہیں۔

جب ن ا - جب (ن-۱) ا = {جب (ن-۱) ا - جب (ن-۲) ا} - ک جب (ن-۱) ا

جم ن ا - جم (ن-۱) ا = {جم (ن-۱) ا - جم (ن-۲) ا} - ک جم (ن-۱) ا؛

(141) اگر ان ضابطوں میں ہم رکھیں ن = ۲ تو ہم جب ۲۰ً اور جم ۲۰ً محسوب کر سکتے ہیں۔ اب ن = ۳، ۴، ۵، ... فرض کرنے سے فرقوں جب ن ا - جب (ن-۱) ا، جم ن ا - جم (ن-۱) ا کو محسوب کیا جا سکتا ہے اگر ان سے پہلے کے فرق جم (ن-۱) ا - جم (ن-۲) ا، جب (ن-۱) ا - جب (ن-۲) ا اور نیز جب (ن-۱) ا اور جم (ن-۱) ا معلوم کر لیے گئے ہوں؛ پس یہ فرق ضابطوں کے مسلسل استعمال سے معلوم کیے جا سکتے ہیں؛ پھر ہم جب ن ا، جم ن ا معلوم کر سکتے ہیں اور اس طرح ۰اً کے وقفوں سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی ایک جدول بنا سکتے ہیں۔ چونکہ ک = ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۵۴، اس لیے ک جب (ن-۱) ا، ک جم (ن-۱) ا کو محسوب کرنے میں ہمیں جب (ن-۱) ا، جم (ن-۱) ا کی قیمت کے صرف پہلے چند ہندسوں کو استعمال کرنے کی ضرورت ہے۔

۱۰۴ — جب ضابطوں کے متواتر استعمال سے جب ن ا، جم ن ا حسب قاعدہ بالا محسوب کر لیے جاتے ہیں تو جب ا، جم ا کی تقریبی قیمتوں کے استعمال سے جو خطائیں پیدا ہوتی ہیں وہ اس عمل میں اکٹھی ہو جائینگی؛ اس لیے یہ غور کرنا ضروری ہے کہ اس عمل میں اعشاریہ کے کتنے مقامات استعمال کیے جائیں کہ جب ا، جم ا کی اختیار کردہ قیمتوں سے (جو اعشاریہ کے چند مقامات تک صحیح ہیں) ہمیں جب ن ا، جم ن ا کی قیمتیں اعشاریہ کے مقامات کی ایک مقررہ تعداد تک صحیح معلوم ہو سکیں۔

فرض کرو کہ جب ا، جم ا اعشاریہ کے م مقامات تک محسوب کیے گئے ہیں

اور فرض کرو کہ ا کے متواتر ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے محسوب کرنے میں اعشاریہ کے مقامات کی تعداد ر رکھی گئی ہے؛ فرض کرو کہ جیب ن ا یا جم ن ا کی قیمت جو اس عمل سے حاصل ہوتی ہے $\text{ع}_{\text{ن}}$ ہے، اور اس کے جواب میں صحیح قیمت $\text{ع}_{\text{ن}} + \text{لا}_{\text{ن}}$ ہے، تب

تب $\quad \text{ع}_{\text{ن}} + \text{لا}_{\text{ن}} = (\text{۲} - \text{ک})(\text{ع}_{\text{ن-۱}} + \text{لا}_{\text{ن-۱}}) - (\text{ع}_{\text{ن-۲}} + \text{لا}_{\text{ن-۲}})$

نیز $\quad \text{ع}_{\text{ن}} = (\text{۲} - \text{کَ})\,\text{ع}_{\text{ن-۱}} - \text{ع}_{\text{ن-۲}}$ ،

جہاں کَ، اعشاریہ کے ر مقامات تک ک کی تقریبی قیمت ہے۔ فرض کرو $(\text{ک} - \text{کَ})\,\text{ع}_{\text{ن-۱}} = \text{م}_{\text{ن}}$ تو

$$\text{ع}_{\text{ن}} = (\text{۲} - \text{ک})\,\text{ع}_{\text{ن-۱}} - \text{ع}_{\text{ن-۲}} + \text{م}_{\text{ن}}$$

اس لیے $\quad \text{لا}_{\text{ن}} = (\text{۲} - \text{ک})\,\text{لا}_{\text{ن-۱}} - \text{لا}_{\text{ن-۲}} - \text{م}_{\text{ن}}$

یا $\quad \text{لا}_{\text{ن}} = \text{۲}\,\text{لا}_{\text{ن-۱}} - \text{لا}_{\text{ن-۲}} - \text{ی}_{\text{ن}}$ ، جہاں $\text{ی}_{\text{ن}} = \text{م}_{\text{ن}} + \text{ک}\,\text{لا}_{\text{ن-۱}}$

اس کو لکھا جا سکتا ہے $(\text{لا}_{\text{ن}} - \text{لا}_{\text{ن-۱}}) = (\text{لا}_{\text{ن-۱}} - \text{لا}_{\text{ن-۲}}) - \text{ی}_{\text{ن}}$

پس اسی طرح $\quad (\text{لا}_{\text{ن-۱}} - \text{لا}_{\text{ن-۲}}) = (\text{لا}_{\text{ن-۲}} - \text{لا}_{\text{ن-۳}}) - \text{ی}_{\text{ن-۱}}$

. . . .

$$\text{لا}_{\text{۲}} - \text{لا}_{\text{۱}} = \text{لا}_{\text{۱}} - \text{ی}_{\text{۲}}$$

اس لیے $\quad \text{لا}_{\text{ن}} - \text{لا}_{\text{ن-۱}} = \text{لا}_{\text{۱}} - (\text{ی}_{\text{۲}} + \text{ی}_{\text{۳}} + \cdots + \text{ی}_{\text{ن}})$ ؛

عدد ک $\text{لا}_{\text{ن-۱}}$ ، بمقابلہ ۲ $\text{لا}_{\text{ن-۱}}$ کے بہت چھوٹا ہے؛ اس لیے $\text{م}_{\text{ن}} + \text{ک}\,\text{لا}_{\text{ن-۱}}$ ، $\text{م}_{\text{ن}}$ سے ناقابل قدر فرق رکھتا ہے؛ پس عددوں $\text{ی}_{\text{۲}}$ ، $\text{ی}_{\text{۳}}$ ، . . . ، $\text{ی}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک، $\frac{۱}{۲.۱۰^{ر}}$ سے کم ہے اور اس لیے ان کا اوسط $\text{ط}_{\text{ن}}$ ، $\frac{۱}{۲.۱۰^{ر}}$ سے کم ہے، اس لیے

$$\text{لا}_{\text{ن}} - \text{لا}_{\text{ن}-١} = \text{لا} - (\text{ن}-١)\,\text{ط}_{\text{ن}}\text{،}$$

$$\text{لا}_{\text{ن}-١} - \text{لا}_{\text{ن}-٢} = \text{لا} - (\text{ن}-٢)\,\text{ط}_{\text{ن}-١}\text{،}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{لا}_{٢} - \text{لا}_{١} = \text{لا} - \text{ط}_{٢}$$

یا

$$\text{لا}_{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{لا} - (\text{ط}_{٢} + ٢\,\text{ط}_{٣} + \cdots + \overline{\text{ن}-١}\,\text{ط}_{\text{ن}})\text{؛}$$

(142

اب چونکہ $\text{ط}_{٢}$، $\text{ط}_{٣}$، ...، $\text{ط}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک $\frac{١}{١٠^{\text{ر}}}$ سے کم ہے اس لیے

$$-(\text{ط}_{٢} + ٢\,\text{ط}_{٣} + \cdots) < \frac{\frac{١}{٢}\,\text{ن}(\text{ن}-١)}{١٠^{\text{ر}}}$$

یعنے

$$\text{لا}_{\text{ن}} < \frac{\text{ن}}{١٠^{\text{ر}}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{٢ \times ١٠^{\text{ر}}}$$

پس بداہتہً

$$\text{لا}_{\text{ن}} < \frac{\text{ن}}{١٠^{\text{ر}}} + \frac{\text{ن}^{٢}}{٢ \times ١٠^{\text{ر}}} \quad \cdots\cdots\cdots (\text{ع})$$

اگر اس ضابطہ میں رکھیں م = ١٢، ن = ١٠٨٠٠ تو

$$\text{لا}_{\text{ن}} < \frac{١٠٨}{١٠^{\text{ر}-٢}} + \frac{٥٨٣٢}{١٠^{\text{ر}-٤}}$$

$$< \text{٠.٠٠٠}\cdots\text{١٠٨ ر} + \text{٠.٠٠}\cdots\cdots\text{٥٨٣٢ ر}$$

جہاں آخری عدد اعشاریہ میں (ر - ٥) صفر ہیں؛ اس لیے اگر ر = ١٥ تو $\text{لا}_{\text{ن}} <$ ٠.٠٠...٠٠ ر یعنے عن اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح ہے۔ اب ١٠٨٠٠ × ١٠ً = ٣٠°، اس لیے ٣٠° کی جیب یا جیب التمام اعشاریہ کے سات مقامات تک صحیح معلوم ہوگی۔ اگر ہم ١٠ً کے ضعفوں کے ذریعے ٣٠° تک کی جیوب یا جیوب التمام کے محسوب کرنے میں شروع سے آخر تک اعشاریہ کے ١٥ مقامات لکھیں۔ ضابطہ (ع) ایسی سب صورتوں میں عدد ر کو متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے تاکہ $\text{لا}_{\text{ن}}$ اعشاریہ کے مقامات کی ایک خاص تعداد تک صفر ہو سکے[1]

---

[1] اس دفعہ کا مکمل مواد سیرٹ (Serret) کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ۰ٍ۱ کے ضعفوں کے ذریعے ۴۵° تک کی جیوب اور جیوب التمام کو اعشاریہ کے ۵ صحیح مقامات تک محسوب کرنے کے لیے جب کہ جم ۰ٍ۱، جب ۰ٍ۱ کی قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک معلوم ہیں یہ ضروری ہے کہ شروع سے آخر تک عملِ حساب میں اعشاریہ کے ۷ مقامات رکھے جائیں۔

۱۰۵ ـــــ جب اُن زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی جدول درکار ہو جو ۰ٍ۱ کے یا ۱ٔ کے وقفوں پر ہیں تو صرف ۳۰° تک کے زاویوں کے لیے قیمتیں محسوب کرنا ضروری ہوتا ہے کیونکہ ہم پھر ۳۰° سے ۹۰° تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی قیمتیں ضابطوں

جب (۳۰° + ا) + جب (۳۰° - ا) = جم ا،

جم (۳۰° - ا) - جم (۳۰° + ا) = جب ا،

کے ذریعے ا کو ۳۰° تک تمام قیمتیں دینے سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اگر ۴۵° تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام حاصل ہو جائیں تو پھر ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام ضابطہ

جب ا = جم (۹۰° - ا)

کے ذریعے حاصل ہو سکتی ہیں؛ پس ۴۵° سے آگے کے زاویوں کے لیے عملِ حساب کو جاری رکھنا غیر ضروری ہے۔

دائری تفاعلوں کی جدولوں کو محسوب کرنے کا جو طریقہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے وہ دراصل ریٹی کس (Rheticus; 1514 - 1576) کا ہے؛ اس نے جیوب، مماسوں، اور قاطعوں کی جدولیں تیار کی تھیں جو ۱۵۹۶ء میں اس کے انتقال کے بعد شائع ہوئیں۔ قدیم ترین جدول ٹولمی[1] کی (Almagest) میں وتروں کی جدول ہے جو نصف درجہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لئے ہے۔ جدولوں کے مضمون پر تاریخی معلومات ہٹن (Hutton) کی ہسٹری آف میتھامیٹیکل ٹیبلس

(148)

[1] Ptolemy

(History of Mathematical Tables) اسے حاصل ہونگی نیز دیکھو انگلش انسائیکلوپیڈیا میں ڈی مارگن[1] کا مضمون جدولوں پر۔

عددی جدولوں کی تصدیق

۱۰۶ ـــــ پچھلے طریقہ سے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی محسوب کردہ قیمتوں کی صحت کی تصدیق کرنے کے لیے طریقوں کا معلوم کرنا ضروری ہے، یہ تصدیق حسب ذیل ذرایع سے بہ عمل لائی جاسکتی ہے۔

(۱) دفعہ ۶۶ میں ہم نے زاویوں ۳°، ۶°، ۹°...... کی جیوب اور جیوب التمام کی اصم قیمتوں کی ایک جدول بنائی تھی؛ اس لیے ہم ان زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کو اعشاریہ کے مقامات کی کسی مطلوبہ تعداد تک محسوب کرسکتے ہیں، پھر مصرحۂ بالا طریقہ سے زاویوں کے تفاعلوں کی جو قیمتیں حاصل ہوئی ہیں ان کا مقابلہ اس طرح حاصل شدہ قیمتوں کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔ اگر ضرورت ہو تو ان زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کی قیمتیں جو ۱° ۳۰' کے وقفوں پر ہیں نصف زاویوں کے ضابطوں کے ذریعہ حاصل کی جاسکتی ہیں اور اس طرح ہمیں اعمالِ حساب پر اور زیادہ قریبی جانچ کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔

(۲) بعض مشہور ضابطے جن کو تصدیق کے ضابطے کہا جاتا ہے، یہ ہیں

جم (۳۶° + ا) + جم (۳۶° - ا) = جم ا + جب (۱۸° + ا) + جب (۱۸° - ا)،

جب ا = جب (۳۶° + ا) - جب (۳۶° - ا) + جب (۷۲° - ا) - جب (۷۲° + ا)

(یہ دو ضابطے یولر کے ہیں)

[1] De Morgan

جم ا = جب (۴۵° + ا) + جب (۴۵° - ا) - جب (۱۸° + ا) - جب (۱۸° - ا)
(یہ لیجنڈر کا ضابطہ ہے)
تصدیق کے لئے صرف یہ کرنا ہوتا ہے کہ ان متماثلات میں تفاعلوں کی حاصل کردہ قیمتیں درج کیجائیں۔

مماسوں اور قاطعوں کی جدولیں

۱۰۷ — مماسوں کی جدول بنانا ہو تو ۴۵° تک کے زاویوں کے مماس، ضابطہ مس ا = جب ا / جم ا کے ذریعے جیوب اور جیوب التمام کی جدولوں سے معلوم کرو؛ پھر ۴۵° سے ۹۰° تک کے زاویوں کے مماس کاگنولی[1] کے ضابطے

مس (۴۵° + ا) = ۲ مس ۲ ا + مس (۴۵° - ا)

کے ذریعے حاصل ہو سکتے ہیں۔

قاطع التماموں کی جدول ضابطہ قم ا = مس ½ ا + مم ا کے ذریعے اور قاطعوں کی جدول ضابطہ قط ا = مس ا + مس (۴۵° - ½ ا) کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں۔

سلسلوں کے ذریعہ قیمتیں محسوب کرنا

(144

۱۰۸ — زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کو محسوب کرنے کا ایک جدید تر طریقہ دفعہ ۹۹ کے سلسلے استعمال کرنے کا ہے؛
اگر ہم رکھیں لا = م/ن × π/۲ تو

$$\text{جب}\left(\frac{م}{ن}\times 90^\circ\right) = \left(\frac{م}{ن}\times\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\lfloor 3}\left(\frac{م}{ن}\times\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{\lfloor 5}\left(\frac{م}{ن}\times\frac{\pi}{2}\right)^5 - \ldots$$

[1] Cagnoli

$\text{جم}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times ۹۰^\circ\right) = ۱ - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times\frac{\pi}{۲}\right)^۲ + \frac{۱}{۴}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times\frac{\pi}{۲}\right)^۴ - \ldots\ldots$

اس طرح ذیل حاصل ہوتے ہیں ضابطے

$\text{جب}\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}}\times ۹۰^\circ\right) =$ ۱۳ ۶۱۹۲۳ ۹۴۸۹۶ ۶۳۲۶۷ ۱٫۵۷۰۷۹ $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$

− ۵۸ ۲۵۳۶۵ ۰۶۲۴۶ ۴۰۹۷۵ ۰٫۶۴۵۹۶ $\frac{\text{م}^۳}{\text{ن}^۳}$

+ ۰۵ ۰۴۵۱۲ ۴۶۱۶۷ ۲۶۲۶۲ ۰٫۰۷۹۶۹ $\frac{\text{م}^۵}{\text{ن}^۵}$

− ۰۷ ۶۸۸۱۰ ۳۵۳۱۸ ۱۷۵۴۱ ۰٫۰۰۴۶۸ $\frac{\text{م}^۷}{\text{ن}^۷}$

+ ۱۹ ۳۵۹۸۲ ۸۴۷۸۷ ۰۴۴۱۱ ۰٫۰۰۰۱۶ $\frac{\text{م}^۹}{\text{ن}^۹}$

− ۵۳ ۲۱۲۰۸ ۴۳۲۳۵ ۳۵۹۸۸ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۱۱}}{\text{ن}^{۱۱}}$

+ ۹۳ ۲۱۹۶۷ ۲۱۷۲۹ ۰۵۶۹۲ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۱۳}}{\text{ن}^{۱۳}}$

− ۱۱ ۵۱۰۹۸ ۶۸۸۰۳ ۰۰۰۰۶ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۱۵}}{\text{ن}^{۱۵}}$

+ ۱۱ ۹۳۵۷۳ ۰۶۰۶۶ ۰۰۰۰۰ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۱۷}}{\text{ن}^{۱۷}}$

− ۴۷ ۷۷۰۶۵ ۰۰۰۴۳ ۰۰۰۰۰ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۱۹}}{\text{ن}^{۱۹}}$

+ ۲۳ ۲۵۷۱۴ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۲۱}}{\text{ن}^{۲۱}}$

− ۳۹ ۰۰۱۲۵ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۲۳}}{\text{ن}^{۲۳}}$

+ ۵۲ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰٫۰۰۰۰۰ $\frac{\text{م}^{۲۵}}{\text{ن}^{۲۵}}$

جم $(\frac{م}{ن} \times ۹۰^\circ)$ =	۱٫۰۰۰۰۰ ۰ ۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰	
$\frac{م^{۲}}{ن^{۲}}$	۱٫۲۳۳۷۰ ۰۵۵۰۱ ۳۶۱۶۹ ۸۲۷۳۵ ۴۳	−
$\frac{م^{۴}}{ن^{۴}}$	۰٫۲۵۳۶۶ ۹۵۰۷۹ ۰۱۰۴۸ ۰۱۳۶۳ ۶۶	+
$\frac{م^{۶}}{ن^{۶}}$	۰٫۰۲۰۸۶ ۳۴۸۰۷ ۶۲۳۵۲ ۹۶۰۸۷ ۳۱	−
$\frac{م^{۸}}{ن^{۸}}$	۰٫۰۰۰۹۱ ۹۲۶۰۲ ۷۴۸۳۹ ۴۲۶۵۸ ۰۲	+
$\frac{م^{۱۰}}{ن^{۱۰}}$	۰٫۰۰۰۰۲ ۵۲۰۲۰ ۴۲۳۷۳ ۰۶۰۶۰ ۵۵	−
$\frac{م^{۱۲}}{ن^{۱۲}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۴۷۱۰ ۸۷۴۷۷ ۸۸۱۸۱ ۷۲	+
$\frac{م^{۱۴}}{ن^{۱۴}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۶۳ ۸۶۶۰۳ ۰۸۳۷۹ ۱۹	−
$\frac{م^{۱۶}}{ن^{۱۶}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۶۵۶۵۹ ۶۳۱۱۴ ۹۸	+
$\frac{م^{۱۸}}{ن^{۱۸}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۵۲۹ ۴۴۰۰۲ ۰۱	−
$\frac{م^{۲۰}}{ن^{۲۰}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۳ ۴۳۷۷۳ ۹۲	+
$\frac{م^{۲۲}}{ن^{۲۲}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۱۸۳۵ ۹۹	−
$\frac{م^{۲۴}}{ن^{۲۴}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۸ ۲۱	+
$\frac{م^{۲۶}}{ن^{۲۶}}$	۰٫۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۰۰۰۰ ۰۳	−

(145) چونکہ صرف ۴۵° تک کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کا محسوب کرنا ضروری ہے اس لیے کہ کسر $\frac{م}{ن}$ ہمیشہ $\frac{۱}{۲}$ سے کم لی جاتی ہے، اس لیے سلسلوں کی بہت تھوڑی رقمیں اعشاریہ کے چند مقامات تک قیمتیں دریافت کرنے کے لیے کافی ہیں۔ یہ سلسلے یولر کی Analysis of the Infinite سے لیے گئے ہیں جہاں انہیں اعشاریہ کے مزید چھ مقامات تک دیا گیا ہے۔

لوکارتمی جدولیں

۱۰۹ــــ جب طبعی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار ہوجائیں تو لوکارتمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں معمولی لوکارتم کی جدولوں کے ذریعے بنائی جاسکتی ہیں کیونکہ ان جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب یا جیب التمام کی محسوب کردہ عددی قیمت کا لوکارتم ملیگا؛ اس طور پر حاصل شدہ لوکارتم میں ۱۰ جمع کرو تو متناظر جدولی لوکارتم مل جاتا ہے۔ لوکارتمی مماس رشتہ

ل مس ا = ۱۰ + ل جب ا ـ ل جم ا

کے ذریعہ معلوم کیے جاسکتے ہیں اور اس طرح لوکارتمی مماسوں کی ایک جدول تیار ہوسکتی ہے۔ ہم کسی آئندہ باب میں ایک راست طریقہ بتائینگے جس سے لوکارتمی جیوب، جیوب التمام اور مماس کی جدولیں بنائی جاسکتی ہیں۔

مثلثی جدولوں کا بیان اور ان کا استعمال

۱۱۰ــــ مثلثی جدولیں، طبعی یا لوکارتمی، بموجب ذیل بنائی جاتی ہیں:ـ

(۱) ان سے بالراست صرف صفر اور ۹۰° کے درمیانی زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں؛ ان حدود سے متجاوز مقداروں کے زاویوں کے لیے تفاعلوں کی قیمتیں فوراً اخذ کی جاسکتی ہیں۔

(۲) اِن جدولوں سے صفر سے ۴۵° تک اور ۴۵° سے ۹۰° تک کے زاویوں کے تفاعلوں کی قیمتیں ایک ہی ہندسوں کی دو مرتبہ قراءت کے ذریعے ملتی ہیں؛ تفاعلوں کے نام، جیب، جیب التمام، مماس اور نیز درجے (> ۴۵°) صفحہ کی پیشانی پر لکھے ہوتے ہیں، اور متناظر دقیقے اور ثانئے دائیں طرف کے ستون میں لکھے ہوتے ہیں، زاویے بڑھتے جاتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں نیچے اترتے ہیں، نیز جیب التمام، جیب، مماس التمام اور درجے (> ۴۵°) صفحہ کے پائین پر اِن ستونوں میں بالترتیب لکھے جاتے ہیں[1]

[1] اِس عبارت کا سلسلہ صفحہ ۲۴۰ پر دیکھو

(146)

۱۷ درجے

′	″	جیب	فرق	جیب التمام	فرق	ماس	فرق	ماس التمام	″	′
۵۰	۰	۹٫۴۸۶۰۷۴۹		۹٫۹۷۸۶۱۴۸		۹٫۵۰۷۴۶۰۲		۰٫۴۹۲۵۳۹۸	۰	۱۰
			۶۵۵		۶۸		۷۲۲			
	۱۰	۹٫۴۸۶۱۴۰۴		۹٫۹۷۸۶۰۸۰		۹٫۵۰۷۵۳۲۴		۰٫۴۹۲۴۶۷۶	۵۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			
	۲۰	۹٫۴۸۶۲۰۵۸		۹٫۹۷۸۶۰۱۲		۹٫۵۰۷۶۰۴۶		۰٫۴۹۲۳۹۵۴	۴۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			
	۳۰	۹٫۴۸۶۲۷۱۲		۹٫۹۷۸۵۹۴۴		۹٫۵۰۷۶۷۶۸		۰٫۴۹۲۳۲۳۲	۳۰	
			۶۵۴		۶۷		۷۲۲			
	۴۰	۹٫۴۸۶۳۳۶۶		۹٫۹۷۸۵۸۷۷		۹٫۵۰۷۷۴۹۰		۰٫۴۹۲۲۵۱۰	۲۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			
	۵۰	۹٫۴۸۶۴۰۲۰		۹٫۹۷۸۵۸۰۹		۹٫۵۰۷۸۲۱۲		۰٫۴۹۲۱۷۸۸	۱۰	
			۶۵۴		۶۸		۷۲۱			
۵۱	۰	۹٫۴۸۶۴۶۷۴		۹٫۹۷۸۵۷۴۱		۹٫۵۰۷۸۹۳۳		۰٫۴۹۲۱۰۶۷	۰	۹
			۶۵۴		۶۸		۷۲۲			

′	″	ماس	فرق	ماس التمام	فرق	جیب	فرق	جیب التمام	
	۱۰	۹٫۶۲۸۶۵۳۲۸		۹٫۹۷۸۵۶۷۳		۹٫۵۰۷۹۶۵۵		۰٫۳۹۲۰۳۴۵	۵۰
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱		
	۲۰	۹٫۶۲۸۶۵۹۸۲		۹٫۹۷۸۵۶۰۵		۹٫۵۰۸۰۳۷۶		۰٫۳۹۱۹۶۲۴	۴۰
			۶۵۳		۶۷		۷۲۲		
	۳۰	۹٫۶۲۸۶۶۶۳۵		۹٫۹۷۸۵۵۳۸		۹٫۵۰۸۱۰۹۸		۰٫۳۹۱۸۹۰۲	۳۰
			۶۵۴		۶۸		۷۲۱		
	۴۰	۹٫۶۲۸۶۷۲۸۹		۹٫۹۷۸۵۴۷۰		۹٫۵۰۸۱۸۱۹		۰٫۳۹۱۸۱۸۱	۲۰
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱		
	۵۰	۹٫۶۲۸۶۷۹۴۲		۹٫۹۷۸۵۴۰۲		۹٫۵۰۸۲۵۴۰		۰٫۳۹۱۷۴۶۰	۱۰
			۶۵۳		۶۸		۷۲۱		
۵۲	۰	۹٫۶۲۸۶۸۵۹۵		۹٫۹۷۸۵۳۳۴		۹٫۵۰۸۳۲۶۱		۰٫۳۹۱۶۷۳۹	۰

۲۷ درجے

جن میں صفحہ کی پیشانی پر جیب، جیب التام، مماس لکھے ہوئے ہیں؛ بائیں طرف کے ستون میں ان زاویوں کے دقیقے اور ثانیے لکھے ہوتے ہیں جو قبل الذکر زاویوں کے تکملے ہیں، ظاہر ہے کہ یہ موخرالذکر زاویے بڑھتے ہیں جیسے جیسے ہم ستون میں اوپر چڑھتے ہیں۔ ہم نے نمونہ کے طور پر اوپر کیلٹ (Callet) کے سات ہندسی لوکارتمی جدولوں سے ایک صفحہ کا حصہ دیا ہے، یہ جدولیں ۱۰″ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے تیار کی گئی ہیں۔

مثلاً جس ستون کے سرے پر جیب التام لکھا ہے اُس کی تیسری سطر سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ۹٫۹۷۰۹۶۰۱۲، زاویہ ۲۱° ۵′ ۲۰″ کی جدولی لوکارتمی جیب التام ہے، اور بائیں طرف کے ستون میں دقیقوں اور ثانیوں کو پڑھنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ یہی عدد، متکمل زاویے ۶۸° ۵۴′ ۴۰″ کی لوکارتمی جیب ہے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ لوکارتمی جیوب اور مماس زاویہ کے ساتھ بڑھتے ہیں لیکن لوکارتمی جیوب التمام اور مماس التمام زاویہ کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں۔

۱۱۱ ــــ اب اگر کوئی زاویہ ایسا ہو جس کی مقدار دو زاویوں کے درمیان جن کے تفاعل جدول میں درج ہیں واقع ہے تو اس زاویہ کے تفاعلوں کو معلوم کرنے کے لئے ہم ایک اصول استعمال کرینگے جس کی تحقیق ابھی کی جائیگی؛ وہ اصول یہ ہے کہ سوائے ان زاویوں کے جو یا تو بہت چھوٹے ہیں یا زاویہ قائمہ کے بہت قریب ہیں کسی زاویہ کے طبعی تفاعل یا لوکارتمی تفاعل میں چھوٹی تبدیلیاں خود زاویے میں جو تبدیلی ہوئی ہے اس کے متناسب ہوتی ہیں۔

مثلاً اگر دو متصلہ جدولی قیمتوں کے درمیان فرق ع ہے جب کہ جدولی زاویے میں ۱۰″ کا فرق ہے تو چھوٹے جدولی زاویہ کے تفاعل کی

قیمت اور اس سے بقدر مً بڑے ایک زاویہ کے تفاعل کی قیمت کے درمیان فرق م/۱۰ ء ہوگا؛ زاویہ میں ۱۰ً اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ ء ہے اور اس لیے زاویہ میں مً (< ۱۰ً) کے اضافہ کے جواب میں تفاعل کا اضافہ ء کی وہ کسر ہے جو م کو ۱۰ کے ساتھ ہے، یعنے م/۱۰ ء۔ کیلیٹ کی جدولوں میں (جس کا نمونہ اوپر دیا گیا ہے) متصلہ لوکارثموں کے درمیان کے فرق بغیر علامت اعشاریہ کے اُس ستون میں دیئے گئے ہیں جس کے سرے پر "فرق" لکھا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمیں ل جب ۱۷° ۵۱َ ۱۳ً کی قیمت معلوم کرنی ہے،
جدول سے ہم حاصل کرتے ہیں

ل جب ۱۷° ۵۱َ ۱۰ً = ۹٫۴۸۶۵۳۲۸

ل جب ۱۷° ۵۱َ ۲۰ً = ۹٫۴۸۶۵۹۸۲

فرق = ۶۵۴

تب ۳/۱۰ × ۶۵۴ = ۱۹۶٫۲ ، اس لیے پہلے لوکارثم میں ہمیں ۰٫۰۰۰۰۱۹۶ جمع کرنا چاہیے، اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل جب ۱۷° ۵۱َ ۱۳ً = ۹٫۴۸۶۵۵۲۲

نیز فرض کرو کہ ہمیں وہ زاویہ مطلوب ہے جس کا جدولی لوکارثمی مماس ۹٫۵۰۸۲۰۳۲ ہے۔ جدول میں ہم دیکھتے ہیں کہ دیا ہوا لوکارثم ذیل کے دو لوکارثموں کے درمیان واقع ہے۔

ل مس ۱۷° ۵۱َ ۴۰ً = ۹٫۵۰۸۱۸۱۹

ل مس ۱۷° ۵۱َ ۵۰ً = ۹٫۵۰۸۲۵۴۰

فرق = ۷۲۱

دیے ہوئے لوکارثمی مماس اور جدول سے حاصل شدہ پہلے لوکارثمی مماس کے درمیان فرق ۲۱۳ ہے، اس لیے وہ زاویہ جس کو ۱۷° ۵۱َ ۴۰ً میں جمع کرنا ہوگا ۲۱۳/۷۲۱ × ۱۰ً = ۲٫۹ً (تقریباً) ہے۔ پس مطلوبہ زاویہ ہے ۱۷° ۵۱َ ۴۳ً تقریباً۔

تناسب اجزاء کا اصول

۱۱۲ـــــــ اب ہم اس امر کی تحقیق کرینگے کہ تناسب اضافہ کا اصول جو ہم نے دفعہ سابق میں اختیار کیا ہے کہاں تک صحیح ہے اور کن مستثنیات کے ساتھ؟

فرض کرو کہ لا سے کوئی زاویہ تعبیر ہوتا ہے اور ف (لا) سے لا کا کوئی طبعی یا لوکارتمی تفاعل تعبیر ہوتا ہے تو ہم مختلف صورتوں میں یہ بتائینگے کہ اگر ھ کوئی چھوٹا زاویہ ہو جس کو دائری ناپ میں ناپا گیا ہے اور اگر اس کو لا میں جمع کیا جائے تو

ف (لا + ھ) ـ ف (لا) = ھ فَ (لا) + ھ² ر

جہاں فَ (لا)، لا کا کوئی دوسرا تفاعل ہے اور ر وہ تفاعل ہے جو محدود رہتا ہے جبکہ ھ = ۰

اس ربط سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہو تو لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے ف (لا + ھ) ـ ف (لا)، ھ کے تناسب ہے اور یہ معلوم ہوگا کہ بالعموم ھ² ر اس قدر چھوٹا ہوگا کہ وہ تفاعلوں کی قیمتوں پر اعشاریہ کے مقامات کی اس تعداد تک جو جدول میں درج ہے اثر انداز نہ ہوگا۔ (148)

پس لا کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے

$$\frac{\text{ف (لا + ھ) ـ ف (لا)}}{\text{ھ}}$$

اعشاریہ کے مقامات کی جدولی تعداد تک مستقل ہے تاہم دو مستثنیٰ صورتیں پیدا ہونگی۔

(ا) اگر لا ایسا ہو کہ فَ (لا) بہت چھوٹا ہے تو فرق ف (لا+ھ) ـ ف (لا) معدوم ہو سکتا ہے بلحاظ اس رتبہ کے جو جدولوں میں درج ہے؛ تب فرق ف (لا + ھ) ـ ف (لا) کو ناقابل قدر (Insensible) کہتے ہیں اور

اس صورت میں ف (لا) کی دو یا زیادہ متصلہ جدولی قیمتیں ایک ہی ہوسکتی ہیں۔

(۲) اگر لا ایسا ہو کہ بمقابلہ ف′ (لا) کے ر بڑا ہے تو ممکن ہے کہ رقم ھ^2 ر بمقابلہ ھ ف′ (لا) کے چھوٹی نہ ہو؛ اس صورت میں فرق ف (لا + ھ) - ف (لا)، ھ کے متناسب نہیں ہے اور اس کو ہم بے قاعدہ کہینگے۔

ان دونوں صورتوں (۱) اور (۲) میں تناسبوں کا طریقہ ناکام رہتا ہے لیکن ہم یہ بتائینگے کہ کس طرح خاص ترکیبوں سے یہ مشکلات رفع ہوتی ہیں۔

ٹیلر کے مسئلہ سے جس سے طالب علم واقف ہے یہ معلوم ہوگا کہ مندرجہ بالا مغالطہ ٹیلر کے مسئلہ

ف (لا + ھ) = ف (لا) + ھ ف′ (لا) + ½ ھ^2 ف″ (لا + ط ھ)

کی خاص صورت ہے جس میں ط، صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے، پس ر = ½ ف″ (لا + ط ھ) اور ف (لا + ھ) - ف (لا) = ھ ف′ (لا) مان لینے سے جو خطا ہوتی ہے وہ ½ ھ^2 ف″ (ی) کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان واقع ہے جو وہ حدود ی = لا اور ی = لا + ھ کے درمیان اختیار کرتا ہے۔

۳۱۱ — اول فرض کرو کہ ف (لا) = جب لا

تو جب (لا + ھ) = جب لا جم ھ + جم لا جب ھ

یا جب (لا + ھ) - جب لا = جم لا (ھ - 1/۶ ھ^3 + ...) - جب لا (½ ھ^2 - 1/۲۴ ھ^4 + ...)

= ھ جم لا ½ ھ^2 جب لا + ھ کی اعلیٰ قوتیں

اس صورت میں ف′ (لا) = جم لا، اور ر کی تقریبی قیمت = - ½ جب لا

پس جب (لا + ھ) - جب لا = ھ جم لا - ½ ھ^2 جب لا ..... (۱)

فرق کی تقریبی مساوات ہے۔

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ تقریبی طور پر

جم (لا + ھ) - جم لا = - ھ جب لا - ½ ھ^2 جم لا ...... (۲)

نیز مس (لا + ھ) - مس لا = جب ھ ÷ جم لا جم (لا + ھ) ....

= ھ ÷ (جم^{۲} لا - ھ جب لا جم لا)

یا تقریبی طور پر

مس (لا + ھ) - مس لا = ھ قط^{۲} لا + ھ^{۲} قط^{۲} مس لا ...... (۳)

(149) نیز ل جب (لا + ھ) - ل جب لا = لوک [جب (لا + ھ) ÷ جب لا]

= لوک (۱ - $\frac{1}{2}$ ھ^{۲} + ھ مم لا)

یا ل جب (لا + ھ) - ل جب لا = ھ مم لا - $\frac{1}{2}$ ھ^{۲} قم^{۲} لا .... (۴)

اسی طرح ل جم (لا + ھ) - ل جم لا = - ھ مس لا - $\frac{1}{2}$ ھ^{۲} قا^{۲} لا ..... (۵)

ل مس (لا + ھ) - ل مس لا = ھ ÷ جب لا جم لا - ۲ ھ^{۲} (جم ۲ لا ÷ جب^{۲} ۲ لا) ... (۶)

ہر صورت میں ہم نے س کی صرف تقریبی قیمت معلوم کی ہے - یعنی ہم نے وہ رقمیں چھوڑدی ہیں جن میں ھ کی تیسری اور اعلیٰ قوتیں شامل ہوتی ہیں۔ ان چھ مساواتوں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ھ کافی چھوٹا ہے تو فرق، لا کی ایسی قیمتوں کے لیے جو نہ چھوٹی ہیں اور نہ زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی، ھ کے تناسب میں ہیں۔ حسب ذیل مستثنیٰ صورتیں پیدا ہوتی ہیں:-

(۱) فرق، جب (لا + ھ) - جب (لا) ناقابل قدر ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ھ جم لا بہت چھوٹا ہے؛ نیز یہ فرق بے قاعدہ بھی ہے کیونکہ $\frac{1}{2}$ ھ^{۲} جب لا، ھ جم لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔

(۲) فرق، جم (لا + ھ) - جم لا، ناقابل قدر ہے جب کہ لا چھوٹا ہو،

نیز یہ اس صورت میں بے قاعدہ بھی ہے۔

(۳) فرق، مس (لا + ھ) ۔ مس لا، بے قاعدہ ہے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو کیونکہ ایسی صورت میں ھ^۲ قط^۲ لا مس لا، ھ قط^۲ لا کے ساتھ مقابلہ پذیر ہو سکتا ہے۔

(۴) فرق، ل جیب (لا + ھ) ۔ ل جیب لا، بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو اور ناقابل قدر اور بے قاعدہ دونوں جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۵) فرق، ل جم (لا + ھ) ۔ ل جم لا، ناقابل قدر اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا چھوٹا ہو، اور بے قاعدہ ہے جب کہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو۔

(۶) فرق، ل مس (لا + ھ) ۔ ل مس لا، بے قاعدہ ہے جب کہ لا خواہ چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ۔

یہ توجہ طلب ہے کہ جو فرق ناقابل قدر ہے وہ بے قاعدہ بھی ہے لیکن اس کا عکس درست نہیں ہے۔

تقریب کا وہ درجہ معلوم کرنے کے لیے جس تک متناسب اجزا کا اصول کسی صورت میں درست رہتا ہے سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ ر کی اصلی قیمت پر غور کیا جائے؛ جیب (لا + ھ) ۔ جیب لا کی صورت میں دوسری رقم کی اصلی قیمت ہے ۔ $\frac{۱}{۲}$ ھ^۲ جیب (لا + طہ ھ) جہاں طہ صفر اور ایک کے درمیان ہے؛ اگر جدول ۱۰" کے وقفوں پر بنائی گئی ہے تو $\frac{۱}{۲}$ ھ^۲ کی بڑی سے بڑی قیمت ہے

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۰\pi}{۱۸۰ \times ۶۰ \times ۶۰}\right)^{۲} \text{ یا } \frac{۱}{۲}\left(۰.۰۰۰۰۵\right)^{۲}$$

؛ اس سے اعشاریہ کے پہلے آٹھ مقامات تک کوئی خطا واقع نہیں ہوتی؛ مس (لا + ھ) ۔ مس لا کی صورت میں خطا ہے

(150)

$$(۰.۰۰۰۰۵)^{۲} \text{ قط}^{۲} (\text{لا} + \text{طہ ھ}) \text{ مس} (\text{لا} + \text{طہ ھ})$$

پس اگر مس لا + مس^۲ لا = ۴۰ تو خطا، اعشاریہ کے ساتویں مقام سے ظاہر ہونا شروع

کرےگی۔ ل جب لا کی صورت میں اعشاریہ کے ساتویں مقام تک کوئی خطا نہ ہوگی اگر لا > ۵ْ۔

۱۱۴۔۔۔۔ جب ایک تفاعل کے فرق اعشاریہ کے اتنے مقامات تک جتنے جدولوں میں درج ہوتے ہیں، ناقابل قدر ہوں تو جدولوں سے یہ تفاعل معلوم ہوگا جب کہ زاویہ معلوم ہو، لیکن اس کے برعکس ہم اس تفاعل کے ذریعہ کسی درمیانی زاویہ کو معلوم کرنے کے لیے جدولیں استعمال نہیں کرسکتے؛ مثلاً چھوٹے زاویوں کے لیے ہم ل جم لا کی قیمت سے لا متعین نہیں کرسکتے، یا ایک زاویہ قائمہ کے تقریباً مساوی زاویوں کے لیے ل جب لا کی قیمت سے لا متعین نہیں کرسکتے۔ جب ایک تفاعل کے فرق بے قاعدہ ہوں اور ناقابل قدر نہ ہوں تو متناسب اجزا کا مذکورہ بالا تقریبی طریقہ تفاعل کے ذریعہ زاویہ کی تعیین کے لیے کافی نہیں ہے، اور نہ زاویہ کے ذریعہ تفاعل کی تعیین کے لیے کافی ہے؛ مثلاً تقریب ناقابل قبول ہے

ل جب لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو،

ل جم لا کے لیے جبکہ لا تقریباً ایک زاویہ قائمہ ہو،

اور ل مس لا کے لیے جبکہ لا چھوٹا ہو یا تقریباً ایک زاویہ قائمہ کے مساوی ہو۔

ان صورتوں میں جن میں فرق بے قاعدہ ہیں اور ناقابل قدر نہیں ہیں حسب ذیل ذرائع استعمال کیے جاسکتے ہیں تاکہ تفاعل کی ایک دی ہوئی قیمت کے جواب میں زاویہ معلوم ہوسکے یا ایک دیے ہوئے زاویہ کے جواب میں تفاعل کی قیمت معلوم ہوسکے:۔

(۱) ہم ل جب لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ایک ثانیہ کے وقفوں پر کے زاویوں کے لیے پہلے چند درجوں تک محسوب کی گئی ہوتی ہیں اور ل جم لا، ل مس لا کی وہ جدولیں جو ۹۰ْ کے قریب کے چند زاویوں کے لیے ایک ثانیہ کے وقفوں پر تیار کی گئی ہوتی ہیں استعمال کرسکتے ہیں۔ کیلٹ اپنے مثلثی جدولوں میں ایسی ایک جدول دیتا ہے۔

پھر ہم اُن تمام زاویوں کے لیے جو صفر کے یا زاویہ قائمہ کے بالکل قریب نہ ہوں تناسب اجزا کا اصول استعمال کر سکتے ہیں۔

(۲) ڈلمبر کا طریقہ

اس طریقہ میں ل جب لا یا ل مس لا کو ایسی دو رقموں کے مجموعہ میں توڑ دیا جاتا ہے کہ ان میں سے ایک کے لئے فرق نا قابل قدر ہوتے ہیں لا کی اُن قیمتوں کے نزدیک جہاں بے قاعدگی واقع ہوتی ہے، اور دوسری رقم کے لیے فرق باقاعدہ ہوتے ہیں۔ اِن رقموں میں سے پہلی کے لیے فرق بے قاعدہ ہے لیکن اس کی چنداں اہمیت نہیں ہے کیونکہ یہ فرق نا قابل قدر بھی ہے۔ پس اگر ایک چھوٹے زاویہ نؔ کا دائری ناپ لا ہو تو

$$\text{ل جب نؔ} = \left(\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} + \text{ل عہ}\right) + \text{لوک ن،}$$

$$\text{ل مس نؔ} = \left(\text{لوک}\,\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}} + \text{ل عہ}\right) + \text{لوک ن،} \qquad (151)$$

جہاں عہ، ۱ؔ کا دائری ناپ ہے۔

اب $\text{لوک}\,(\text{ن} + \text{ھ}) - \text{لوک ن} = \text{لوک}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ن}}\right)$

$$= \frac{\text{ھ}}{\text{ن}} - \frac{\text{ھ}^2}{2\,\text{ن}^2} + \ldots\ldots،$$

اس لیے لوک ن کے لیے فرق باقاعدہ ہیں اگر ھ بمقابلہ ن کے چھوٹا ہو۔ نیز $\text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$، $\text{لوک}\,\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ کے لیے فرق ناقابل قدر ہیں کیونکہ

$$\text{لوک}\,\frac{\text{جب}\,(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{لا}+\text{ھ}} - \text{لوک}\,\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\,\frac{\text{جب}\,(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{جب لا}} - \text{لوک}\,\frac{\text{لا}+\text{ھ}}{\text{لا}}$$

$$= \text{ھ مم لا} - \frac{\text{ھ}^2}{2}\,\text{قم}^2\,\text{لا} - \frac{\text{ھ}}{\text{لا}} + \frac{\text{ھ}^2}{2\,\text{لا}^2}$$

$$= \text{ھ}\left(\text{مم لا} - \frac{1}{\text{لا}}\right) + \frac{\text{ھ}^2}{2}\left(\frac{1}{\text{لا}^2} - \text{قم}^2\,\text{لا}\right)،$$

Delambre ؎

اور $\dfrac{\text{لوک مس}\,(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{لا}+\text{ھ}} - \text{لوک}\,\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$

$= \text{ھ}\left(\dfrac{1}{\text{جب لا جم لا}} - \dfrac{1}{\text{لا}}\right) + \dfrac{\text{ھ}^2}{2}\left(-\dfrac{\text{۴ جم ۲ لا}}{\text{جب}^2\,\text{۲ لا}} + \dfrac{1}{\text{لا}^2}\right)$

اِن میں سے ہر فرق ناقابل قدر ہے کیونکہ ھ کا مربع چھوٹا ہے جبکہ لا چھوٹا ہو۔

اگر لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل ع، لوک $\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ + ل ع کی تینوں کی جدولیں ربع کے پہلے چند درجوں تک تیار کی جائیں تو ہم ان جدولوں کو عددوں کے طبعی لوکارثموں کی جدولوں کے ساتھ ن کو ٹھیک طور پر معلوم کرنے کے لیے استعمال کر سکتے ہیں جبکہ ل جب نً یا ل مس نً دیا گیا ہو، یا بالعکس۔

اگر ل جب نً یا ل مس ن دیا گیا ہے تو ن کی تقریبی قیمت معلوم کرو؛ پھر جدول سے لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل ع یا لوک $\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ + ل ع کی قیمت حاصل کرو جن میں سے ہر ایک بہت سست بدلتا ہے۔ تب لوک ن اِس قیمت

$$\text{ل جب نً} - \left(\text{لوک}\,\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}} + \text{ل ع}\right)$$

یا

$$\text{ل مس نً} - \left(\text{لوک}\,\dfrac{\text{مس لا}}{\text{لا}} + \text{ل ع}\right)$$

سے حاصل ہوتا ہے اور ہم طبعی لوکارثموں کی جدول سے ن کو ٹھیک ٹھیک معلوم کر لیتے ہیں۔ اگر ن دیا گیا ہے تو جدول سے لوک $\dfrac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ + ل ع کی قیمت ملتی ہے اور پھر جب نً کو ضابطہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔ (152)

(۳) میاسکلین (Maskelyne) کا طریقہ۔

اس طریقہ کا اصول وہی ہے جو ڈلمبر کے طریقہ کا ہے۔ اگر

لا ایک چھوٹا زاویہ ہو تو

$$\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{6} = \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \text{جم}^{\frac{1}{3}}\,\text{لا}$$ ، تقریباً

اس لیے لوک جب لا = لوک لا + $\frac{1}{3}$ لوک جم لا

اب چونکہ لا ایک چھوٹا زاویہ ہے، لوک جم لا کے فرق ناقابل قدر ہیں؛ اس لیے جم لا کی تقریبی قیمت کا استعمال کرنا کافی ہے۔ اگر لوک جب لا دیا گیا ہے تو ہم لا کی تقریبی قیمت معلوم کرتے ہیں اور اس کو لوک جم لا کی قیمت معلوم کرنے کے لیے استعمال کرتے ہیں؛ پھر مساوات بالا سے لا حاصل ہوجاتا ہے۔ اگر لا دیا گیا ہے تو ہم طبعی لوکارتموں کی جدول سے لوک لا ٹھیک ٹھیک معلوم کرسکتے ہیں اور نیز لوک جم لا کی تقریبی قیمت؛ تب اوپر کے ضابطہ سے لوک جب لا مل جاتا ہے۔ اسی طرح ثابت ہوسکتا ہے کہ لوک مس لا، ضابطہ لوک مس لا = لوک لا − $\frac{2}{3}$ لوک جم لا سے حاصل ہوسکتا ہے۔

مثال

ثابت کرو کہ ضابطہ ذیل میاسکلین کے ضابطہ سے زیادہ قریبی طور پر صحیح ہے۔

لوک جب ط = لوک ط − $\frac{1}{45}$ لوک جم ط + $\frac{64}{45}$ لوک جم $\frac{ط}{2}$

لوکارثمی اعمال حساب کے لیے ضابطوں کو موزوں بنانا

۱۱۵ — کسی جملہ کو ایسی شکل میں تحویل کرنے کے لیے کہ لوکارتموں کی جدولوں کی مدد سے عددی قیمتیں محسوب کی جاسکیں ایسے ابدالات

عمل میں لانے چاہئیں جو دیے ہوئے جملوں کو سادہ جملوں کے حاصل ضرب میں تحویل کردیں؛ یہ عمل ایک یا زیادہ معاون زاویوں کے ذریعہ اکثر ہوسکیگا مثلاً دیکھو امثلہ ذیل :-

(۱) $\sqrt[3]{ا^6 + ب^6} = ا^2$ قط$^{\frac{2}{3}}$ فہ، جہاں مس فہ = $\frac{ب^3}{ا^3}$

پس لوک $\sqrt[3]{ا^6 + ب^6}$ = ۲ لوک ا + $\frac{2}{3}$ (ل قط فہ - ۱۰)

جہاں ل مس فہ = ۱۰ + ۳ (لوک ب - لوک ا)

اس طرح $\sqrt[3]{ا^6 + ب^6}$ لوکارتمی جدولوں کے ذریعہ محسوب کیا جا سکتا ہے اگر فہ پہلے اِن جدولوں سے معلوم کرلیا گیا ہو۔

(۲) ا جم عہ + ب جب عہ = ا جم (عہ - فہ) قط فہ، جہاں مس فہ = $\frac{ب}{ا}$ (158)

پس لوک (ا جم عہ + ب جب عہ) = لوک ا + ل جم (عہ - فہ) - ل جم فہ

جہاں ل مس فہ = ۱۰ + لوک ب - لوک ا

سے فہ معلوم ہوتا ہے۔

۱۱۶ ـــــ دو درجی مساوات کی اصلیں عدداً محسوب کرنا جبکہ اصلیں حقیقی ہوں۔

فرض کرو کہ مساوات $ا لا^2 + ب لا + ج = ۰$ ہے اور اول فرض کرو کہ ا اور ج دونوں مثبت ہیں۔ اب مساوات مس^2 طہ - ۲ قم ۲ طہ مس طہ + ۱ = ۰ پر غور کرو اور فرض کرو لا = ما $\sqrt{\frac{ج}{ا}}$ تو لا کی مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$ما^2 + ب ما \Big/ \sqrt{ا ج} + ۱ = ۰$$

پس اگر جب ۲ طہ = ۲ $\sqrt{ا ج} \Big/ ب$ تو ما کی دو درجی مساوات وہی ہوگی جو - مس طہ کی ہے جس کی اصلیں - مس طہ، - مم طہ ہیں - پس دیے ہوئے دو درجی کی اصلیں ہیں

$$\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ \text{مس}\ \text{ط}\ ،\quad -\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ا}}}\ \text{مم}\ \text{ط}$$

جہاں جب ۲ ط = $\frac{۲\sqrt{\text{اج}}}{\text{ب}}$ ، اور اس لیے اصلیں لوگارتمی جدولوں کے ذریعہ محسوب کی جا سکتی ہیں۔

اگر ا اور ج مختلف العلامت ہوں تو ہم دو درجی کو ا لا۲ + ب لا − ج = ۰ لے سکتے ہیں۔ اس صورت میں رکھو لا = م $\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ا}}}$ تو دو درجی

$$\text{م}^{۲} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{اج}}}\,\text{م} - ۱ = ۰$$

میں تحویل ہوتا ہے۔ اس مساوات کا مقابلہ مساوات

$$\text{مس}^{۲}\,\text{ط} + ۲\ \text{مم}\ ۲\text{ط}\ \text{مس}\ \text{ط} - ۱ = ۰$$

کے ساتھ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر مس ۲ ط = $\frac{۲\sqrt{\text{اج}}}{\text{ب}}$ تو لا میں دو درجی مساوات کی اصلیں یعنی $\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ا}}}$ مس ط اور $-\sqrt{\tfrac{\text{ج}}{\text{ا}}}$ مم ط۔

۱۱ — کعبی لا۳ + ق لا + ر = ۰ کی اصلیں محسوب کرنا جبکہ اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں۔

مساوات

$$\text{جب}^{۳}\,\text{ط} - \tfrac{۳}{۴}\,\text{جب}\ \text{ط} + \tfrac{۱}{۴}\,\text{جب}\ ۳\text{ط} = ۰$$

پر غور کرو۔ فرض کرو لا = م $\sqrt{-\tfrac{۴}{۳}\text{ق}}$ تو لا میں جو کعبی مساوات ہے وہ ہو جاتی ہے

$$\text{م}^{۳} - \tfrac{۳}{۴}\,\text{م} + \text{ر}\left(-\tfrac{۴}{۳}\text{ق}\right)^{-\frac{۳}{۲}} = ۰$$

یہ مساوات وہی ہوگی جو جب ط کی مندرجہ بالا مساوات ہے اگر

$$\text{جب}\ ۳\text{ط} = ۴\text{ر}\left(-\tfrac{۴}{۳}\text{ق}\right)^{-\frac{۳}{۲}} = \left(-\frac{۲۷\,\text{ر}^{۲}}{۴\,\text{ق}^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}\ ،$$

اس لیے لا کی قیمتیں ہیں:

$$\sqrt{-\tfrac{۴}{۳}\text{ق}}\ \text{جب}\ \text{ط}\ ،\quad \sqrt{-\tfrac{۴}{۳}\text{ق}}\ \text{جب}\left(\text{ط}+\tfrac{۲}{۳}\pi\right)\ ،\quad \sqrt{-\tfrac{۴}{۳}\text{ق}}\ \text{جب}\left(\text{ط}+\tfrac{۴}{۳}\pi\right)$$

۱ وہ شرط کہ کعبی کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں یہ ہے کہ جب ... ہے

(354) ہم کسی آئندہ باب میں دو خیالی اصلوں والی کعبی مساوات کی اصلیں دریافت کرنے کا طریقہ بیان کرینگے۔

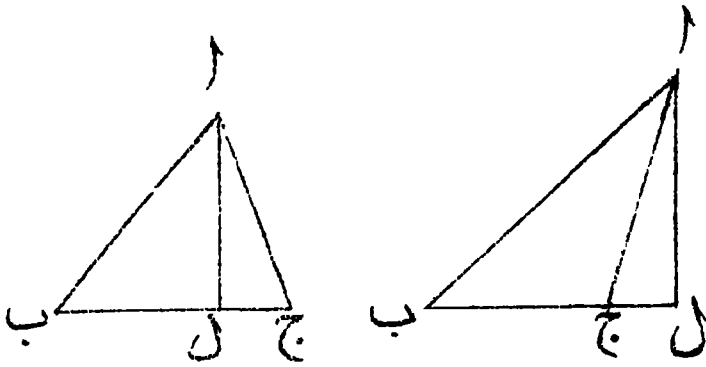
وہ اعمال جن کے ذریعہ ہم نے دو درجی اور کعبی مساواتوں کو حل کیا ہے یہ بتاتے ہیں کہ یہ دو جبری مسئلے فی الواقع ان ہندسی مسئلوں کے مماثل ہیں جو ایک زاویہ کی علی الترتیب تنصیف و تثلیث سے متعلق ہیں اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک دو درجی مساوات صرف پٹری اور پرکار کی مدد سے ترسیمی طور پر حل کی جا سکتی ہے لیکن کعبی مساوات ان کی مدد سے ترسیمی طور پر بالعموم حل نہیں ہو سکتی کیونکہ یہ آلے ایک زاویہ کی تثلیث کے ہندسی مسئلہ کو عام طور پر حل کرنے کے لیے ناکافی ہیں۔

(155)

دسواں باب

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان رشتے

۱۱۸ — اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ہم زاویوں ب ا ج، ا ب ج، ا ج ب کی مقداروں کو علی الترتیب بڑے حروف ا، ب، ج سے تعبیر کرینگے۔ اور ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے طولوں کو علی الترتیب چھوٹے حروف ا، ب، ج سے۔ ہم اس باب میں مختلف اہم مسئلوں کی تحقیق کرینگے جو مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کو زاویوں کے دائری تفاعلوں کے ساتھ مربوط کرتے ہیں۔ ان ضابطوں سے اُن طریقوں کی بنیاد ملیگی جن کے ذریعہ مثلث کو اُن مختلف صورتوں میں حل کیا جاتا ہے جن میں مثلث کے تین اجزا دیے جاتے ہیں۔

۱۱۹ — ظلوں کے بنیادی مسئلے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ب ج پر ب ا، ا ج کے ظلوں کا مجموعہ ب ج کے مساوی ہے اور ب ج پر کے ایک عمود پر ان کے ظلوں کا مجموعہ صفر ہے۔ ان واقعات کو بیان کرنے کے بعد چونکہ ا ج کی مثبت سمت، ب ج کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ — ج بناتی ہے، اس لیے

ب ا جم ب + ا ج جم ج = ا ل،

یا ج جم ب + ب جم ج = ل،

اور ب ا جب ب - ا ج جب ج = ۰،

یا ج جب ب - ب جب ج = ۰،

(۱۵۶) جس کو لکھا جا سکتا ہے $\frac{ب}{جب\ ب} = \frac{ج}{جب\ ج}$،

اسی طرح دیگر دو ضلعوں اور ان پر کے عمودوں میں سے ہر ایک پر باری باری سے ظل لینے سے جو رشتے حاصل ہوتے ہیں اُن کو اور محصلہ بالا رشتوں کو حسب ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

ا = ب جم ج + ج جم ب،
ب = ج جم ا + ا جم ج، .... (۱)
ج = ا جم ب + ب جم ا،

$\frac{ا}{جب\ ا} = \frac{ب}{جب\ ب} = \frac{ج}{جب\ ج}$ .... (۲)

مساواتوں (۲) سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ کسی مثلث کے اضلاع، متقابلہ زاویوں کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں۔

۱۲۰ — رشتوں (۲) کو اس طرح بھی ثابت کیا جا سکتا ہے:-
مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ اس کا نصف قطر ر ہے، تب ضلع ب ج = ۲ × دائرہ کا نصف قطر × اس زاویے کے نصف کی جیب جو ب ج کے محاذی مرکز پر بنتا ہے

یعنے ب ج = ۲ ر جب ا یا ۲ ر جب (۱۸۰° - ا)

پس ا = ۲ ر جب ا

اسی طرح ب = ۲ ر جب ب

اور ج = ۲ ر جب ج

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب ج}} = \text{۲ ر}$$

رشتہ (۲) کو (۱) سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے، چنانچہ پہلی دو مساواتوں کو شکل

ا - ب جم ج - ج جم ب = ۰،

- ا جم ج + ب - ج جم ا = ۰،

میں رکھنے سے ہم ا، ب، ج کی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں اور اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا}}{\text{جم ج جم ا + جم ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم ب جم ج + جم ا}} = \frac{\text{ج}}{\text{۱ - جم}^2\text{ ج}}؛$$

$$\text{اس لئے}\quad \frac{\text{ا}}{\text{جب ا جب ج}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب جب ج}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب}^2\text{ ج}}$$

$$\text{یعنے}\quad \frac{\text{ا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جب ج}}$$

(۲) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$\text{ا} = \frac{\text{ا}}{\text{جب ا}}\text{ جب (ب + ج)} = \frac{\text{ا}}{\text{جب ا}}\text{(جب ب جم ج + جم ب جب ج)،}$$

اس لیے ا = (ب / جب ب) جب ب جم ج + (ج / جب ج) جم ب جب ج = ب جم ج + ج جم ب

جو رشتوں (۱) میں سے پہلا رشتہ ہے۔ بالکل اسی طرح دیگر دو رشتے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

اگر ہم (۱) کی تین مساواتوں سے ا، ب، ج کو ساقط کریں تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

جم² ا + جم² ب + جم² ج + ۲ جم ا جم ب جم ج = ۱

جو مثلث کے زاویوں کی جیب التماموں کے درمیان درست رہتا ہے۔

(157) **۱۲۱** — اگر ہم مساواتوں (۱) کو علی الترتیب۔ ا، ب، ج سے ضرب دیں اور پھر انہیں جمع کریں

تو ب² + ج² − ا² = ۲ ب ج جم ا

جس سے ایک زاویے کی جیب التمام کے لیے ضلعوں کی رقوم میں ایک جملہ حاصل ہوتا ہے؛ اس ربطہ کو مع اُن دو ربطوں کے جو جم ب اور جم ج کے لیے ہیں اس طرح لکھا جا سکتا ہے

ا² = ب² + ج² − ۲ ب ج جم ا
ب² = ج² + ا² − ۲ ج ا جم ب .... (۳)
ج² = ا² + ب² − ۲ ا ب جم ج

۱۲۲ — ہم ان رشتوں (۳) کو اقلیدس جلد دوم مسائل ۱۲ اور ۱۳ کی مدد سے بالراست اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر ا ل، ب ج پر عمود ہو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا ب² = ا ج² + ب ج² − ۲ ب ج × ج ل

جبکہ زاویہ ج حادہ ہو، اور

ا ب² = ا ج² + ب ج² + ۲ ب ج × ج ل

جبکہ زاویہ ج منفرجہ ہو۔ پہلی صورت میں

ج ل = ا ج جم ج

اور دوسری صورت میں

$$\text{ج ل} = \text{ا ج جم} (\text{۱۸۰}^\circ - \text{ج}) = - \text{ا ج جم ج}$$

اس لیے ہر دو صورتوں میں

$$\text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{۲ ا ب جم ج}$$

رشتوں (۳) سے (۲) کو اخذ کرنے کے لیے چونکہ

$$\text{جم ا} = \frac{\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2}{\text{۲ ب ج}}$$

$$\text{اس لیے جب}^2\text{ ا} = \frac{\text{۴ ب}^2\text{ج}^2 - (\text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2)^2}{\text{۴ ب}^2\text{ج}^2} = \frac{(\text{۲ ب ج} + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - \text{ا}^2)(\text{۲ ب ج} + \text{ا}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2)}{\text{۴ ب}^2\text{ج}^2}$$

$$\text{یا جب}^2\text{ ا} = \frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})(\text{ج} + \text{ا} - \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})}{\text{۴ ب}^2\text{ج}^2}$$

پس ا^2 سے تقسیم کرنے سے $\frac{\text{جب}^2\text{ ا}}{\text{ا}^2}$ حسب ذیل تشاکل جملے کے مساوی ہے

$$\frac{(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})(\text{ج} + \text{ا} - \text{ب})(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})}{\text{۴ ا}^2\text{ب}^2\text{ج}^2}$$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{جب}^2\text{ ا}}{\text{ا}^2} = \frac{\text{جب}^2\text{ ب}}{\text{ب}^2} = \frac{\text{جب}^2\text{ ج}}{\text{ج}^2}$$

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) سے (۱) کو اخذ کرنے کے لیے (۳) کی پہلی دو مساواتوں کو ج سے تقسیم کرو اور پھر انہیں جمع کرو تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ج}} = \text{۲ ج} + \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ج}} - \text{۲} (\text{ب جم ا} + \text{ا جم ب})$$

$$\text{یا}\quad \text{ج} = \text{ب جم ا} + \text{ا جم ب}$$

(158)

۱۲۳ — ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}(\text{۱} - \text{جم ا})\text{،}\quad \text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}(\text{۱} + \text{جم ا})$$

اس لیے

$$\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{\text{ب}^2+\text{ج}^2-\text{ا}^2}{2\,\text{ب ج}}\right),$$

$$\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\text{ب}^2+\text{ج}^2-\text{ا}^2}{2\,\text{ب ج}}\right),$$

یا

$$\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{(\text{ا}+\text{ب}-\text{ج})(\text{ا}-\text{ب}+\text{ج})}{4\,\text{ب ج}}$$

$$\text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{(\text{ا}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ا})}{4\,\text{ب ج}}$$

اب فرض کرو $2\text{س} = \text{ا}+\text{ب}+\text{ج}$ تو $2(\text{س}-\text{ا}) = \text{ب}+\text{ج}-\text{ا}$،
اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{ب ج}},\quad \text{جم}^2\tfrac{1}{2}\text{ا} = \frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}};$$

$$\text{اس لیے جب}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \left\{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{ب ج}}\right\}^{\frac{1}{2}},\quad \text{جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \left\{\frac{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}{\text{ب ج}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} = \left\{\frac{(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}{\text{س}(\text{س}-\text{ا})}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

ان ضابطوں کے ذریعے زاویوں کے تفاعل معلوم کرنے میں جبکہ ضلع دیے گئے ہوں زیادہ سہولت ہے بہ نسبت ضابطوں (۳) کے کیونکہ ان کو زیادہ آسانی کے ساتھ لوکارتمی اعمال حساب کے لیے موزوں بنایا جاسکتا ہے۔

۱۲۴ — چونکہ $\dfrac{\text{جب ب}}{\text{ب}} = \dfrac{\text{جب ج}}{\text{ج}}$ اس لیے

$$\frac{\text{جب ب} \pm \text{جب ج}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ب} \pm \text{ج}}{\text{ا}},\quad \text{یا}\quad \frac{2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}\pm\text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}\mp\text{ج})}{2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}+\text{ج})} = \frac{\text{ب}\pm\text{ج}}{\text{ا}}$$

اس لیے $\frac{ب+ج}{ا} = \frac{جم \frac{1}{2}(ب-ج)}{جم \frac{1}{2}(ب+ج)}$، اور

$\frac{ب-ج}{ا} = \frac{جب \frac{1}{2}(ب-ج)}{جب \frac{1}{2}(ب+ج)}$،

یا $ا = \frac{(ب+ج) جب \frac{1}{2} ا}{جم \frac{1}{2}(ب-ج)}$، $ا = \frac{(ب-ج) جم \frac{1}{2} ا}{جب \frac{1}{2}(ب-ج)}$ ......(۵)

اس لیے عمل تقسیم سے ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$مس \frac{1}{2}(ب-ج) = \frac{ب-ج}{ب+ج} مم \frac{1}{2} ا$ ....(۵)

ان ضابطوں کو ہندسی طور پر ثابت کرنے کے لیے مرکز ا اور نصف قطر ا ب کے ساتھ ایک دائرہ کھینچو جو ا ج کو د اور ع پر قطع کرے، د ف، ب ع کے متوازی کھینچو، تب

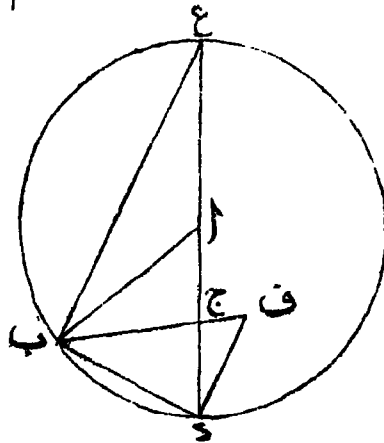
ج ع = ب + ج، د ج = ج - ب، د ع ب = $\frac{1}{2}$ ا، اور
د ب ف = ج + $\frac{1}{2}$ ا - ۹۰ = $\frac{1}{2}$ ج - $\frac{1}{2}$ ب؛ اب چونکہ

$\frac{ج د}{ج ب} = \frac{جب د ب ف}{جب ع د ب}$، یا $\frac{ب-ج}{ا} = \frac{جب \frac{1}{2}(ب-ج)}{جم \frac{1}{2} ا}$

(159)

اور نیز $\frac{\text{ب}+\text{ج}}{\text{ج}-\text{ب}} = \frac{\text{جع}}{\text{جہ}} = \frac{\text{آب}}{\text{دف}} = \frac{\text{بد مم}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}}{\text{بد مس}\ \frac{1}{2}\,(\text{ج}-\text{ب})}$

$= \frac{\text{مم}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}}{\text{مس}\ \frac{1}{2}\,(\text{ج}-\text{ب})}$

اس لیے $\text{مس}\ \frac{1}{2}\,(\text{ب}-\text{ج}) = \frac{\text{ب}-\text{ج}}{\text{ب}+\text{ج}}\ \text{مم}\ \frac{1}{2}\ \text{ا}$

مثلث کا رقبہ

۱۲۵ ـــــ کسی مثلث کا رقبہ اُس متوازی الاضلاع کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جو اُسی قاعدہ پر اُسی ارتفاع کے ساتھ بنایا گیا ہو جو کہ مثلث کے ہیں؛ اگر ضلع ل قاعدہ ہو تو ارتفاع ب جب ج یا ج جب ب ہوگا اور اس لیے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں حسب ذیل جملے ملینگے:-

$\frac{1}{2}$ ل ب جب ج اور $\frac{1}{2}$ ل ج جب ب

پس مثلث کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ × کوئی دو ضلعوں کا حاصل ضرب × ان کے درمیانی زاویہ کی جیب

یعنے مثلث کا رقبہ اس کے کسی دو ضلعوں اور ان کے درمیانی زاویہ کی جیب کے حاصل ضرب کا نصف ہوتا ہے۔

اب جب ا کی بجائے وہ جملہ جو دفعہ ۱۲۲ میں معلوم کیا جا چکا ہے یعنے

$\frac{1}{2\,\text{ب ج}}\sqrt{(\text{ل}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ل})(\text{ج}+\text{ل}-\text{ب})(\text{ل}+\text{ب}-\text{ج})}$

استعمال کرنے سے مثلث کے رقبہ کے لیے ہمیں یہ جملہ

$\frac{1}{4}\sqrt{(\text{ل}+\text{ب}+\text{ج})(\text{ب}+\text{ج}-\text{ل})(\text{ج}+\text{ل}-\text{ب})(\text{ل}+\text{ب}-\text{ج})}$

یا $\sqrt{\text{س}(\text{س}-\text{ا})(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})}$ .... (۶)

ملتا ہے۔ اسکندریہ کے ہیرو[1] نے یہ ضابطہ تقریباً ۱۲۵ ق-م میں حاصل کیا تھا۔ اِس ضابطہ (۶) کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{1}{4}\sqrt{2\text{ب}^2\text{ج}^2+2\text{ج}^2\text{ا}^2+2\text{ا}^2\text{ب}^2-\text{ا}^4-\text{ب}^4-\text{ج}^4}$$

(160)

مثلث کے ضلعوں اور زاویوں میں تغیرات

۱۲۶ ـــــ اب ہم ان رشتوں کی تحقیق کرینگے جو ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتوں کے مثبت یا منفی چھوٹے اضافوں کے درمیان پائے جاتے ہیں۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کے اجزاء میں سے تین اجزا کی پیمایش کی گئی ہے جن میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہے، باقی دیگر تین اجزاء اس باب کے ضابطوں سے متعین ہونگے۔ تب ان اجزاء کے اضافوں کے درمیان جو رشتے ہوتے ہیں ان کی مدد سے ہم یہ معلوم کر سکینگے کہ قبل الذکر اجزا کی پیمائش میں چھوٹی خطاؤں کی موجودگی سے مابعد الذکر تین اجزا کی قیمتوں میں کیا خطائیں واقع ہوتی ہیں۔ ہم فرض کر لینگے کہ اضافے اس قدر چھوٹے ہیں کہ ان کے مربع اور حاصل ضرب نظر انداز ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کی قیمتیں اُ، بُ، جُ، اَ، بَ، جَ ہیں جن میں تین یعنے ایک ضلع اور دو زاویے، یا دو ضلع اور ایک زاویہ، یا تین ضلعوں کی قیمتیں پیمایش کے ذریعہ معلوم کی گئی ہیں اور دوسری تین قیمتیں ان پیمایش کردہ قیمتوں کے ساتھ مذکورۂ بالا ضابطوں کے

---

[1] دیکھو بال کی ہسٹری آف میاتھمیٹکس صفحہ ۲۰۸ جس میں اس ضابطہ کا اصلی ہندسی ثبوت دیا گیا ہے

ذریعہ مربوط ہیں۔ اگر ان پیمایش کردہ اجزا میں کوئی خطا واقع ہوئی ہے تو اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ دیگر تین اجزا کی قیمتوں میں جو ضابطوں سے حاصل کی گئی ہیں خطائیں واقع ہونگی۔

فرض کرو کہ زاویوں اور ضلعوں کی صحیح قیمتیں ا+مف ا، ب+مف ب، ج+مف ج، ا+مف ا، ب+مف ب، ج+مف ج ہیں: ہم ان چھ خطاؤں مف ا، مف ب، مف ج، مف ا، مف ب، مف ج کے درمیان رشتے معلوم کرینگے۔ یہ فرض کرنا سہولت بخش ہوگا کہ زاویوں کے اضافے دائری ناپ میں پیمایش کیے گئے ہیں، ان کو فوراً ثانیوں میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے ج جب ب ـ ب جب ج = ۰

اور (ج + مف ج) جب (ب + مف ب) ـ (ب + مف ب) جب (ج + مف ج) = ۰

اب چونکہ مف ب، مف ج کے مربع نظر انداز ہو سکتے ہیں اس لیے

جب (ب + مف ب) = جب ب + مف ب جم ب،

جب (ج + مف ج) = جب ج + مف ج جم ج

اس لیے (ج + مف ج) (جب ب + مف ب جم ب) ـ (ب + مف ب) (جب ج + مف ج جم ج) = ۰

اس لیے اگر مف ج، مف ب، مف ب، مف ج کے حاصل ضرب نظر انداز کیے جائیں تو

ج جم ب × مف ب + جب ب × مف ج ـ ب جم ج مف ج ـ جب ج مف ب = ۰؛

اسی طرح اور دو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور یہ کل تین مساواتیں اس طرح لکھی جا سکتی ہیں :-

$$\left.\begin{array}{l} \text{جب ج × مف ب ـ جب ب × مف ج = ج جم ب × مف ب ـ ب جم ج × مف ج} \\ \text{جب ا × مف ج ـ جب ج × مف ا = ا جم ج × مف ج ـ ج جم ا × مف ا} \\ \text{جب ب مف ا ـ جب ا × مف ب = ب جم ا × مف ا ـ ا جم ب × مف ب} \end{array}\right\} \cdots (۱)$$

نیز چونکہ

ا + ب + ج = π ،

اور ا + مف ا + ب + مف ب + ج + مف ج = ۲π

(161) اس لیے مف ا + مف ب + مف ج = ۰ ، ....(۸)

مساواتیں (۷) ایک دوسرے کے غیر تابع نہیں ہیں جیسا کہ ان کو شکل

مف ب / ب − مف ج / ج = مم ب × مف ب − مم ج × مف ج ،

مف ج / ج − مف ا / ا = مم ج × مف ج − مم ا × مف ا ،

مف ا / ا − مف ب / ب = مم ا × مف ا − مم ب × مف ب

میں رکھنے سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کیونکہ ان مساواتوں سے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی ایک مساوات دیگر دو مساواتوں سے اخذ کی جا سکتی ہے۔

پس مساواتوں (۷) میں سے کوئی دو مساواتیں مع مساوات (۸) کے چھ خطاؤں میں سے تین کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں جبکہ دیگر تین خطائیں دی گئی ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک خطاء ضلع سے متعلق ہو۔

(۷) اور (۸) سے مف ب اور مف ج کو ساقط کرنے سے ہمیں ایک مساوات حاصل ہوتی ہے جس سے مف ا حاصل ہوتا ہے مف ب، مف ج، اور مف ا کی رقوم میں؛ اس کو ضابطہ ا² = ب² + ج² − ۲ ب ج جم ا سے بھی بالراست معلوم کیا جا سکتا ہے؛ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

ا مف ا = (ب − ج جم ا) مف ب + (ج − ب جم ا) مف ج + ب ج جب ا × مف ا

یہ اور اس کے متناظر دو ضابطے رشتہ (۱) کی مدد سے ذیل کی شکل میں لکھے جا سکتے ہیں۔

ا مف ا = ا جم ج × مف ب + ا جم ب × مف ج + ب ج جب ا × مف ا
ب مف ب = ب جم ا × مف ج + ب جم ج × مف ا + ج ا جب ب × مف ب ‫ } ‬.....(۹)
ج مف ج = ج جم ب × مف ا + ج جم ا × مف ب + ا ب جب ج × مف ج

کثیر الاضلاعوں کے زاویوں اور ضلعوں کے درمیان رشتے

۱۲۷ —— فرض کرو کہ کسی مستوی بند کثیر الاضلاع کے ضلع ترتیب وار ل۱، ل۲، ل۳ ...... لن سے تعبیر ہوتے ہیں اور فرض کرو کہ ع۱، ع۲ ... عن وہ زاویے ہیں جو یہ ضلع کسی ثابت خط مستقیم کے ساتھ جو اسی مستوی میں واقع ہے بناتے ہیں اور سب کے سب ایک ہی سمت میں مثبت ناپے گئے ہیں؛ تب ظلوں کے بنیادی مسئلہ (دفعہ ۱۷) سے ثابت خط مستقیم پر اور اس کے عمود پر ظل لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل۱ جم ع۱ + ل۲ جم ع۲ + . . . + لن جم عن = ۰

ل۱ جب ع۱ + ل۲ جب ع۲ + . . . + لن جب عن = ۰

اب فرض کرو کہ جس ثابت خط پر ظل لیے گئے ہیں اسکو ضلع لن بنایا گیا ہے؛ اگر لن اور ل۱ کے درمیانی خارجہ زاویہ کو بہ۱ سے تعبیر کریں، ل۱ اور ل۲ کے درمیانی خارجہ زاویہ کو بہ۲ سے، وغیرہ تو (162)

ع۱ = بہ۱، ع۲ = بہ۱ + بہ۲، ع۳ = بہ۱ + بہ۲ + بہ۳، وغیرہ، عن = ۲π

پس ل۱ جم بہ۱ + ل۲ جم (بہ۱ + بہ۲) + ل۳ جم (بہ۱ + بہ۲ + بہ۳) + ... لن = ۰
ل۱ جب بہ۱ + ل۲ جب (بہ۱ + بہ۲) + ل۳ جب (بہ۱ + بہ۲ + بہ۳) + ... ‫ } ‬.....(۱۰)
+ لن-۱ جب (بہ۱ + بہ۲ + ... + بہن-۱) = ۰

یہ دو رشتے (۱۰) کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان بنیادی رشتے ہیں۔ اگر ضلعوں کی تعداد صرف تین ہو تو یہ رشتے (۱) اور (۲) میں تحویل ہو جاتے ہیں کیونکہ اس صورت میں ب۲ = π − ۱/۲ ب۳ = π − ۱/۲ —

۱۲۸ —— (۱۰) کی پہلی مساوات میں لن کو مساوات کی دوسری جانب منتقل کرو، پھر ہر مساوات کی طرفین کا مربع لے کر جمع کرو تو نتیجہ میں ۲ لر لس کا سر

جم (بر + بر+۱ + ۰۰۰ + بس−۱) جم (بر + بر+۱ + ۰۰۰ + بس)

+ جب (بر + بر+۱ + ۰۰۰ + بس−۱) جب (بر + بر+۱ + ۰۰۰ + بس)

ہو گا

یعنی جم (بر+۱ + بر+۲ + ۰۰۰ + بس)؛

یہ جیب التمام ہے زاویہ طرس کی جو ضلعوں لر اور لس کی مثبت سمتوں کا درمیانی زاویہ ہے؛ پس ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے۔

لن۲ = ل۱۲ + ل۲۲ + ۰۰۰ + لن−۱۲ + ۲ ل۱ ل۲ جم ط۱۲ + ۰۰۰ + ۲ لر لس جم طرس + ۰۰۰

۰۰۰۰۰۰۰۰۰ (۱۱)

جو ضابطہ (۳) کے مماثل ہے اور اس میں تحویل ہو جاتا ہے اگر ن = ۳۔ ضابطہ (۱۱) میں ر اور س غیر مساوی ہیں اور ہر ایک ن سے کم ہے۔

کثیر الاضلاع کا رقبہ

۱۲۹ —— کثیر الاضلاع کا رقبہ حملہ

۱/۲ (ل۱ ل۲ جب ط۱۲ + ۰۰۰ + لر لس جب طرس + ۰۰۰) ۰۰۰ (۱۲)

یا ۱/۲ Σ لر لس جب طرس سے حاصل ہوتا ہے جبکہ مجموعہ ر اور س کی تمام مختلف قیمتوں کے لیے لیا گیا ہو۔ اگر ہم مقداروں ر اور س میں سے س کو

ہمیشہ ر سے بڑا فرض کریں تو زاویہ طرس حسب دفعہ سابق خارجہ زاویوں ہر+۱، ہر+۲، ... ہس کا حاصل جمع ہے۔ ضابطہ بالا کو ثابت کرنے کے لیے ہم پہلے یہ دکھائینگے کہ ایک مثلث کی صورت میں یہ ضابطہ جملہ $\frac{1}{2}$ ل۱ ل۲ جب ا۲ میں تحویل ہوتا ہے اور پھر ہم یہ بتائینگے کہ اگر وہ، (ن-۱) ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے درست ہے تو وہ، ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کے لیے بھی درست ہے۔

(163) مثلث ا۱ ا۲ ا۳ کی صورت میں جس میں ا۱ ا۲ = ل۱ یہاں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ط}_{12} = \pi - \text{ا}_2 ،\ \text{ط}_{23} = \pi - \text{ا}_3 ،\ \text{ط}_{13} = 2\pi - \text{ا}_2 - \text{ا}_3 ؛$$

پس اس صورت میں جملہ $\frac{1}{2}\sum$ لر لس جب طرس

$$= \frac{1}{2}(\text{ل}_1\ \text{ل}_2\ \text{جب ا}_2 + \text{ل}_2\ \text{ل}_3\ \text{جب ا}_3 - \text{ل}_1\ \text{ل}_3\ \text{جب ا}_1)$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{ل}_2\ \text{ل}_3\ \text{جب ا}_1$$

اس طرح ضابطہ بالا درست ہے جبکہ ن = ۳،

اب فرض کرو کہ (ن-۱) ضلعوں

ل۱، ل۲، ....، لن-۱

والے کثیر الاضلاع کے لیے ضابطہ درست ہے، اس طرح اس کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\sum \text{لر لس جب طرس} + \frac{1}{2}\ \text{ل}_{ن-1} \sum \text{لر جب ط}_{ر، ن-1}$$

جس میں ر اور س میں سے ہر ایک، ن-۱ سے کم ہے۔ اب ضلع لن-۱ کی جگہ دو ضلع لن-۱، لن رکھو اور اس طرح ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع بناؤ، تب ہمیں $\frac{1}{2}$ لن-۱ لن جب طن-۱،ن کو رقبۂ بالا میں جمع کرنا ہوگا؛ پس

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کا رقبہ ہے

$\frac{1}{2}\sum$ لر لس جب طرس $+ \frac{1}{2}$ لن-۱ $\sum$ لر جب طن-۱،ر $+ \frac{1}{2}$ لن-۱ لن جب طن-۱،ن

اب ضلع لن-۱ کا ظل لر پر لینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لن-۱ جب طر،ن-۱ = لن-۱ جب طر،ن-۱ + لن جب طرن

پس جملہ بالا ہو جاتا ہے

$\frac{1}{2}\sum$ لر لس جب طرس $+ \frac{1}{2}\sum$ لر (لن-۱ جب طر،ن-۱ + لن جب طر،ن)

$+ \frac{1}{2}$ لن-۱ لن جب طن-۱،ن

یا $\frac{1}{2}\sum$ لر لس جب طرس

جبکہ ر اور س کو ایک سے لے کر ن تک تمام مختلف قیمتیں دی جائیں ایسی کہ ر > س۔

اب ہم ثابت کر چکے ہیں کہ ضابطہ (۱۲) درست ہے جبکہ ن = ۳، اور اس لیے وہ درست ہے جبکہ ن = ۴، اور علیٰ ہٰذا القیاس؛ اس لیے وہ عام طور پر بھی درست ہے خواہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ ضابطہ (۱۲) میں لا کا سر (۱۰) کی دوسری مساوات کی وجہ سے معدوم ہوتا ہے؛ پس ضابطہ ہو جاتا ہے

$\frac{1}{2}\sum$ لر لس جب طرس جہاں ر اور س، ۲ سے ن تک تمام قیمتیں اختیار کرتے ہیں ایسی کہ ہمیشہ س > ر۔

(164)

دسویں باب پر مثالیں

ایک مثلث ا ب ج کے لیے حسب ذیل رشتے ازمثال ۱ تا ۱۱

ثابت کرو:-

(۱) ل جب (ب - ج) + ب جب (ج - ا) + ج جب (ا - ب) = ۰

(۲) ل^{3} جم ا + ب^{3} جم ب + ج^{3} جم ج = ل ب ج (۱ + ۴ جم ا جم ب جم ج)

(۳) ل^{2} جم ج + ج^{2} جم ا = $\frac{\text{ج} + \text{ل}}{\text{۲ ب}}$ { ب^{2} + (ج - ل)^{2} }

(۴) ل جم ا جم ۲ ا + ب جم ب جم ۲ ب + ج جم ج جم ۲ ج

+ ۴ جم ا جم ب جم ج (ل جم ا + ب جم ب + ج جم ج) = ۰

(۵) ل^{2} جم ۲ (ب - ج) = ب^{2} جم ۲ ب + ج^{2} جم ۲ ج + ۲ ب ج جم (۲ب - ۲ج)

(۶) ل^{3} جم (ب - ج) + ب^{3} جم (ج - ا) + ج^{3} جم (ا - ب) = ۳ ل ب ج

(۷) ج^{3} = ل^{3} جم ۳ ب + ۳ ل^{2} ب جم (۲ ب - ا) + ۳ ل ب^{2} جم (ب - ۲ ا)

+ ب^{3} جم ۳ ا

(۸) (جم $\frac{1}{2}$ ا - س $\frac{1}{2}$ ب - س $\frac{1}{2}$ ج)$^{\frac{1}{2}}$ + (جم $\frac{1}{2}$ ب - س $\frac{1}{2}$ ج - س $\frac{1}{2}$ ا)$^{\frac{1}{2}}$

+ (جم $\frac{1}{2}$ ج - س $\frac{1}{2}$ ا - س $\frac{1}{2}$ ب)$^{\frac{1}{2}}$ = (جم $\frac{1}{2}$ ا + جم $\frac{1}{2}$ ب + جم $\frac{1}{2}$ ج)$^{\frac{1}{2}}$

(۹) ب^{2} + ج^{2} - ۲ ب ج جم (ا + ۹۰°) = ج^{2} + ل^{2} - ۲ ج ل جم (ب + ۹۰°)

= ل^{2} + ب^{2} - ۲ ل ب جم (ج + ۹۰°)

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر توضیح کرو۔

(۱۰) جم $\frac{1}{2}$ ب جب ($\frac{1}{2}$ ب + ج) : جم $\frac{1}{2}$ ج جب ($\frac{1}{2}$ ج + ب)

= ل + ج : ل + ب

(۱۱) (ل + ب) جب ب = ۲ ب جب (ب + $\frac{1}{2}$ ج) جم $\frac{1}{2}$ ج

(۱۲) ثابت کرو کہ اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو اس کے نیم زاویوں کے ماس التمام سلسلہ حسابیہ میں ہوتے ہیں۔

(۱۳) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کے مربع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ اس کے زاویوں کے ماس سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۴) اگر ب ا - جم ا، ا - جم ب، ا - جم ج سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ جب ا، جب ب، جب ج سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۵) اگر ب - ا = م ج تو ثابت کرو کہ ا = جم$^{-1}$ (م جم ½ ج) - ½ ج

اور مم ½ (ب - ا) = (۱ + م جم ب) / (م جب ب)

(۱۶) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں جم ا + جم ب + جم ج > ۱ اور ≯ ۳/۲

(۱۷) ثابت کرو کہ ایک مثلث میں مس^{2} ½ ب مس^{2} ½ ج + مس^{2} ½ ج مس^{2} ½ ا + مس^{2} ½ ا مس^{2} ½ ب < ۱، اور یہ کہ اگر ایک زاویہ دو قائمہ زاویوں کے لا انتہا قریب آئے تو اس جملہ کی کم سے کم قیمت ½ ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ ایک مثلث متساوی الاضلاع ہوگا اگر مم ا + مم ب + مم ج = $\sqrt{3}$

(۱۹) اگر ایک مثلث میں

قم ا قم ب قم ج + ۲ مم ا مم ب مم ج

= قط ½ ا قط ½ ب قط ½ ج + ۲ مس ½ ا مس ½ ب مس ½ ج

تو ثابت کرو کہ اس کا ایک زاویہ ۹۰° ہے۔

(۲۰) اگر ایک مثلث میں جم ا = جم ب جم ج تو ثابت کرو کہ مم ب مم ج = ½

(۲۱) اگر ط وہ زاویہ ہو جو جم ط = (ا - ب) / ج سے متعین ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

جم ½ (ا - ب) = (ا + ب) جب ط / (۲ $\sqrt{\text{ا ب}}$)

اور جم ½ (ا + ب) = ج جب ط / (۲ $\sqrt{\text{ا ب}}$)

(۲۲) اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ و ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم}(\text{ب و ج} - ۶۰^\circ) = \frac{\text{ب و}^2 + \text{ج و}^2 - ۲\,\text{ا و}^2}{۲\,\text{ب و} \times \text{ج و}}$$

(۲۳)۔ اگر ج = ب + ½ ا اور ب ج نقطہ و پر تقسیم ہوا ایسا کہ ب و : و ج = ۱ : ۳ تو ثابت کرو کہ د ا ج و = ۲ د ا و ج

(۲۴) اگر ایک مثلث ا ب ج کے قاعدے کے ساتھ خطوط مستقیم ج د' ج ع مساوی زاویے عہ بنائیں تو ثابت کرو کہ

رقبہ ا ب ج : رقبہ ج ع د :: ج : ا ب جب ا مم عہ

(۲۵) اگر ا ب کو نقاط ج' د پر تقسیم کیا گیا ہو ایسا کہ ا ج = ج د = د ب اور اگر پ کوئی دوسرا نقطہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب ا پ د جب ب پ ج = ۴ جب ا پ ج جب ب پ د

(۲۶) اگر ایک متوازی الاضلاع کے ضلع ل' ب ہوں اور ان کا درمیانی زاویہ سہ ہو تو ثابت کرو کہ وتروں کا حاصل ضرب ہے $\{(ل^2 + ب^2)^2 - ۴ ل^2 ب^2 \text{ جتا}^2 \text{سہ}\}^{\frac{1}{2}}$

(۲۷) اگر ایک مثلث کے ضلع ب ج کا نقطہ وسطی د ہو اور زاویہ ب ا د = طہ' زاویہ ج ا د = فہ تو ثابت کرو کہ مم طہ ـ مم فہ = مم ب ـ مم ج

(۲۸) ایک خط مستقیم ایک مثلث کے زاویہ ج کو دو حصوں عہ' بہ میں اور ضلع ج کو دو منقطوعوں لا' ما میں تقسیم کرتا ہے اور اس ضلع کے ساتھ زاویہ طہ پر مائل ہے؛ ثابت کرو کہ لا مم عہ ـ ما مم بہ = ما مم ا ـ لا مم ب = (لا + ما) مم طہ

(۲۹) اگر ایک مثلث کے ضلع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور اگر بڑے سے بڑا زاویہ چھوٹے سے چھوٹے زاویہ سے بقدر ۹۰° کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ضلعوں میں نسبت

$\sqrt{7}+1 : \sqrt{7} : \sqrt{7}-1$ ہے۔

(۳۰) ہندسی طور پر ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

ل جم طہ = ب جم (ج ـ طہ) + ج جم (ب + طہ)' جس میں طہ کوئی زاویہ ہے۔

اگر کسی مستوی ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلعوں ا ب' ب ج' ج د کو ل' ب' ج سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس } ۲\,ا = \frac{\text{ا جب ا} - \text{ب جب }(ا - ب) + \text{ج جب }(ا - ب - ج)}{\text{ا جم ا} - \text{ب جم }(ا - ب) + \text{ج جم }(ا - ب - ج)}$$

(۳۱) اگر ایک مثلث ا ب ج ایسا ہو کہ ایک خط مستقیم ا د جو ب ج کو نقطہ د پر ملتا ہے کھینچا جا سکتا ہے اس طور پر کہ ز ب ا د = $\frac{1}{2}$ د ب ا ج اور نیز ب د = $\frac{1}{2}$ ب ج تو ثابت کرو کہ $ا^2 ب^2 = (ب^2 - ج^2)(ب^2 + ۸ ج^2)$

(۳۲) ایک مربع کا ایک ضلع ب ج ہے اور ب ج کے عمودی ناصف پر دو نقطے پ، ق لیے گئے ہیں جو مربع کے مرکز سے مساوی فاصلے پر ہیں؛ ب پ، ج ق کو ملایا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ ا پر قطع کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج میں

$$\text{مس ا (مس ب - مس ج)}^2 + ۸ = ۰$$

(166)

(۳۳) اگر

$$ما^2 + ی^2 - ۲\, ما\, ی \text{ جم } عہ = ا^2$$
$$ی^2 + لا^2 - ۲\, ی\, لا \text{ جم } بہ = ب^2$$
$$لا^2 + ما^2 - ۲\, لا\, ما \text{ جم } جہ = ج^2$$

اور $عہ + بہ + جہ = ۲\pi$

تو ثابت کرو کہ

$$(\text{ما ی جب عہ} + \text{ی لا جب بہ} + \text{لا ما جب جہ})^2 = \frac{1}{4}(۲ ب^2 ج^2 + ۲ ج^2 ا^2 + ۲ ا^2 ب^2 - ا^4 - ب^4 - ج^4)$$

(۳۴) اگر ایک مثلث کے زاویے ا، ب، ج ہوں اور لا، ما، ی حقیقی مقداریں ہوں ایسی کہ وہ مساوات

$$\frac{\text{ما جب ج} - \text{ی جب ب}}{\text{لا} - \text{ما جم ج} - \text{ی جم ب}} = \frac{\text{ی جب ا} - \text{لا جب ج}}{\text{ما} - \text{ی جم ا} - \text{لا جم ج}}$$

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{جب ا}} = \frac{\text{ما}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{ی}}{\text{جب ج}}$$

(۳۵) ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے مستطیل کا رقبہ جو ر نصف قطر کے دائرے کے ایک قطاع میں بنایا جا سکتا ہے $ر^2 \text{ مس } \frac{1}{2} عہ$ ہے جہاں ۲ عہ، قطاع کا

زاویہ ہے۔

(۳۶) بتاؤ کہ کس طرح اقل رقبہ کا قائم الزاویہ مثلث بنایا جاسکتا ہے جس کے راس تین دیے ہوئے متوازی خطوط مستقیم پر واقع ہوں؛ اگر درمیانی خط مستقیم کے فاصلے دوسرے دو خطوں سے ا، ب ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث کا وتر متوازی خطوں کے ساتھ زاویہ مم$^{-1}$ $\frac{ا - ب}{ا + ب}$ بناتا ہے۔

(۳۷) ایک مثلث کے ضلعوں کے طول پیمایشوں سے معلوم کیے گئے ہیں، جن میں خفیف سی خطائیں واقع ہوئی ہیں؛ ان طولوں سے مثلث کے زاویوں کا حساب لگانے سے معلوم ہوا کہ زاویے ا، ب، ج ہیں۔ اگر طولوں میں تقریبی خطائیں عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے جواب میں زاویوں کے مماس التماموں کی خطائیں مقداروں

قم ا (بہ جم ج + جہ جم ب - عہ)، قم ب (جہ جم ا + عہ جم ج - بہ)

قم ج (عہ جم ب + بہ جم ا - جہ)

کے متناسب ہونگی۔

(۳۸) اگر ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمایش میں دو ضلعوں ا، ب میں چھوٹی خطائیں لا، ما واقع ہوں تو زاویہ ج میں خطا ہوگی

$$-\left(\frac{لا}{ا} \text{مم ب} + \frac{ما}{ب} \text{مم ا}\right)$$

نیز دوسرے زاویوں کی خطائیں بھی معلوم کرو۔

(۳۹) ایک مثلث کا رقبہ اس کے ضلعوں کے طول ناپ کر معلوم کیا گیا ہے؛ اور کسی طول کے ناپنے میں ممکن الوقوع خطا کی انتہا خواہ وہ مثبت ہو یا منفی طول کی ن گنا ہے جہاں ن ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کی صورت میں جس کے اضلاع (پیمایش کردہ) ۱۱۰، ۸۱، ۵۹ ہیں خطا کی انتہا جو اس کے رقبہ میں ممکن ہے رقبہ کی تقریباً ۳۴۳ء۳ ن گنا ہے۔

(۴۰) ثابت کرو کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے چار زاویوں کی جیوب التمام ج، ج، ج، ج رشتہ ذیل کو پورا کرتی ہیں :—

$$(\text{ج}_{۱}^{۴}+\text{ج}_{۲}^{۴}+\text{ج}_{۳}^{۴}+\text{ج}_{۴}^{۴})-۲(\text{ج}_{۱}^{۲}\text{ج}_{۲}^{۲}+\text{ج}_{۲}^{۲}\text{ج}_{۳}^{۲}+\text{ج}_{۳}^{۲}\text{ج}_{۱}^{۲}+\text{ج}_{۴}^{۲}\text{ج}_{۱}^{۲}+\text{ج}_{۲}^{۲}\text{ج}_{۴}^{۲}+\text{ج}_{۳}^{۲}\text{ج}_{۴}^{۲})$$

$$+۴(\text{ج}_{۲}^{۲}\text{ج}_{۳}^{۲}\text{ج}_{۴}^{۲}+\text{ج}_{۳}^{۲}\text{ج}_{۴}^{۲}\text{ج}_{۱}^{۲}+\text{ج}_{۴}^{۲}\text{ج}_{۱}^{۲}\text{ج}_{۲}^{۲}+\text{ج}_{۱}^{۲}\text{ج}_{۲}^{۲}\text{ج}_{۳}^{۲})$$

$$+۴\,\text{ج}_{۱}\text{ج}_{۲}\text{ج}_{۳}\text{ج}_{۴}(۲-\text{ج}_{۱}^{۲}-\text{ج}_{۲}^{۲}-\text{ج}_{۳}^{۲}-\text{ج}_{۴}^{۲})=۰$$

---

(167)

مثلثوں کا حل

۱۳۰۔ اب ہم پچھلے باب کے محصلہ ضابطوں کو مثلثوں کے حل کرنے میں استعمال کرینگے یعنے اس وقت جب چھ اجزا میں سے تین اجزا کی مقداریں دی گئی ہوں جن میں سے کم از کم ایک ضلع ہو تو باقی تین اجزا کی مقداریں معلوم کرنے میں۔ ہم بالعموم ایسے ضابطوں کا انتخاب کرینگے جن کو لوکارتھموں کے ذریعہ عددی حساب لگانے میں استعمال کیا جا سکتا ہے کیونکہ صرف یہی ضابطے عمل میں مفید ہوتے ہیں۔

مثلثوں کا حل زاویوں کے دائری تفاعلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنے کے عمل پر منحصر کیا جاتا ہے، اب چونکہ دائری تفاعل قائم الزاویہ مثلثوں کے ضلعوں کی نسبتیں ہیں اس لیے ظاہر ہے کہ تمام مثلثوں کا حل ان مثلثوں کو قائم الزاویہ مثلثوں میں تقسیم کرکے انجام پا سکتا ہے۔

قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۳۱۔ فرض کرو کہ ایک مثلث کا زاویہ ج، ۹۰° ہے، تب یہ زاویہ دئے ہوئے اجزا میں سے ایک ہے اور ہم مثلث کو ان مختلف

صورتوں میں حل کر سکتے ہیں جن میں دوسرے دو اجزا دیے گئے ہوں اور ان میں سے کم از کم ایک جزو ضلع ہو۔

(۱) فرض کرو کہ دو ضلع ا، ب دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ مس ا = ا/ب سے ا معلوم کیا جا سکتا ہے اور پھر ب، ا کا متمم زاویہ ہونے کی وجہ سے معلوم ہوتا ہے؛ نیز ج = ا قم ا جس سے ج معلوم ہوتا ہے جبکہ ا معلوم کر لیا گیا ہو؛ تب اس مثلث کو حل کرنے کے لیے لوکارتمی ضابطے ہیں

ل مس ا = ۱۰ + لوک ا - لوک ب،

ب = ۹۰° - ا،

لوک ج = لوک ا - ل جب ا + ۱۰

(168) (۲) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک ضلع ا دیے گئے ہیں؛ تب ضابطہ جب ا = ا/ج کے ذریعہ ا معلوم کیا جاتا ہے؛ ب، ا کا متمم ہے؛ ضابطہ ب = ج جم ا، یا ب² = ج² - ا² سے ب معلوم ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

ل جب ا = ۱۰ + لوک ا - لوک ج،

ب = ۹۰° - ا،

اور لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰

یا لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)

(۳) فرض کرو کہ وتر ج اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں؛ ب فوراً ا کے متمم کے طور پر معلوم ہوتا ہے؛ ضابطہ ا = ج جب ا سے ا معلوم ہوتا ہے اور ب پچھلی صورت کے مانند حاصل ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

لوک ا = لوک ج + ل جب ا - ۱۰،

ب = ۹۰° - ا،

لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰

یا لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)

(۴) فرض کرو کہ ایک ضلع ا اور ایک زاویہ ا دیے گئے ہیں؛ تب ب ہے ۹۰ - ا، ج ہے ا قم ا، اور ب پچھلی دو صورتوں کی مانند معلوم ہوتا ہے۔

لوکارتمی ضابطے ہیں

لوک ج = لوک ا - ل جب ا + ۱۰،

ب = ۹۰ - ا،

لوک ب = لوک ج + ل جم ا - ۱۰۔

یا لوک ب = ½ لوک (ج + ا) + ½ لوک (ج - ا)

۱۳۲ — بعض صورتوں میں دفعہ سابق کے ضابطے سہولت بخش نہیں ہیں مثلاً صورت (۲) میں اگر زاویہ ا، ۹۰ کے قریب ہو تو اس کو مساوات جب ا = ا/ج سے سہولت کے ساتھ معلوم نہیں کیا جا سکتا کیونکہ متصل جیوب کے لیے فرق اس صورت میں ناقابل قدر ہیں، اس لیے ہم دوسرا ضابطہ استعمال کرتے ہیں؛ دسویں باب کے مسئلہ (۴) سے ہم حاصل کرتے ہیں ب مس ½ ب = ج - ا، ب مم ½ ب = ج + ا،

پس مس² ½ ب = (ج - ا)/(ج + ا) اور اس طرح

$$\text{مس} (۴۵ - \tfrac{۱}{۲} ا) = \left(\frac{ج - ا}{ج + ا}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

یہ ضابطہ متذکرہ صدر اعتراض سے پاک ہونے کی وجہ سے ا کے معلوم کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

نیز صورتوں (۳) اور (۴) میں ضابطہ ب = ج جم ا غیر سہولت بخش ہے جبکہ ا بہت چھوٹا ہو؛ ایسی صورت میں ہم ضابطہ ب = ج - ج جب ا × مس ½ ا استعمال کر سکتے ہیں۔

(269)

۱۳۳ ـــــ قائم الزاویہ مثلثوں کے حل کے لیے متعدد تقریبی ضابطے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ زاویوں ا، ب کے دائری ناپ ع، ب ہیں۔

(۱) ضابطہ ل = ج جم ب کی تقریبی شکل ہے

$$\text{ل} = \text{ج}\left(1 - \tfrac{1}{2}\,\text{ب}^2 + \tfrac{1}{24}\,\text{ب}^4\right)$$

جو جم ب کو ب کے دائری ناپ کی قوتوں میں پھیلانے سے اور اس پھیلاؤ کی پہلی تین رقمیں لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ اب یہ ضابطہ ل کو تقریبی طور پر محسوب کرنے کے لئے استعمال ہو سکتا ہے جبکہ ج اور ب دیے گئے ہوں اور یہ بہت بڑا نہ ہو۔

(۲) چونکہ جب ا = $\frac{\text{ل}}{\text{ج}}$، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ع} - \tfrac{1}{6}\,\text{ع}^3 + \tfrac{1}{120}\,\text{ع}^5 = \frac{\text{ل}}{\text{ج}}\text{، تقریباً}$$

ع کو $\frac{\text{ل}}{\text{ج}}$ کی رقوم میں حاصل کرنے کے لیے پہلے تقرب کے طور پر ع = $\frac{\text{ل}}{\text{ج}}$ لے سکتے ہیں، دوسرے تقرب کے طور پر ع = $\frac{\text{ل}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right\}^3$، اور تیسرے تقرب کے طور پر

$$\text{ع} = \frac{\text{ل}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left\{\frac{\text{ل}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)^3\right\}^3 - \frac{1}{120}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)^5$$

یا
$$\text{ع} = \frac{\text{ل}}{\text{ج}} + \frac{1}{6}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)^3 + \left(\frac{3}{40}\right)\left(\frac{\text{ل}}{\text{ج}}\right)^5\text{،}$$

جس کو ع کے محسوب کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(۳) مساوات مس $\tfrac{1}{2}$ ب = $\left(\frac{\text{ج} - \text{ل}}{\text{ج} + \text{ل}}\right)^{\frac{1}{2}}$ سے تقریبی ضابطہ

$$\tfrac{1}{2}\,\text{ب} = \left(\frac{\text{ج} - \text{ل}}{\text{ج} + \text{ل}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ج} - \text{ل}}{\text{ج} + \text{ل}}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{ج} - \text{ل}}{\text{ج} + \text{ل}}\right)^2\right\}$$

حاصل ہو سکتا ہے۔

(۴) زاویہ کے دائری ناپ کے بارے میں اسنیلیس (Snellius) کا

ضابطہ (دیکھو مثال ۳۲ صفحہ ۲۲۴)

$$\text{فہ} = \frac{\text{۳ جب ۲ فہ}}{\text{۲ (۲ + جم ۲ فہ)}}$$

کو جس میں تقریبی خطا $\frac{\text{۴}}{\text{۴۵}}$ فہ$^{\text{۵}}$ ہے استعمال کرو اور رکھو ۲ فہ = ب تو ہمیں ضابطہ حاصل ہوتا ہے $\text{ب} = \frac{\text{۳ ب}}{\text{۲ ج + ا}}$ اور تقریبی خطا ہے $\frac{\text{۱}}{\text{۱۸۰}}$ ب$^{\text{۵}}$

پس جب اس تقریبی مساوات

$$\text{ب} = \frac{\text{۳ ب}}{\text{۲ ج + ا}} \times \text{۵۷٫۲۹۵۷}^{\circ}$$

سے درجوں میں حاصل ہوتا ہے۔

غیر قائم الزاویہ مثلثوں کا حل

۱۳۴ ــــــ مثلث کو حل کرنا جب تین ضلع دیے جائیں۔

ضابطوں

$$\text{جب } \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ ا} = \left\{\frac{\text{(س − ب) (س − ج)}}{\text{ب ج}}\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} ،$$

$$\text{جم } \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ ا} = \left\{\frac{\text{س (س − ا)}}{\text{ب ج}}\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} ،$$

$$\text{مس } \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} \text{ ا} = \left\{\frac{\text{(س − ب) (س − ج)}}{\text{س (س − ا)}}\right\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} ،$$

میں سے کوئی ایک ضابطہ مع دیگر زاویوں کے متناظر ضابطوں کے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یہ سب ضابطے لوگارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہیں۔

(170)

مثال

ایک مثلث کے ضلاع ۴، ۷، ۹ کے متناسب ہیں۔ اس کے زاویے معلوم کرو جبکہ حسب ذیل لوکارتھم دیے گئے ہوں:۔

لوگ ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء

ل مس ۱۲° ۳۶′ = ۹ء۳۴۹۳۲۹، فرق ۱′ کے لیے = ۰۰۰۵۹۳ء

ل مس ۲۴° ۵′ = ۹ء۶۵۰۲۸۱، فرق ۱′ کے لیے = ۰۰۰۳۳۹ء

چونکہ س = ۱۰، س - ا = ۶، س - ب = ۳، س - ج = ۱، اس لیے

مس ½ ا = √(۱/۳۰)، مس ½ ب = √(۲/۱۰)، اس طرح

ل مس ½ ا = ۱۰ - ½ (۱ + ۳۰۱۰۳۰ء) = ۹ء۳۴۹۴۸۵

اور ل مس ½ ب = ۱۰ + ½ (۳۰۱۰۳۰ء - ۱) = ۹ء۶۵۰۵۱۵

ا معلوم کرنے کے لیے چونکہ ۹ء۳۴۹۴۸۵ - ۹ء۳۴۹۳۲۹ = ۰۰۰۱۵۶ء

اور ۱۵۶/۵۹۳ × ۶۰″ = ۱۵ء۸″ تقریباً، اس لیے ½ ا = ۱۲° ۳۶′ ۱۵ء۸″ یا

ا = ۲۵° ۱۲′ ۳۱ء۶″

ب معلوم کرنے کے لیے چونکہ ۹ء۶۵۰۵۱۵ - ۹ء۶۵۰۲۸۱ = ۰۰۰۲۳۴ء

اور ۲۳۴/۳۳۹ × ۶۰″ = ۴۱ء۴″ تقریباً، اس لیے ½ ب = ۲۴° ۵′ ۴۱ء۴″ یا

ب = ۴۸° ۱۱′ ۲۲ء۸″؛ نیز ج = ۱۸۰° - ا - ب = ۱۰۶° ۳۶′ ۵ء۶″، اس طرح زاویوں کی تقریبی قیمتیں حاصل ہو گئیں۔

۱۳۵ — مثلث حل کرنا جب دو ضلع اور ان کا درمیانی زاویہ دیے جائیں۔

فرض کرو کہ ب، ج اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں، تب ب اور ج ضابطہ

مس ½ (ب - ج) = (ب - ج)/(ب + ج) مم ½ ا

اور ضابطہ ب + ج = ۱۸۰° - ا

سے متعین کیے جا سکتے ہیں۔ لوکارثمی ضابطہ ہے

ل مس ½ (ب - ج) = لوک (ب - ج) - لوک (ب + ج) + ل جم ½ ا

ب اور ج معلوم کرنے کے بعد ضلع ل ان تین ضابطوں

لوک ل = لوک ج + ل جب ا - ل جب ج،

لوک ل + ل جم ½ (ب - ج) = لوک (ب + ج) + ل جب ½ ا،

لوک ل + ل جب ½ (ب - ج) = لوک (ب - ج) + ل جم ½ ا،

میں سے کسی ایک سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

ہم ل کو اس طرح بھی معلوم کر سکتے ہیں: چونکہ ل² = ب² + ج² - ۲ ب ج جم ا

یعنے ل² = (ب + ج)² - ۴ ب ج جم² ½ ا

اس لیے ل = (ب + ج) جم فہ، جہاں فہ مساوات

جب فہ = ۲ √(ب ج) جم ½ ا / (ب + ج)

سے معلوم ہوتا ہے۔ اس طرح ہم پہلے فہ کو لوکارثمی ضابطہ (۱۲۱)

ل جب فہ = لوک ۲ + ½ لوک ب + ½ لوک ج + ل جم ½ ا - لوک (ب + ج)

سے معلوم کر سکتے ہیں اور پھر ا کو ضابطہ

لوک ل = لوک (ب + ج) + ل جم فہ - ۱۰

سے۔

مثال

اگر ل = ۲۳۴، ج = ۲۲۱، اور ب = ۴۹° ۱۲′ تو ا، ج، ب معلوم کرو۔

یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۹۹ = ۱٫۹۹۵۶۳۵۲، ل جب ۴۹° ۱۲′ = ۹٫۸۷۹۱۹۷۸

لوک ۱۲۳ = ۲٫۰۸۹۹۰۵۱، ل جب ۵۰° ۲۴′ = ۹٫۸۸۶۷۲۸۵، فرق ۱′ کیلئے = ۱۰۴۷

لوک ۲۲۴ = ۲٫۳۵۰۲۴۸۰، ل جم ۲۴° ۳۸′ = ۱۰٫۰۴۱۰۹۱۳

لوک ۲۲۱ = ۲٫۳۴۴۳۹۲۳، ل مس ۵۹° ۳۹′ = ۱۰٫۲۳۲۴۵۵۲، فرق ۱′ کیلئے = ۲۸۶۴

ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل مس ½ (ج - ا) = ل مم ۱۰° ۳۸′ + لوک ۹۹ - لوک ۲۲۲

= ۱۰٫۵۸۳۱۹۰۱ + ۱٫۹۹۵۶۳۵۲ - ۲٫۳۴۶۳۵۳۰

= ۱۰٫۲۳۲۴۷۲۳

اب ۱۰٫۲۳۲۴۷۲۳ - ۱۰٫۲۳۲۴۵۵۲ = ۰٫۰۰۰۰۱۷۱، اور ۱۷۱/۴۸٫۲۷ = ۳٫۵ تقریباً، اس لیے ½ (ج - ا) = ۵۹° ۴۹′ ۳٫۵″، نیز ½ (ج + ا) = ۷۵° ۴۲′

اس لیے ا = ۱۵° ۵۲′ ۵۶٫۵″، ج = ۱۳۵° ۳۱′ ۳٫۵″

نیز لوک ب = ۹٫۶۸۹۱۹۷۸ + ۲٫۰۰۸۹۹۰۵۱ - ل جب ۱۵° ۵۲′ ۵۶٫۵″

اور ۵٫۶۵ × ۷٫۴۸۶ = ۴۲٫۳۰۱۵۵، اس لیے ل جب ۱۵° ۵۲′ ۵۶٫۵″ = ۹٫۴۳۲۷۵۱۵

اس لیے لوک ب = ۲٫۳۴۶۳۵۱۴ یعنی ب = ۲۲۲ - ۱۶/۱۹۵۶ = ۲۲۱٫۹۹۲

۱۳۶ — مثلث کو حل کرنا جبکہ دو ضلع اور ان میں سے ایک کے متقابل کا زاویہ دیے جائیں۔

یہ بالعموم مبہم صورت کے طور پر مشہور ہے۔

فرض کرو کہ ا، ج، اور ا دیے ہوئے اجزا ہیں تو جب ج مساوات جب ج = ج/ا جب ا سے متعین ہوتا ہے؛ جب ج کو اس طرح معلوم کرنے کے بعد اگر ج جب ا < ا تو ج کی بالعموم دو قیمتیں ۱۸۰° سے کم ایک حادہ اور دوسری منفرجہ ہونگی جن کی جیب حاصل کردہ جیب کے مساوی ہوگی؛ پس ہمیں تین صورتوں پر غور کرنا چاہیے۔

(۱) اگر ج جب ا > ا تو جب ج > ۱ جو ناممکن ہے اور اس حقیقت کا اظہار کرتا ہے کہ کوئی مثلث ایسا نہیں ہے جو دیے ہوئے اجزاء رکھتا ہو۔

(۲) اگر ج جب ا = ا تو جب ج = ۱ اور اس لیے ج کی صرف ایک قیمت ۹۰° ہے۔ اگر ا < ۹۰° تو دیے ہوئے اجزا کے ساتھ ایک مثلث موجود ہوگا اور یہ مثلث قائم الزاویہ مثلث ہوگا۔ لیکن اگر ا > ۹۰° تو ج کی قیمت

(172)

ناقابلِ قبول ہوگی اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزا کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔

(۳) اگر ج جب ا < ر تو جب ج < ۱ اور اس لیے ج کی دو قیمتیں ہیں ایک حادہ اور ایک منفرجہ، پس

(ع) اگر ج < ر تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے ج < ا، اس لیے ج حادہ ہونا چاہیے، اس طرح دیے ہوئے اجزا کے ساتھ صرف ایک مثلث موجود ہوگا؛

(ب) اگر ج > ر تو ج کا حادہ ہونا ضروری نہیں ہے اور اس کی دونوں قیمتیں قابلِ قبول ہیں بشرطیکہ ا < ۹۰°؛ لیکن اگر ا > ۹۰° تو دونو قیمتیں ناقابلِ قبول ہیں کیونکہ ج > ا۔ اس لیے دیے ہوئے اجزا کے ساتھ دو مثلث ہونگے اگر ا < ۹۰° اور کوئی مثلث نہ ہوگا اگر ا > ۹۰°؛

(ج) اگر ج = ر تو ج = ا یا ۱۸۰° - ا؛ ج کی قیمت ۱۸۰° - ا کے لیے مثلث کے دو ضلع ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اس لیے ایسی صورت میں مثلث موجود نہ ہوگا، اس طرح ج کی صرف پہلی قیمت یعنے ا رہ جاتی ہے جس سے محدود رقبہ کا ایک مثلث ملیگا بشرطیکہ ا < ۹۰°۔

ہم نتائج محصلہ بالا کو اس طرح بیان کرسکتے ہیں:۔

اگر
ج جب ا > ر، کوئی حل نہیں
ج جب ا = ر، ا < ۹۰°، ایک حل
ج جب ا = ر، ا > ۹۰°، کوئی حل نہیں
ج جب ا < ر،
ج < ر، ایک حل
ج = ر، ا < ۹۰°، ایک حل
ج = ر، ا > ۹۰°، کوئی حل نہیں
ج > ر، ا < ۹۰°، دو حل
ج > ر، ا > ۹۰° کوئی حل نہیں

اگر ج، ۹۰° کے قریب ہو تو اس کو اس کی جیب کے ذریعہ صحیح طور پر معلوم نہیں کیا جاسکتا، ایسی صورت میں ضابطوں

مس ج = ± ج جب ا / √((ا + ج جب ا)(ا − ج جب ا)) ، مس (۴۵° + ½ ج) = ± √((ا + ج جب ا) / (ا − ج جب ا))

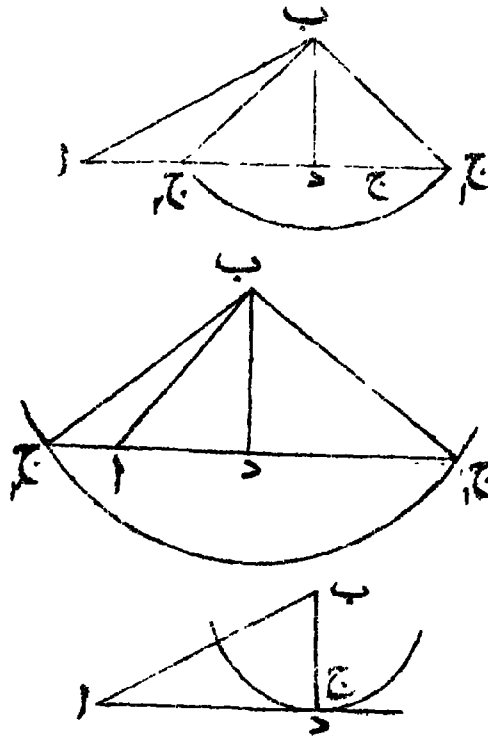
میں سے کوئی ایک استعمال ہو سکتا ہے۔

۱۳۷ — دفعۂ ماسبق میں جن مختلف صورتوں پر بحث کی گئی ہے ان کی تحقیق ہندسی طور پر کرنا سبق آموز ہوگا۔

ضلع ب پر ب سے عمود ب د کھینچو؛ تب ب د = ج جب ا،

ب کو مرکز اور ا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو؛ تب اگر ا < ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو قطع نہیں کریگا اور اس لیے دیے ہوئے اجزا کے ساتھ کوئی مثلث نہیں کھینچا جا سکتا؛ لیکن اگر ا > ج جب ا تو یہ دائرہ ضلع ا ج کو دو نقطوں ج۱ اور ج۲ پر قطع کرتا ہے۔

اگر ا < ج اور ا < ۹۰° تو ج۱ اور ج۲ دونوں ا کی ایک ہی جانب ہیں (دیکھو شکل (۱)) اور دو مثلثیں ا ب ج۱ اور ا ب ج۲ میں سے ہر ایک

(198)

دیے ہوئے اجزا لکھنا ہے: زاویے ا ج ب اور ا ج ب متمم ہیں اگر ا د ج مگر ا > ۹۰° تو ا ج کے پرے ہوگا اور کوئی مثلث دیے ہوئے اجزا کے ساتھ موجود نہ ہوگا۔ اگر ا > ج تو ج اور ج ا کی مقابل جانبوں پر ہونگے اور صرف مثلث ا ب ج میں دیے ہوئے اجزا ہونگے اس آخری صورت میں مثلث ا ب ج میں ا پر کا زاویہ ا کے مساوی نہیں ہوگا بلکہ ۱۸۰° - ا کے، اور اس لیے دی ہوئی شرطوں کو پورا نہیں کریگا۔

اگر ا = ج جب ا تو دائرہ ا ج کو نقطہ د پر مس کریگا اور قائم الزاویہ مثلث ا د ب مطلوبہ مثلث ہوگا جس میں دیے ہوئے اجزا ہونگے بشرطیکہ ا < ۹۰°۔

یہ قابل ذکر ہے کہ چونکہ (شکل (۱))

$$ا د = ج \text{ جم } ا \qquad \text{اور } ج د = ج د = \sqrt{ا^۲ - ج^۲ \text{ جب}^۲ ا}$$

اس لیے ب کی دو قیمتیں یہ ہیں۔

$$ج \text{ جم } ا + \sqrt{ا^۲ - ج^۲ \text{ جب}^۲ ا} \qquad \text{اور } ج \text{ جم } ا - \sqrt{ا^۲ - ج^۲ \text{ جب}^۲ ا}$$

یہ قیمتیں دونوں مثبت ہونگی جبکہ دو حل ہوں؛ ب کی ان دو قیمتوں کو ہم حسب ذیل ب کی دو درجی مساوات سے بھی حاصل کرسکتے ہیں:-

$$ا^۲ = ب^۲ + ج^۲ - ۲ ب ج \text{ جم } ا$$

۱۳۸ — مثلث کو حل کرنا جبکہ ایک ضلع اور دو زاویے دیے جائیں۔

(174)

فرض کرو کہ دیا ہوا ضلع ا ہے اور دیے ہوئے زاویے ا، ج؛ تب مساوات ب = ۱۸۰° - ا - ج سے ب کا تعین ہوتا ہے اور ضابطوں

لوک ب = لوک ا + ل جب ب - ل جب ۱ ،
لوک ج = لوک ا + ل جب ج - ل جب ۱ ،
سے ضلع ب اور ج معلوم ہوتے ہیں۔

مثال

اگر ا = ۱۰٫۱، ۱ = ۵۱° ۳۰′ ۴۰″، ب = ۷۶° تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۲۳۹۶ = ۴٫۰۹۳۲۸۱۶، ل جب ۷۶° = ۹٫۹۸۶۹۰۴۱،
لوک ۱۲۳۹۷ = ۴٫۰۹۳۳۱۶۶، ل جب ۵۱° ۳۰′ = ۹٫۸۹۳۵۴۴۴،
ل جب ۵۱° ۳۱′ = ۹٫۸۹۳۶۴۴۸

ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک ب = ۱٫۰۰۴۱ + ۹٫۹۸۶۹۰۴۱ - ل جب ۵۱° ۳۰′ ۴۰″

اب چونکہ ل جب ۵۱° ۳۰′ ۴۰″ = ۹٫۸۹۳۵۴۴۴ + $\frac{۴۰}{۶۰}$ × ۰٫۰۰۰۱۰۰۴
= ۹٫۸۹۳۶۱۱۳

اس لیے لوک ب = ۱٫۰۹۳۲۹۲۸، اور اس لیے ب = ۱۲٫۳۹۶ + $\frac{۱۲}{۳۵۰}$ × ۰٫۰۰۱

یا ب = ۱۲٫۳۹۶۳ تقریباً

۱۳۹ —— جملہ ج جم ۱ ± $\sqrt{ا^۲ - ج^۲ جب^۲ ۱}$ جو ب کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہے لوکارتمی عمل حساب کے لیے موزوں بنایا جا سکتا ہے؛

فرض کرو جب فہ = $\frac{ج}{ا}$ جب ۱ تو ب = $\frac{ا \text{ جب } (فہ ± ۱)}{\text{جب } ۱}$ ،

پس مساوات ل جب فہ = ل جب ۱ + لوک ج - لوک ا سے فہ معلوم کرنے کے بعد مساوات لوک ب = لوک ا + ل جب (فہ ± ۱) - ل جب ۱ سے ب معلوم کیا جا سکتا ہے۔

زاویوں ۱، ب، ج کے دائری ناپ علی الترتیب ء، ب، جہ سے

تعبیر کیے گئے ہوں تو مثلثوں کے حل کے لئے حسب ذیل تقریبی ضابطے حاصل ہوتے ہیں:-

(۱) فرض کرو کہ ا، ج، و دیے گئے ہیں اور ج بڑا نہیں ہے، تب ضابطہ

$$ج = \frac{ر جب ج}{جب ا}$$ سے ہمیں یہ تقریبی ضابطہ

$$ج = ر قم ا \left\{ جہ - \frac{1}{6} جہ^3 + \frac{1}{120} جہ^5 \right\}$$

ملتا ہے۔ نیز اگر ا، ج دونوں بڑے نہ ہوں تو

$$ج = \frac{ر (جہ - \frac{1}{6} جہ^3 + \frac{1}{120} جہ^5 - \dots)}{عہ - \frac{1}{6} عہ^3 + \frac{1}{120} عہ^5 - \dots}$$

پس $$ج = ر \frac{جہ}{عہ} \left\{ 1 + \frac{1}{6} (عہ^2 - جہ^2) \right\}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے اور اس کو ج کے محسوب کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ ا، ج، ر حسب سابق دیے گئے ہیں؛ نیز فرض کرو کہ ج تقریباً ۹۰° ہے تب $ج = \frac{ر جم جہ}{جب ا}$؛ اس لیے جلد $ج = \frac{ر}{جب ا}$ $(1 - \frac{1}{2} جہ^2 + \frac{1}{24} جہ^4)$، ج کو تقریبی طور پر متعین کرنے کے لیے استعمال ہو سکتا ہے۔

(۱۹۵) اگر ا اور ج دونوں ۹۰° کے قریب ہوں تو

$$ج = \frac{ر جم جہ}{جم عہ} \quad یا \quad ج = \frac{ر (1 - \frac{1}{2} جہ^2 + \dots)}{1 - \frac{1}{2} عہ^2 + \dots}$$

اس لیے $$ج = ر \left\{ 1 - \frac{1}{2} (جہ^2 - عہ^2) \right\}$$

سے ج تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۰۔ اب ہم مثلثوں کے حل کی چند مثالیں دینگے جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی بجائے دوسرے مفروضات ہوں۔

(۱) فرض کرو کہ راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمود دیے گئے ہیں؛ ان کو $ع_1$، $ع_2$، $ع_3$ سے تعبیر کرو، تب

$ا \times ع_1 = ب \times ع_2 = ج \times ع_3 =$ مثلث کے رقبہ کا دوچند۔ اب چونکہ

$$جم\ \tfrac{1}{2}ا = \sqrt{\frac{س(س-ا)}{ب\ ج}}$$

اس لیے

$$جم\ \tfrac{1}{2}ا = \sqrt{\frac{(ع_2ع_3+ع_3ع_1+ع_1ع_2)(-ع_2ع_3+ع_3ع_1+ع_1ع_2)}{4ع_1^2ع_2ع_3}}$$

اس سے ا معلوم ہوتا ہے۔ نیز $ع_2 = ج\ جب\ ا$، اس لیے ا معلوم ہونے کے بعد ج معلوم ہوتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ مثلث کے زاویے اور اس کا گھیرا دیے گئے ہیں۔ تب

$$س = ر\ (جب\ ا + جب\ ب + جب\ ج)$$

پس ر معلوم ہوتا ہے اور پھر اضلاع بالترتیب

$$2ر\ جب\ ا،\ 2ر\ جب\ ب،\ 2ر\ جب\ ج$$

کے مساوی ہیں یا

$$ا = \frac{2\ س\ جب\ ا}{جب\ ا + جب\ ب + جب\ ج}$$

مع ب اور ج کی متناظر قیمتوں کے۔ ا کی یہ قیمت

$$\frac{س\ جب\ \tfrac{1}{2}ا}{جم\ \tfrac{1}{2}ب\ جم\ \tfrac{1}{2}ج}$$

میں تحویل ہوتی ہے جو لوگارثمی عمل حساب کے لیے موزوں ہے۔

(۳) فرض کرو کہ قاعدہ، ارتفاع، اور قاعدے پر کے زاویوں کا فرق دیے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قاعدہ ا ہے، ارتفاع ع، اور دیا ہوا فرق ب - ج = ۲ عہ ؛ تب

چونکہ ب + ج = ۱۸۰° - ا ، اس لیے ب = ۹۰° + عہ - ½ ا ، ج = ۹۰° - عہ - ½ ا ،

نیز ا = ع (مم ب + مم ج) = ع {مس (½ ا - عہ) + مس (½ ا + عہ)}

اس لیے ا / ع = ۲ جب ا / (جم ا + جم ۲ عہ) ، پس دو درجی مساوات

ا² (جم ا + جم ۲ عہ)² = ۴ ع² (۱ - جم² ا)

یا جم² ا (ا² + ۴ ع²) + ۲ ا² جم ۲ عہ جم ا = ۴ ع² - ا² جم² ۲ عہ

سے جم ا حاصل ہوتا ہے۔ اس دو درجی کا حل ہے

جم ا = - (ا² جم ۲ عہ) / (ا² + ۴ ع²) ± ۲ ع (۴ ع² + ا² جب² ۲ عہ)^½ / (ا² + ۴ ع²)

اِس طرح جم ا کی دو قیمتیں، مسئلہ کے دو حل کے جواب میں، حاصل ہوتی ہیں۔

معطیات ذیل سے مثلث کو حل کرو: -

(۴) ج، ج، ا + ب

(۵) ب، ا، ب + ج

(۶) رقبہ اور زاویے

(۷) ج، ج + ا، ج - ب

(۸) زاویے اور ارتفاع

کثیر الاضلاعوں کا حل

۱۴۱ — کارنٹ[1]، لہولیر[2]، لیکسل[3] اور دیگر علماء ریاضی نے اُن رشتوں پر جو کثیر الاضلاعوں کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان پائے جاتے ہیں اور اُن طریقوں پر بحث کی ہے جو کثیر الاضلاع کو حل کرنے کے لیے ہیں جبکہ ضلعوں اور زاویوں کی کچھ تعداد دی گئی ہو علم الکثیر الاضلاع (polygonometry) کے دو بنیادی ضابطے دفعہ ۱۲۷ میں بیان کیے جا چکے ہیں۔

ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے اس کے ۲ ن اجزاء میں سے (۲ ن-۳) اجزاء دیے جانے چاہئیں جن میں سے کم از کم (ن-۲) اضلاع ہونے چاہئیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کو ایک وتر کے ذریعہ ایک مثلث اور (ن-۱) ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع میں تقسیم کیا گیا ہے؛ اگر اس آخری کثیر الاضلاع کے ضلعوں اور زاویوں کی تعیین ہو جاتی تو چونکہ مثلث کا ایک ضلع اس کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کے طور پر معلوم ہو چکا ہوتا اس لیے مثلث کے صرف دو اجزا کا معلوم ہونا درکار ہوتا تاکہ ن ضلعوں والے کثیر الاضلاع کی پوری طرح تعیین ہو جائے؛ پس ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ن-۱ ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کی بہ نسبت دو اور اجزاء معلوم ہونا چاہئے۔ اب چونکہ کثیر الاضلاع کی سادہ ترین شکل ایک مثلث ہے اور مثلث کی تعیین کے لیے اس کے تین اجزاء معلوم ہونا چاہیئے جن میں سے ایک

---

[1] Carnot, *geometrie der Stellung*

[2] L' Huilier, *Polygonometrie*. Geneva. 1789

[3] Lexell, *Nov. comm. Petrop.* vols. xix. xx

ضلع ہو اس لیے ن ضلعوں والے ایک کثیر الاضلاع کی تعیین کے لیے ۲ + ۲ (ن-۳) یعنے (۲ن-۳) اجزاء لیے جانے چاہئیں۔ ان (۲ن-۳) اجزاء میں سے اگر صرف (ن-۳) ضلع ہوں تو ن زاویے دیے جائینگے؛ لیکن اگر (ن-۱) زاویے دیے گئے ہوں تو ن واں زاویہ معلوم ہوسکتا ہے اس لیے گویا صرف (۲ن-۴) غیر تابع اجزا دیے گئے ہیں اور یہ ناکافی ہیں۔ اس لیے کل اجزاء میں سے کم از کم (ن-۲) اجزاء ضلع ہونے چاہئیں۔

بعض صورتوں میں کثیر الاضلاع کو وتروں کے ذریعہ مثلثوں میں تقسیم کرکے اس کو آسانی سے حل کیا جاسکتا ہے؛ اس میں وتروں کو محسوب کرنا پڑتا ہے؛ تاہم یہ طریقہ ہمیشہ سہولت بخش نہیں ہوتا جیسا کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کی صورت پر غور کرنے سے معلوم ہوگا جبکہ اس کے تین زاویے اور دو متقابلہ ضلع دیے گئے ہوں۔

۱۴۲ — ن ضلعی کثیر الاضلاع حل کرنا جبکہ (ن-۱) ضلع اور (ن-۲) زاویے دیے جائیں۔

(۱) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے معلوم شدنی ضلع کے متصل ہیں۔ ہم دفعہ ۱۲۷ کے مطابق ضلعوں کے درمیان خارجہ زاویوں کی بجائے $ب_۱$، $ب_۲$، .... $ب_ن$ استعمال کرینگے؛ فرض کرو کہ ضلع $ل_ن$ معلوم شدنی ہے، تب دفعہ ۱۲۷ کی مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رو سے 177

$$\text{جب}\, ب_۱ \left\{ ل_۱ + ل_۲\, \text{جم}\, ب_۲ + ل_۳\, \text{جم}\, (ب_۲ + ب_۳) + \cdots\cdots + ل_{ن-۱}\, \text{جم}\, (ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱}) \right\}$$

$$= -\text{جم}\, ب_۱ \left\{ ل_۲\, \text{جب}\, ب_۲ + ل_۳\, \text{جب}\, (ب_۲ + ب_۳) + \cdots\cdots + ل_{ن-۱}\, \text{جب}\, (ب_۲ + \cdots\cdots + ب_{ن-۱}) \right\}$$

$$\text{پس}\quad \text{مس}\, ب_۱ = -\frac{ل_۲\, \text{جب}\, ب_۲ + ل_۳\, \text{جب}\, (ب_۲ + ب_۳) + \cdots + ل_{ن-۱}\, \text{جب}\, (ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱})}{ل_۱ + ل_۲\, \text{جم}\, ب_۲ + ل_۳\, \text{جم}\, (ب_۲ + ب_۳) + \cdots + ل_{ن-۱}\, \text{جم}\, (ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱})}$$

اس سے $ب_۱$ دیے ہوئے زاویوں $ب_۱، ب_۲، \ldots، ب_{ن-۱}$ اور دیے ہوئے ضلعوں $ل_۱، ل_۲، \ldots ل_{ن-۱}$ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے؛ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ مساوات، غیر معلوم ضلع کے عمود پر ضلعوں کا ظِل لینے سے حاصل کی گئی ہے؛ باقی زاویہ $ب_ن$، رشتہ $ب_۱ + ب_۲ + \ldots + ب_ن = ۲\pi$ سے معلوم ہوتا ہے۔

$ب_۱$ اور $ب_ن$ معلوم کرنے کے بعد ضلعوں کا $ل_ن$ پر ظل لینے سے جو مساوات

$$ل_ن = -\{ل_۱ \text{ جم } ب_۱ + ل_۲ \text{ جم } (ب_۱ + ب_۲) + \ldots\}$$

حاصل ہوتی ہے اس سے $ل_ن$ کی تعیین ہوسکتی ہے یا دفعہ ۱۲۸ کی مساوات (۱۱) کی مدد سے، جس میں $ل_ن^۲$ کو دوسرے ضلعوں کے مربعوں اور ضلعوں اور ضلعوں کے درمیانی زاویوں کی جیوب التمام کے حاصل ضربوں کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ معلوم شدنی زاویے ایک دوسرے کے متصل ہیں مگر معلوم شدنی ضلع کے متصل نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ $ل_ن$ معلوم شدنی ضلع ہے اور $ب_ر$، $ب_{ر+۱}$ معلوم شدنی زاویے۔

تب $ب_ر + ب_{ر+۱} = ۲\pi - (ب_۱ + ب_۲ + \ldots + ب_{ر-۱} + ب_{ر+۲} + \ldots + ب_ن)$،

اس طرح $ب_ر + ب_{ر+۱}$ معلوم ہوتا ہے؛ نیز مساواتوں (۱۰) میں سے دوسری مساوات کی رُو سے

$$ل_ر \text{ جب } (ب_۱ + ب_۲ + \ldots + ب_ر) = - ل_۱ \text{ جب } ب_۱ - ل_۲ \text{ جب } (ب_۱ + ب_۲) - \ldots$$

$$- ل_{ر-۱} \text{ جب } (ب_۱ + ب_۲ + \ldots + ب_{ر-۱}) - ل_{ر+۱} \text{ جب } (ب_۱ + \ldots + ب_{ر+۱}) \ldots$$

$$- ل_{ن-۱} \text{ جب } (ب_۱ + \ldots + ب_ن)$$

پس $ب_۱ + ب_۲ + \ldots + ب_ر$ معلوم ہوسکتا ہے اور اس لیے $ب_ر$۔

اس کے بعد ضلع $ل_ن$ حسب دفعہ سابق معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۲) اس صورت میں جبکہ دو غیر معلوم زاوئے ایک دوسرے کے متصل نہ ہوں فرض کرو کہ ﮦ، ک وہ راس ہیں جن پر کہ زاویے غیر معلوم ہیں؛ ﮦ ک کو ملاؤ تو کثیر الاضلاع دو کثیر الاضلاعوں میں تقسیم ہو جاتا ہے جن میں سے ایک میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے معلوم ہیں جو غیر معلوم ضلع کے متصل ہیں۔ اس لئے ہم اس کثیر الاضلاع کو (۱) کی بموجب ﮦ ک اور ﮦ ک پر کے زاویوں کو متعین کر کے حل کر سکتے ہیں۔

دوسرے کثیر الاضلاع میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے دو متصلہ زاویوں کے معلوم ہیں؛ اس لئے اس کثیر الاضلاع کو (۲) کی موجب حل کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح دیئے ہوئے کثیر الاضلاع کے سب ضلع معلوم ہوتے ہیں اور ﮦ ک پر کے زاویے اُن دو حصوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتے ہیں جن میں وہ ﮦ ک سے تقسیم ہوئے تھے اور جو علیحدہ علیحدہ معلوم ہو چکے ہیں۔

۳۴۱ — ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ (ن-۲) ضلع اور (ن-۱) زاویے دیئے جائیں۔

ہم رشتہ

$$ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_ن = ۲\pi$$

سے فوراً باقی زاویہ معلوم کر لیتے ہیں۔

غیر معلوم ضلع $ل_ر$ معلوم کرنے کے لئے مساوات

$$ل_۱ \,\text{جب}\, ب_۱ + ل_۲ \,\text{جب}\, (ب_۱ + ب_۲) + \cdots + ل_{ن-۱} \,\text{جب}\, (ب_۱ + ب_۲ + \cdots + ب_{ن-۱}) = ۰$$

کو استعمال کرو جو دوسرے غیر معلوم ضلع $ل_ن$ کے عمود پر ظل لینے سے حاصل ہوئی ہے۔ پھر ہم $ل_ن$ کو اسی طرح معلوم کر سکتے ہیں یا دوسری بنیادی مساوات استعمال کر سکتے ہیں۔

۳۴۱۲ — ن ضلعی کثیر الاضلاع کو حل کرنا جبکہ ن ضلع اور (ن-۳) زاویے دیئے جائیں۔

فرض کرو کہ ف، ق، ر وہ راس ہیں جن پر کے زاویے نہیں دئے گئے ہیں، ف ق، ق ر، ر ف کو ملاؤ تو کثیر الاضلاع چار حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک مثلث ہے۔ ف ق ر کے سوا ہر حصہ میں تمام ضلع سوائے ایک کے اور تمام زاویے سوائے اُن دو زاویوں کے دئے گئے ہیں جو اِن غیر معلوم ضلعوں کے متصل ہیں؛ اس لئے ہم ف ق، ق ر، ر ف، اور ف، ق، ر پر کے زاویوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔ پھر مثلث ف ق ر کے زاویے معلوم کئے جا سکتے ہیں کیونکہ اس کے ضلع معلوم ہو چکے ہیں۔ اب ہم ف، ق، ر پر کے زاویوں کو جمع کر کے دئے ہوئے کثیر الاضلاع کے مطلوبہ زاویے حاصل کر لیتے ہیں۔

بلندیاں اور فاصلے

۱۴۵۔ اب ہم بلندیوں اور فاصلوں کی تعیین پر مثلثوں کے حل کے اطلاقات کی چند مثالیں دینگے۔ اس مضمون پر زیادہ مکمل معلومات کے لیے مثلاً زاویوں کی پیمائش میں استعمال ہونے والے آلات کے بیان وغیرہ کے لیے پیمائش (Surveying) پر لکھی ہوئی کتابوں کا مطالعہ کرنا چاہیے۔

وہ خط مستقیم جو مقام مشاہدہ کو کسی شئے سے ملاتا ہے افق کے ساتھ ایک زاویہ بنائیگا؛ اِس زاویہ کو شئے کا زاویہ ارتفاع کہتے ہیں اگر شئے مذکور افق کے اوپر ہو اور زاویہ نشیب اگر وہ افق کے نیچے ہو۔

179) ۱۴۶۔ افقی مستوی کے اوپر ایک ایسے نقطہ کی بلندی معلوم کرنا جہاں تک رسائی نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ یہ نقطہ ف ہے اور اس کا ظل افقی مستوی پر ج ہے، فرض کرو کہ ف ج = ف اور اس افقی مستوی پر کوئی خط ا ب = ا بشرط امکان ایسا منتخب کیا گیا ہے کہ ا ب ج ایک خطِ مستقیم ہے،

فرض کرو کہ ا اور ب پر ف کے زوایائے ارتفاع پیمایش کیے گئے ہیں؛

اِن کو ء، بہ سے تعبیر کرو۔ تب ل = ا ج - ب ج = ف (مم ء - مم بہ)
اِس لیے

$$ف = \frac{ل \text{ جب ء جب بہ}}{\text{جب } (بہ - ء)}$$

جس سے ف معلوم ہوتا ہے۔ اگر قاعدہ کے خط کو ٹھیک ٹھیک ج کی سمت میں ناپنا ناممکن العمل ہو تو فرض کرو کہ اس کو کسی اور سمت میں ناپا گیا ہے، ا پر ف کا زاویۂ ارتفاع ء پیمایش کرو اور نیز زاویوں ف ا ب (= جہ) اور ف ب ا (= ضہ) کی پیمایش کرو۔

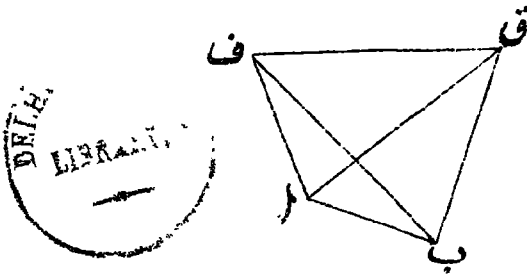
تب $ف ا = ا ب \times \frac{\text{جب ضہ}}{\text{جب } (جہ + ضہ)}$، اور ت = ا ف × جب ء، اس لیے

$$ف = ل \frac{\text{جب ء جب ضہ}}{\text{جب } (جہ + ضہ)}$$

اس سے ف معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۷ — ناقابل رسائی دو نقطوں کے درمیان فاصلہ معلوم کرنا۔

(180) فرض کرو کہ یہ دو نقطے ف اور ق ہیں اور فرض کرو کہ کوئی قاعدہ کا خط اب (= ا) ناپا گیا ہے، نقطوں ا اور ب کو اس طرح منتخب کیا جاتا ہے کہ ف اور ق دونوں اِن میں سے ہر نقطہ سے نظر آسکتے ہیں۔ اب حسب ذیل تین زاویے پیمائش کرو۔

ف ا ق = ع، ق ا ب = ب، ف ا ب = ج؛

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ زاویے ف ا ق اور ق ا ب بالعموم ایک ہی مستوی میں نہیں ہوتے۔ ب پر زاویے ف ب ا (= ضہ) اور ق ب ا (= صہ) پیمائش کرو۔

مثلثوں ا ب ف اور ا ب ق سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ا ف = ا \frac{جب\ ضہ}{جب\ (جہ + ضہ)}$$

اور $ا ق = ا \frac{جب\ صہ}{جب\ (بہ + صہ)}$، پس ا ف اور ا ق اِن ضابطوں سے حاصل ہوتے ہیں:-

لوک ا ف = لوک ا + ل جب ضہ - ل جب (جہ + ضہ)،

لوک ا ق = لوک ا + ل جب صہ - ل جب (بہ + صہ)،

مثلث ف ا ق میں ا ف، ا ق اور زاویہ ف ا ق = ع معلوم ہیں

اس لیے ہم ضابطوں

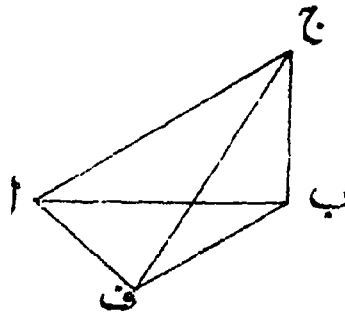
ل مر، $\frac{1}{2}$ (ا ف ق - ا ق ف) = ل مم $\frac{1}{2}$ عہ + نوک (ا ق - ا ف) - نوک (ا ق + ا ف)،

ا ف ق + ا ق ف = ۱۸۰° - عہ،

سے زاویے ا ف ق اور ا ق ف معلوم کرتے ہیں۔ پھر ضابطہ

لوک ف ق = لوک ا ف + ل جب عہ - ل جب ا ق ف

کے ذریعہ ف ق معلوم ہوتا ہے۔

۱۴۸۔۔۔ **پوتھناٹ** (Pothenot.) کا مسئلہ۔۔۔ ایک مثلث کے مستوی میں وہ نقطہ معلوم کرنا جس پر مثلث کے ضلعوں کے محاذی دیے ہوئے زاویے بنیں۔

فرض کرو کہ ء، ب وہ زاویے ہیں جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں ا ج، ج ب کے محاذی نقطہ ف پر بنتے ہیں؛ فرض کرو کہ زاویوں ف ا ج، ف ب ج کو علی الترتیب لا، ا سے تعبیر کیا گیا ہے؛

ف کا محل معلوم ہوجاتا ہے اگر زاویے لا اور ما معلوم ہوجائیں کیونکہ مثلثوں ف ا ج، ف ب ج کو حل کرنے سے ف ا اور ف ب معلوم کیے جاسکتے ہیں۔

(181)

ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا + ما = ۲π − عہ − بہ − ج

نیز ف ج = (ا جب ما) / (جب بہ) = (ب جب لا) / (جب عہ)

ایک امدادی زاویہ فہ مان لو ایسا کہ

مس فہ = (ا جب عہ) / (ب جب بہ)

اس لیے (جب لا) / (جب ما) = مس فہ، پس (جب لا − جب ما) / (جب لا + جب ما) = مس (فہ − ۴۵°)

یا مس ½ (لا − ما) = مس ½ (لا + ما) مس (فہ − ۴۵°)

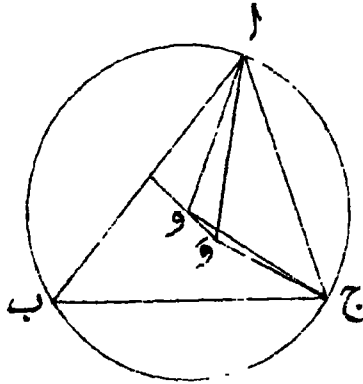
= مس (۴۵° − فہ) مس ½ (عہ + بہ + ج)

اس طرح لا − ما معلوم کیا جاسکتا ہے اور چونکہ لا + ما معلوم ہے اس لیے لا اور ما معلوم ہوسکتے ہیں۔

مثالیں

(۱) افق مستوی میں ایک مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج میں سے ہر راس پر ایک پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع عہ دکھائی دیتا ہے۔ ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی ½ ا مس عہ قم ا ہے نیز اگر ج پر کے ارتفاع میں چھوٹی خطا ن واقع ہوئی ہو تو بتاؤ کہ اصل بلندی بہت تقریبی طور پر ہے

½ (ا مس عہ) / (۲ جب ا) (۱ + (قم ج) / (جب ا جب ب) × (جب ن) / (جب ۲ عہ))

فرض کرو کہ پہاڑ کی چوٹی کا ظل مستوی ا ب ج پر د ہے، تب اگر پہاڑ

کی بلندی ف ہو تو ف = و ا مس عہ = و ب مس عہ = و ج مس ء؛ اِس لیے و، ا ب ج کے حائط دائرہ کا مرکز ہے، پس و ا = ½ ا قم ا، یا ف = ½ ا مس عہ قم ا۔ اگر ج پر کے ارتفاع کی پیمایش عہ + نً ہو تو فرض کرو کہ وَ، پہاڑ کی چوٹی کا ظل ہے، تب چونکہ ا اور ب پر کے ارتفاع مساوی ہیں اس لیے و وَ، ا ب پر عمود ہے؛ اب فرض کرو کہ پہاڑ کی بلندی ف + لا ہے۔ ہندسی طور پر حاصل ہوتا ہے

وَ ا = و ا + و وَ جم ج،

وَ ج = د ج ـ و وَ جم (ا ـ ب)،

اب اگر و وَ اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مربع نظر انداز ہو سکیں، تو

ف ـ لا = وَ ا مس عہ = وَ ج مس (عہ + نً)

= (و ا + و وَ جم ج) مس عہ = {و ج ـ و وَ جم (ا ـ ب)} مس (عہ + نً)

پس لا = و وَ × جم ج × مس عہ = ـ و وَ جم (ا ـ ب) مس عہ + و ج قط² عہ × حب نً

کیونکہ مس (عہ + نً) = مس عہ + قط² عہ حب نً، تقریباً۔ و وَ کو ساقط کرنے سے

182,

$$\text{لا}\ \text{جم}\,(\text{ا}-\text{ب})\ \text{مس}\ \text{ع} = \text{جم}\ \text{ج}\ \text{مس}\ \text{ع}\,(\text{و}\ \text{ج}\ \text{قط}^{2}\ \text{ع}\ \text{جب}\ \text{نؔ} - \text{لا})،$$

اس لیے

$$2\ \text{لا}\ \text{جب}\ \text{ا}\ \text{جب}\ \text{ب} = \text{و}\ \text{ج}\ \text{قط}^{2}\ \text{ع}\ \text{جم}\ \text{ج}\ \text{جب}\ \text{نؔ}$$

اس لیے اصل بلندی ہے

$$\text{ف} + \text{لا} = \frac{1}{2}\,\frac{\text{و}\ \text{مس}\ \text{ع}}{\text{جب}\ \text{ا}}\left(1 + \frac{\text{جم}\ \text{ج}}{\text{جب}\ \text{ا}\ \text{جب}\ \text{ب}} \times \frac{\text{جب}\ \text{نؔ}}{\text{جب}\ 2\,\text{ع}}\right)$$

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں کی پیمایش کی گئی تو معلوم ہوا کہ ا = ۵، ب = ۴، ج = ۶ لیکن یہ معلوم ہے کہ ج کی پیمایش میں ایک چھوٹی خطا ہے؛ معلوم کرو کہ کون سا زاویہ زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج کی صحیح قیمت لا + ۶ ہے؛ فرض کرو کہ مثلث کے زاویے ا + مف ا، ب + مف ب، ج + مف ج ہیں جن میں اجزاء مف ا، مف ب، مف ج منحصر ہیں لا پر؛ ہم لا کو اس قدر چھوٹا مان لینگے کہ اس کا مربع نظر انداز ہوسکتا ہے۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\,(\text{ا} + \text{مف}\ \text{ا}) = \frac{16 + (\text{لا} + 6)^{2} - 25}{2 \times 4\,(\text{لا} + 6)} = \frac{27 + 12\,\text{لا}}{48\,(1 + \frac{1}{6}\,\text{لا})} = \frac{27}{48}\left(1 + \frac{12}{27}\,\text{لا} - \frac{1}{6}\,\text{لا}\right)$$

$$= \frac{27}{48}\left(1 + \frac{5}{18}\,\text{لا}\right)،\ \text{تقریباً}$$

پس

$$\text{جب}\ \text{ا} \times \text{مف}\ \text{ا} = -\frac{5}{32}\,\text{لا}؛$$

نیز

$$\text{جم}\,(\text{ب} + \text{مف}\ \text{ب}) = \frac{25 + (\text{لا} + 6)^{2} - 16}{2 \times 5\,(\text{لا} + 6)} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{\text{لا}}{10}\right)$$

پس

$$\text{جب}\ \text{ب} \times \text{مف}\ \text{ب} = -\frac{3}{40}\,\text{لا}؛$$

اور نیز

$$\text{جم}\,(\text{ج} + \text{مف}\ \text{ج}) = \frac{25 + 16 - (\text{لا} + 6)^{2}}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{12}{5}\,\text{لا}\right)$$

پس

$$\text{جب}\ \text{ج} \times \text{مف}\ \text{ج} = \frac{3}{10}\,\text{لا}؛$$

نیز (جب ا)/۵ = (جب ب)/۴ = (جب ج)/۶

اس طرح ۲۴ مف ا = ۴۰ مف ب = ۱۵ مف ج

اس لیے مف ب، مف ا اور مف ج سے عدداً چھوٹا ہے اور اس لیے زاویہ ب زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

گیارھویں باب پر مثالیں

۱ — ایک مثلث کے ضلع ۸، ۷، ۵ ہیں؛ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۱۲ = ۲٫۰۴۹۲۱۸۰

لوک ۹° ۴۶َ = ۹٫۹۷۵۴۰۸۳، فرق ۶۰ً کے لیے = ۰٫۰۰۰۴۳۷

۲ — اگر ایک مثلث میں ا = ۶۵، ب = ۱۶، ج = °۶۰ تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۳ = ۴۷۷۱۲۱۳٫۰، ل مس ۴۶° ۴۰َ = ۱۰٫۰۲۰۲۲۰۳

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰٫۰، ل مس ۴۶° ۴۱َ = ۱۰٫۰۲۰۴۷۳۱

۳ — ایک مثلث کے ضلع ۳، ۵، ۷ فٹ ہیں۔ زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۱۳٫۵ = ۱٫۱۳۰۳۳۳۸، لوک ۱۴ = ۱٫۱۴۶۱۲۸۰،

ل جم ۱۰° ۳۵َ = ۹٫۹۹۲۱۱۷۵، ل جم ۱۰° ۴۵َ = ۹٫۹۹۲۰۹۳۲

۴ — اگر ب = °۵۴، ج = °۱۰، ا = ۲۰۰ فٹ تو ب معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰٫۰، لوک ۱۶۹۴ = ۲٫۲۲۷۱۴۱۴

ل جب ۵۵° = ۹٫۹۱۳۳۶۴۵، لوک ۱۶۹۵ = ۲٫۲۲۷۱۶۶۶

۵ — اگر ایک مثلث میں ب = ۲٫۲۵ فٹ، ج = ۱٫۷۵ فٹ، ا = °۴۵ تو ب اور ج معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰ء۰، ل مم ۴۷° = ۱۰ء۲۹۲۸۳۴

ل مس ۱۳° ۴۷′ = ۹ء۳۸۹۷۲۴، ل مس ۱۳° ۴۸′ = ۹ء۳۹۰۲۷۰

۶۔ اگر ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طولوں میں نسبت ۹ : ۷ ہو اور ان کا درمیانی زاویہ ۴۷° ۲۵′ ہو تو دوسرے زاویے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ء۰، ل مس ۹۶° ۱۷′ ۳۰″ = ۱۰ء۳۵۷۳۹۴۲

ل مس ۵° ۳۵′ = ۹ء۴۵۴۱۴۷۹، فرق ا′ کے لیے = ۴۷۹۶

۷۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۶۰° ہے، رقبہ $10\sqrt{3}$ اور گھیرا ۲۰، باقی زاویے اور ضلعے معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳۰۰ء۰، ل جب ۹۴° ۶′ = ۹ء۸۷۸۴۳۷۶

لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ء۰، ل جب ۹۴° ۷′ = ۹ء۸۷۸۵۴۷۰

۸۔ ایک مثلث ا ب ج میں یہ دیا گیا ہے کہ ل = ۱۰، افٹ ب = ۹ فٹ ج = مس ا ($\frac{۴}{۳}$) ب معلوم کرو۔ اگر ل اور ب کے ناپنے میں ایک انچ سے بڑی اور ج کی پیمائش میں ا سے بڑی خطائیں نہ ہوں تو ثابت کرو کہ ج کی محسوب کردہ قیمت میں جو خطا ہے وہ ۲ء۷ انچ سے کم ہوگی۔

۹۔ اگر مبہم صورت میں مثلث کے اجزا ل، ب، ب دیے گئے ہوں جہاں ل > ب، اور تیسرے ضلع کی قیمتیں ج، ج′ ہوں تو ثابت کرو کہ ج^۲ – ۲ ج ج′ جم ۲ ب + ج′^۲ = ۴ ب^۲ جم^۲ ب

۱۰۔ مبہم صورت میں جس میں ل، ب، ا دیے گئے ہوں اگر ایک مثلث کا ایک زاویہ دوسرے مثلث کے متناظر زاویہ کا دگنا ہو تو ثابت کرو کہ

ل $\sqrt{۳}$ = ۲ب جب $\frac{ا}{۲}$، یا ۴ ب^۳ جب^۲ ا = ل^۲ (ل + ۳ب)

۱۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ اس کے ارتفاع کے مساوی ہے اور دوسرے دو ضلع معلوم طول کے ہیں۔ مثلث کے دیگر اجزا معلوم کرو ان ضابطوں سے جو لوکارتمی عمل حساب کے لیے موزوں ہوں۔ ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں جو نسبت ہے اس کو $\frac{۱}{۲}$ ($\sqrt{۵}$ – ۱) اور $\frac{۱}{۲}$ ($\sqrt{۵}$ + ۱) کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

۱۲۔ زمین کے ایک مثلثی ٹکڑے میں اس کا طویل ترین ضلع ۹۰ گز ہے، دوسرے دو ضلعوں کا مجموعہ ۱۰۰ گز ہے اور اس کا ایک زاویہ ۶۴° ہے۔ دوسرے زاویے

معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

ل مس ۴۲° ۳۲′ = ۹٫۶۲۷۸۵۱۹

ل مس ۱۳° ۱۵′ = ۹٫۳۷۱۹۳۳۳ ، ل مس ۱۳° ۱۶′ = ۹٫۳۷۲۴۹۹۲

۱۳۔۔۔ ایک مثلث کا ایک زاویہ ۶۰° ہے، مقابل کا ضلع ۴ اور ارتفاع √۳ − ۱ ہے۔ مثلث کو حل کرو۔

(184) ۱۴۔۔۔ اگر ایک مثلث کا کوئی ضلع ¼ (۳ − √۵) × گھیرا ئے سے کم ہو تو بتاؤ کہ زاویوں سے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے ہوئے عمودوں سے ایک مثلث کا بنانا ناممکن ہے؛ لیکن اگر ہر ضلع ⅕ گھیرے سے بڑا ہے تو یقیناً ایسا مثلث بنانا ممکن ہے۔

۱۵۔۔۔ اگر اجزا ا ج = ۵°، ب = ۲، ج = √۶ سے ایک مثلث کو حل کیا جائے تو بتاؤ کہ ج کی قیمت میں ۰٫۱′ کی خطا سے ب کی محسوب کردہ قیمت میں تقریباً ۲٫۴۴″ کی خطا پیدا ہوگی۔

۱۶۔۔۔ ایک مثلث کے ضلع سلسلۂ حسابیہ میں ہیں۔ اگر اس کا اوسط ضلع اور اس کے مقابل کا زاویہ دیے گئے ہوں تو مثلث کو حل کرنے کے لیے ضابطوں کی تلاش کرو اور دیے ہوئے زاویہ کی بڑی سے بڑی ممکن قیمت معلوم کرو۔ اگر اوسط ضلع ۵۴۲ فٹ اور مقابل کا زاویہ ۵۹° ۵۹′ ۵۹″ ہو تو مثلث کو حل کرو۔

۱۷۔۔۔ ایک مثلث کے وسطی خط کا طول اور وہ زاویے دیے گئے ہیں جن میں یہ خط راسی زاویہ کو تقسیم کرتا ہے۔ اس مثلث کو حل کرو۔

۱۸۔۔۔ ایک مثلث کا ایک ضلع، اس کے مقابل کا زاویہ، اور اس زاویہ سے ضلع پر کا عمود دیے گئے ہیں۔ مثلث کو حل کرو۔

۱۹۔۔۔ ایک مثلث کو دیے ہوئے اجزا ا، ب، ∠ا سے حل کیا گیا ہے۔ اگر ا، ب کی قیمتیں چھوٹی خطاؤں لا، ما سے علی الترتیب متاثر ہوں تو ان کی وجہ سے ∠ا سے مقابل کے ضلع پر کھینچے ہوئے عمود کے محسوب کرنے میں جو خطا واقع ہوتی ہے اس کو معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ خطا صفر ہے اگر

لا جب² ب جم ج = ما (جب² ب − جب² ج)

۲۰۔۔۔ ایک کشتی جنوب سے ۲۵° مشرق کی سمت میں چل رہی ہے اس سے

ایک روشنی کا مینار دیکھا گیا ہے جو شمال سے ۴۵° مشرق والی سمت میں نظر آتا ہے۔ کشتی ایک میل آگے جانے کے بعد پھر اس مینار کا مشاہدہ کیا گیا تو وہ ٹھیک شمال کی سمت میں نظر آیا۔ اس آخری مشاہدہ کے وقت مینار کا فاصلہ گزوں تک صحیح، معلوم کرو۔ یہ دیا گیا ہے کہ

ل جب ۲۰° = ۹٫۵۳۴۰۵۲ ، لوک ۲ = ٫۳۰۱۰۳۰۰

لوک ۲٫۰۶ = ۲٫۳۱۳۸۶۷ ، لوک ۲٫۰۷ = ۲٫۳۱۵۹۰۰

۲۱— ایک چٹان پر ایک مینار ہے جس کو دریا میں کی ایک کشتی سے دیکھا گیا تو معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی کا ارتفاع ۳۰° ہے؛ پھر ساحل کی طرف پہلے مشاہدے کے مستوی میں ۵۰۰ گز کا فاصلہ طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ مینار کی چوٹی اور اس کے قاعدے کے ارتفاع علی الترتیب ۶۰° اور ۴۵° ہیں۔ چٹان اور مینار کی بلندیاں معلوم کرو۔

۲۲— ایک انتصابی ستون کا پائین ا ہے۔ ب اور ج، ا کے ٹھیک مشرق میں ہیں اور د، ج کے جنوب میں ہے۔ ب پر ستون کا جو ارتفاع ہے وہ ج پر کے ارتفاع کا دُگنا ہے اور وہ زاویہ مس^-۱ ۱/۵ ہے جو ا ب کے محاذی د پر بنتا ہے، نیز ب ا ج = ۲۰ فٹ، ج د = ۳۰ فٹ۔ ستون کی بلندی معلوم کرو۔

۲۳— ایک خاص مقام سے ایک پہاڑ شمال مشرقی سمت میں نظر آتا ہے۔ اس مقام سے اس پہاڑ کی چوٹی کا ارتفاع ع مشاہدہ کیا گیا ہے۔ مذکورہ مقام سے مشرق جنوب مشرق کی سمت میں ایک ٹیلہ پر جس کا ارتفاع ف معلوم ہے چڑھا جاتا ہے اور ٹیلہ کی چوٹی سے پہاڑ کی چوٹی سمت شمال میں زاویہ ارتفاع ب پر دکھائی دیتی ہے۔ ثابت کرو کہ مقام قبل الذکر کے اوپر پہاڑ کی چوٹی کی بلندی ف جب ع جم ب قم (ع - ب) ہے۔

۲۴— دو مستقیم متقاطع پٹڑیوں میں سے ایک پر ایک ٹرین جا رہی ہے۔ جب اس کے پہلے ڈبہ کا اگلا رخ پٹڑیوں کے مقامِ اتصال پر پہنچتا ہے تو ٹرین کے محاذی دوسری پٹڑی پر کے کسی خاص مقام پر زاویہ ع بنتا ہے اور جب اس کے آخری ڈبہ کی پشت پہنچتی ہے تو زاویہ عَ بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ دو پٹڑیاں ایک

دوسرے سے زاویہ ط پر مائل ہیں جہاں ط، مساوات ۲ مم ط = مم عہ ـ مم عہَ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۵ —— ایک اسطوانی مینار ایک افقی میدان پر قائم ہے؛ ایک آنکھ جو میدان میں واقع ہے مینار کے اوپر کے سرے کی کور کی قوس کو دیکھتی ہے جو نظر آرہی ہے۔ اگر اس قوس کے کسی سرے کے زاویۂ ارتفاع میدان کے اوپر عہ، عہَ، عہً ہوں جبکہ آنکھ علی الترتیب ج، جَ، جً فاصلوں پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$(جَ^۲ - جً^۲)\ مم^۲ عہ + (جً^۲ - ج^۲)\ مم^۲ عہَ + (ج^۲ - جَ^۲)\ مم^۲ عہً = ۰.$$

۲۶ —— ایک غبارہ شمال مشرقی سمت میں ارتفاع عہ پر دیکھا گیا؛ دس منٹ بعد ٹھیک شمال میں ارتفاع بہ پر وہ نظر آیا۔ بعد ازاں معلوم ہوا کہ جس شرح سے وہ نیچے اُتر رہا تھا وہ چھ میل فی گھنٹہ تھی؛ اس کی افقی حرکت کو یکساں فرض کرکے ثابت کرو کہ اس کی افقی حرکت کی شرح

$$\frac{۶}{\sqrt{۲}\ مس\ عہ - مس\ بہ}$$

میل فی گھنٹہ تھی؛ اس دوران میں ہوا کی سمت مشرقاً تھی۔

۲۷ —— مجھے دو میناروں کی چوٹیاں ایک خطِ مستقیم میں زاویۂ ارتفاع عہ پر نظر آتی ہیں، اور ساکن پانی میں ان کے عکسوں کے زاویۂ نشیب بہ اور جہ دکھائی دیتے ہیں۔ اگر میری آنکھ کی بلندی سطح آب کے اوپر ج ہو تو ثابت کرو کہ میناروں کے درمیان افقی فاصلہ ہے

$$\frac{۲\ ق\ جم^۲ عہ\ جب\ (بہ - جہ)}{جب\ (بہ - عہ)\ جب\ (جہ - عہ)}$$

۲۸ —— ایک بُرج کے جنوب میں مقام ا سے بُرج کا زاویۂ ارتفاع ۱۸° ہے اور مقام ب پر جو ا سے ل فاصلہ پر اس کے مغرب میں واقع ہے بُرج کا ارتفاع ۹° ہے۔ بتاؤ کہ بُرج کی بلندی $\frac{ل}{\sqrt{۲ + ۲\sqrt{۵}}}$ ہے۔

۲۹۔ ایک بُرج ۱۰۰ فٹ بلند ہے اور زمین سے ۲۵ فٹ بلندی پر اس پر ایک نشان ہے؛ بتاؤ کس فاصلہ پر بُرج کے یہ دو حصے ایک آنکھ پر مساوی زاویے بنائینگے جبکہ آنکھ سطح زمین سے ۵ فٹ بلند واقع ہو۔

۳۰۔۔۔ ایک شخص مسطح میدان میں جس پر ایک بُرج ہے اور بُرج پر ایک مینار ہے مشاہدہ کرتا ہے کہ جب وہ بُرج کے پائین سے ا فیٹ فاصلے پر ہوتا ہے تو اس کی چوٹی اور ایک پہاڑ کی چوٹی ایک خطِ مستقیم میں نظر آتی ہیں۔ بُرج کے پائین سے ب فٹ اور پرے ہٹنے سے وہ دیکھتا ہے کہ مینار کے محاذی اس کی آنکھ پر حسبِ سابق وہی زاویہ بنتا ہے اور اس کی چوٹی اور پہاڑ کی چوٹی ایک خطِ مستقیم میں ہیں؛ ثابت کرو کہ اگر مشاہد کی آنکھ میں سے گزرنے والے افقی مستوی کے اوپر بُرج کی بلندی ج فٹ ہو تو پہاڑ کی بلندی اُسی مستوی کے اوپر $\frac{\text{اب ج}}{\text{ج}^2 - \text{ا}^2}$ فٹ ہوگی۔

۳۱۔۔۔ ایک شخص ۵ فٹ قد والا ایک مخروط مضلع کے قاعدہ کے نزدیک کھڑا ہے جس کا قاعدہ مربع ہے؛ وہ دیکھتا ہے کہ آفتاب مخروط مضلع کے ایک کنارہ پر اس کے وسط میں غائب ہوتا ہے۔ اگر نزدیک ترین کناروں سے شخص مذکور کے فاصلے ا اور ب ہوں اور سورج کا ارتفاع طہ ہو تو ثابت کرو کہ مخروط مضلع کی بلندی ہے

$$۱۰ + \text{مس طہ} \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(۵\,\text{ا}^2 - ۲\,\text{اب} + \text{ب}^2\right)} \ \text{فٹ}$$

(186)

۳۲۔۔۔ ایک پہاڑی کی چوٹی سے نیچے کے میدان پر کے ایک نقطہ کا زاویۂ نشیب ۳۰° ہے اور پہاڑی سے تین چوتھائی راستہ نیچے اترنے کے بعد اسی نقطہ کا زاویۂ نشیب ۱۵° ہے۔ آستانِ صحیح پہاڑی کا میلان معلوم کرو۔

۳۳۔۔۔ ا ب ج د، ایک کمرہ کا مستطیلی فرش ہے جس کا طول ا ب، ا فٹ ہے۔ کمرہ کی بلندی معلوم کرو اگر ج پر کمرے کی بلندی کے محاذی کونہ ا پر زاویہ عہ بنے اور کونہ ب پر زاویہ بہ بنے۔ اگر ا = ۴۸ فٹ، عہ = ۴۸°، بہ = ۳۰° تو ثابت کرو کہ بلندی تقریباً ۲۰ فٹ ۱ انچ ہے۔

۳۴۔۔۔ ایک بُرج ایک افقی مستوی پر ایک پہاڑی سے جس کا میلان عہ ہے

ا فاصلہ پر واقع ہے۔ پہاڑی پر کے ایک شخص کو برج کے اوپر سے ایک تالاب عین دکھائی دے سکتا ہے، اس تالاب کا فاصلہ برج سے ب ہے۔ اگر مشاہد کا فاصلہ پہاڑی کے پائین سے ج ہو تو ثابت کرو کہ برج کی بلندی

$$\frac{\text{ب ج جیب عہ}}{\text{ا + ب + ج جم عہ}} \text{ ہے۔}$$

۳۵ — ایک شخص دو برجوں کے درمیان کھڑا دیکھتا ہے کہ ان میں سے ہر ایک برج اس کی آنکھ پر زاویہ عہ بناتا ہے؛ پھر وہ ایک سیدھے راستہ پر جو برجوں کو ملانے والے خط سے زاویہ جہ پر مائل ہے ا فٹ چلتا ہے اور دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر ان میں سے ہر برج کے محاذی زاویہ بہ بنتا ہے؛ برجوں کی بلندیاں معلوم کرنے کے لیے حسب ذیل رشتے ثابت کرو:—

$$\text{ف فَ (مم}^2\text{ بہ} - \text{مم}^2\text{ عہ) = ا}^2$$

$$\text{(فَ - ف) (مم}^2\text{ بہ} - \text{مم}^2\text{ عہ) = ۲ ا مم عہ جم جہ}$$

جن میں ف، فَ سے برجوں کی بلندیاں تعبیر ہوتی ہیں۔

۳۶ — ایک پہاڑی کی چوٹی سے ایک پل کے دو ستونوں کے زاویہ نشیب عہ، بہ مشاہدہ کیے گئے ہیں اور ستونوں کا درمیانی فاصلہ ا مشاہدہ کے نقطہ پر زاویۂ طہ بناتا ہے؛ ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی ہے:

$$\tfrac{1}{2}\text{ ا مم فہ قط } \tfrac{1}{2}\text{ طہ } \sqrt{\text{جیب عہ جیب بہ}}$$

جہاں $\text{جم فہ} = \text{۲ جم } \tfrac{1}{2}\text{ طہ } \sqrt{\text{جیب عہ جیب بہ}} \text{ (جیب عہ + جیب بہ)}^{-1}$

۳۷ — ایک پہاڑی پر سے ایک شخص دیکھتا ہے کہ تین برج جو ایک افقی مستوی پر واقع ہیں اس کی آنکھ پر مساوی زاویے بناتے ہیں اور ان کے قاعدوں کے زاویے نشیب عہ، عہَ، عہً ہیں؛ اگر ج، جَ، جً برجوں کی بلندیاں ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جیب (عہَ - عہً)}}{\text{ج جیب عہ}} + \frac{\text{جیب (عہً - عہ)}}{\text{جَ جیب عہَ}} + \frac{\text{جیب (عہ - عہَ)}}{\text{جً جیب عہً}} = \text{۰}$$

۳۸۔۔۔ ایک قلعہ سے ایک توپ ا داغی گئی تو معلوم ہوا کہ دو مقامات ب اور ج پر اس کی روشنی کے نظر آنے اور آواز کے سنائی دینے میں جو وقفے ہوئے وہ علی الترتیب ت، تَ ہیں؛ خطِ مستقیم ب ج میں ا سے معلومہ فاصلہ ل پر د ایک نقطہ ہے؛ اگر ب د = ب، اور ج د = ج تو ثابت کرو کہ آواز کی رفتار ہے

$$\left\{\frac{(ب-ج)\,(لٗ-ب ج)}{ب تَ^۲ - ج ت^۲}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

اُس صورت کا امتحان کرو جب، $ل^۲ = ب\,ج$

۳۹۔۔۔ ایک پہاڑی کی چوٹی پر ایک چوکونی مینار ہے اور پہاڑی کا ڈھال مستقل میلان رکھتا ہے۔ ڈھال پر کے ایک نقطہ سے مینار کے سرے کا زاویہ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا اور پھر پہاڑی کی چوٹی کی طرف ل فٹ آگے بڑھنے سے زاویہ ارتفاع بہ معلوم ہوا۔ اگر مینار کی بلندی ف ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑی کا میلان افق کے ساتھ ہے

$$جمٗ^{-1}\left\{\frac{ل}{ف}\times\frac{جب\ عہ\ جب\ بہ}{جب\ (بہ-عہ)}\right\}$$

۴۰۔۔۔ ایک کروی گنبد کے راس پر ایک صلیب نصب ہے؛ کسی خاص نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع عہ اور گنبد کا زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے؛ گنبد کی طرف فاصلہ ل طے کرنے کے بعد معلوم ہوا کہ صلیب گنبد کے عین اوپر ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع جہ ہے۔ ثابت کرو کہ سطح زمین کے اوپر گنبد کے مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{ل\ جب\ جہ}{جب\ (جہ-عہ)}\times\frac{جب\ عہ\ جم\ جہ - جم\ عہ\ جب\ بہ}{جم\ جہ - جم\ بہ}$$

۴۱۔۔۔ کسی دن دوپہر کے وقت آفتاب کا ارتفاع عہ ہے۔ ایک شخص اس وقت

ایک ابر کے ٹکڑے میں ایک دائری شگاف دیکھتا ہے جو اس کے جنوب میں ا فاصلہ پر کے ایک مقام کے اوپر انتصاباً واقع ہے۔ وہ مشاہدہ کرتا ہے کہ شگاف کے محاذی اُس کی آنکھ پر ۲ طہ کا زاویہ بنتا ہے اور زمین پر کا روشن داغ اُس کی آنکھ پر ۲ فہ کا زاویہ بناتا ہے۔ اگر ابر کے ٹکڑے کی بلندی زمین کے اوپر لا ہو تو ثابت کرو کہ

لا۲ (م۲ عہ مس۲ فہ - مس۲ طہ) - ۲ ا لا م عہ مس۲ فہ + ا۲ (مس۲ فہ - مس۲ طہ) = ۰

۴۲ — ایک پہاڑی کے ڈھال پر کے ایک نقطہ سے دو سیدھے راستے بنائے گئے ہیں، ایک راستہ ایک انتصابی مستوی میں جنوباً واقع ہے، دوسرا راستہ دوسرے انتصابی مستوی میں جو قبل الذکر کے علی القوائم ہے مشرقاً واقع ہے۔ یہ راستے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عہ بناتے ہیں اور ان کے طول اُس افقی سڑک تک جو پہاڑی کے پائین میں ہے علی الترتیب ا اور ب ہیں۔ ثابت کرو کہ پہاڑی افقی سمت کے ساتھ زاویہ جب$^{-1}$ $\left(\frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - 2\,\text{ا ب جم عہ}}{\text{ا ب جب عہ مس عہ}}\right)^{\frac{1}{2}}$ پر مائل ہے۔

۴۳ — ایک سیدھی ندی کا عرض اس طرح محسوب کیا گیا ہے کہ اس کی ایک جانب ا طول کا ایک قاعدہ ناپا گیا ہے اور اس کے سروں کو مقابل کے کنارہ پر کے ایک نشان سے ملانے والے خطوطِ مستقیم جو زاویے قاعدے کے ساتھ بناتے ہیں ان کا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ اگر اس آلہ سے جس سے زاویے ناپے گئے ہیں زاویوں کی قیمتیں اصلی قیمتوں سے (۱ + ن) گنی حاصل ہوئی ہوں جہاں ن بہت چھوٹا ہے تو ثابت کرو کہ دریا کے محسوب کردہ عرض میں جو خطا ہے وہ

$$\text{ن ا} \times \frac{\text{بہ جب}^2\,\text{عہ} - \text{عہ جب}^2\,\text{بہ}}{\text{جب}^2\,(\text{عہ} - \text{بہ})}$$

کے بہت قریب ہے؛ عہ، بہ مذکورہ بالا زاویوں کے دائری ناپ ہیں۔

۴۴ — ایک مشاہد ایک جہاز کے عرشہ سے جو سطح سمندر سے ۲۰ فٹ اوپر ہے دُور کے روشنی کے مینار کی چوٹی کو عین دیکھ سکتا ہے، وہ پھر جھنڈے کے ڈنڈے پر اوپر تک چڑھتا ہے جہاں وہ عرشہ سے ۸۰ فٹ بلند ہو جاتا ہے تو اُسے روشنی کے

مینار کا دروازہ نظر آتا ہے جس کی بلندی سمندر کے اوپر مینار کی بلندی کا چوتھائی ہے۔ مینار سے اُس کا فاصلہ اور مینار کی بلندی معلوم کرو اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔

۴۵ — ایک سیدھی نہر کے کنارے پر تین کھمبے ایک ایک میل کے فاصلے پر گاڑے گئے ہیں، ان میں سے ہر ایک کی بلندی سطح آب کے اوپر ایک ہی ہے۔ اگر پہلے اور تیسرے کھمبوں کے سروں کو ملانے والا نظری خط درمیانی کھمبے کو اس کے سرے سے آٹھ انچ نیچے قطع کرے تو زمین کا نصف قطر ایک میل تک صحیح معلوم کرو۔

۴۶ — تین نقطوں ا، ب، ج پر جو ایک افقی مستوی میں ہیں سوراخ ڈال کر مورم کی تہ کا سراغ لگایا گیا تو معلوم ہوا کہ وہ علی الترتیب لا، ب، ج گہرائیوں پر ہے؛ نیز ا ب = ف، ب ج = ک، ا ب ج = ع، اگر مورم کی تہ کی اوپر کی سطح، مستوی ہو تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ اس کا میلان فہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

188) $$\text{مس}^2\,\text{فہ} = \frac{1}{\text{قم}^2\,\text{عہ}}\left\{\frac{(\text{ا}-\text{ب})^2}{\text{ف}^2} - 2\,\frac{(\text{ا}-\text{ب})(\text{ج}-\text{ب})}{\text{ف ک}}\,\text{جم عہ} + \frac{(\text{ج}-\text{ب})^2}{\text{ک}^2}\right\}$$

۴۷ — ایک ستون کا زاویۂ ارتفاع عہ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے شمال میں ہے دیکھا جاتا ہے اور بہ ہے جبکہ اس کو ایک مقام سے جو اس کے مشرق میں اس سے ج فاصلہ پر ہے دیکھا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کی بلندی ہے

$$\frac{\text{ج جب عہ جب بہ}}{\left\{\text{جب}(\text{عہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{عہ}+\text{بہ})\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

۴۸ — ایک بندرگاہ سے شمال میں ۹ میل فاصلے پر ایک روشنی کا مینار ہے۔ بندرگاہ سے ایک کشتی اُس سمت میں جو مشرق سے شمال کی طرف $22\frac{1}{2}$° کا زاویہ بناتی ہے حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ روشنی کا مینار اس سے شمال مغربی سمت میں نظر آتا ہے، پھر وہ مڑتی ہے اور روشنی کے مینار کی طرف حرکت کرتی ہے یہاں تک کہ بندرگاہ اس کے جنوب مغربی سمت میں نظر آتا ہے،

پھر وہ مڑتی ہے اور بندرگاہ میں اس کی طرف حرکت کرتی ہوئی داخل ہوتی ہے
ثابت کرو کہ کشتی کی اس گردش کا طول تقریباً ۲۰ میل ہے۔

۴۹ــــ ل نصف قطر کے ایک دائری تالاب کے گرد یکساں عرض ب کا راستہ ہے جس کے گرد بلندی د کی باڑ لگی ہوئی ہے۔ ایک شخص جس کی لمبائی ف ہے باڑ کے عین اندر کھڑا ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ باڑ کا وہ حصہ جس کے بلند ترین نقطے پانی میں انعکاس کے ذریعہ اس شخص کو نظر آسکتے ہیں $\frac{1}{ن}$ واں ہے جہاں

$$\frac{1}{ن} = \frac{2}{\pi}\, جم^{-1}\left\{\frac{ف+د}{2\sqrt{ف\,د}} \times \frac{\sqrt{ب^2+2\,ل\,ب}}{ل+ب}\right\}$$

بشرطیکہ　　$ف > د\left(1+\frac{2ل}{ب}\right)$ اور $< \frac{د}{1+\frac{2ل}{ب}}$

۵۰ــــ ایک کروکی حلقے (Croquet-hoop) کا عرض، اس کے تاروں کی موٹائی، اور گولہ کا قطر دیے گئے ہیں؛ گولہ ایک دیے ہوئے محل میں ہے، بتاؤ کہ وہ شرطیں کس طرح معلوم کی جائیں کہ گولہ کے لیے یہ ممکن ہو جائے کہ وہ حلقہ میں سے جا سکے (۱) سیدھا، (۲) ایک تار کو ٹکرانے کے بعد (۳) دونوں تاروں کو ٹکرانے کے بعد؛ یہ مان لو کہ زاویہ وقوع زاویہ انعکاس کے مساوی ہے۔

۵۱ــــ تین پہاڑوں کی چوٹیاں ا، ب، ج ایک مشاہر کو ایک ہی خطِ مستقیم میں نظر آتی ہیں جبکہ وہ دو مقامات ف اور ق میں سے ہر ایک پر کھڑا رہتا ہے؛ یہ مقامات ایک ہی افقی مستوی میں ہیں، ا ب اور ب ج کے محاذی ہر مقام پر زاویہ عہ بنتا ہے اور زاویے ا ق ف، ج ف ق، علی الترتیب فہ اور یہ ہیں۔

ثابت کرو کہ پہاڑوں کی بلندیوں میں نسبت ہے:

مم ۲ عہ + مم یہ : $\frac{1}{2}$ (مم عہ + مم یہ) (مم عہ + مم فہ) مس عہ : مم ۲ عہ + مم فہ

نیز ثابت کرو کہ اگر ق ب خط ا ج کو د پر قطع کرے تو اج = ج د جب ۲ ع (م پ + م ۲ ع)

۵۲ —— ایک شخص ریل کی ایک سیدھی پٹڑی سے ج فاصلہ پر کھڑا ہوا ایک ٹرین دیکھتا ہے جو پٹڑی پر کھڑی ہے اور جس کا قریب ترین سرا پٹڑی کے اُس نقطہ سے ا فاصلے پر ہے جو اس شخص کے قریب ترین ہے۔ وہ شخص ٹرین کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اس کا مشاہدہ کرتا ہے اور پھر ٹرین کا طول محسوب کرتا ہے۔ اگر زاویہ ع کے مشاہدہ کرنے میں اُس سے ایک چھوٹی خطا ط سرزد ہو جائے تو ثابت کرو کہ اِس کی وجہ سے محسوب کردہ طول میں جو خطا وقوع پذیر ہو گی اِسس کو اصلی طول کے ساتھ یہ نسبت ہے

$$\frac{ج\ ط}{جب\ ع\ (ج\ جم\ ع - ا\ جب\ ع)}$$

۵۳ —— ایک پہاڑ کی بلندی ف حسب ذیل مشاہدہ کردہ چیزوں کی قیمتوں سے معلوم کرنی ہے، ایک افقی قاعدہ کا خط ب ج (ا)، زاویے ا ب ج، ا ج ب اور زاویہ (ی) جو ا ب، انتصابی خط کے ساتھ بناتا ہے۔ بتاؤ کہ

$$ف = \frac{ا\ جم\ ی\ جب\ ج}{جب\ (ب + ج)}$$

(189) اگر ف تقریباً معلوم ہو تو ثابت کرو کہ ب ج کی مناسب ترین سمت

$$ب = ۲\ مس^{-1}\left(\frac{ا\ جم\ ی - ف}{ا\ جم\ ی + ف}\right)$$

سے ملتی ہے ایسی کہ ج کی پیمایش میں جو خطا ہو اس کا اثر ف کی مذکورہ بالا قیمت کی صحت پر کم سے کم ہوتا ہے۔

۵۴ —— تین انتصابی جھنڈے ایک افقی مستوی پر قائم ہیں۔ اس مستوی میں تین نقطے ا، ب، ج ہیں جن میں سے ہر ایک پر اِن تین جھنڈوں میں سے

دو کے سرے ایک ہی خط مستقیم میں نظر آتے ہیں؛ اور یہ خطوط مستقیم افق کے ساتھ علی الترتیب زاویے عہ، بہ، جہ بناتے ہیں۔ جھنڈوں کے سروں میں سے جو مستوی گذرتا ہے وہ افق کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جھنڈوں کے طول ہیں

$$\frac{ب\,ج}{\sqrt{مم^2 بہ - مم^2 طہ} + \sqrt{مم^2 جہ - مم^2 طہ}}$$

اور دو متشابہ جملے۔ بتاؤ کہ جذروں کی علامتیں کس طرح لی جانی چاہئیں۔

۵۵۔ ایک بُرج ا ب ایک اُفقی مستوی پر قائم ہے اور اس پر ایک مینار ب ج ہے۔ ایک پہاڑ پر جس کا رُخ ایک مائل مستوی خیال کیا جا سکتا ہے ایک مشاہد مقام ع پر کھڑا دیکھتا ہے کہ ا ب، ب ج ہیں سے ہر ایک کے محاذی اس کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے؛ اب وہ مقام ف تک حرکت کرتا ہے اور فاصلہ ع ف (= ۲ ك) کی پیمایش کرتا ہے اور دیکھتا ہے کہ پھر اب ب ج اِس کی آنکھ پر وہی زاویے عہ بناتے ہیں؛ اب وہ زاویوں ا ف ع (= بہ) اور ج ف ع (= جہ) کی پیمایش کرتا ہے۔ اگر ا ب، ب ج کی بلندیاں لا اور ما ہوں تو بتاؤ کہ

$$لا\,جم\,بہ = ما\,جم\,جہ = ك\left\{ ۱ - \frac{جم\,بہ\,جم\,جہ\,جم^2 عہ}{جم^2 \tfrac{۱}{۲}(بہ + جہ)\,جم^2 \tfrac{۱}{۲}(بہ - جہ)} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

نیز اگر ع ف کا نقطۂ وسطی ث ہو اور ث میں سے گذرنے والے خطِ میلان اعظم پر ھ وہ نقطہ ہو جس پر ا ب، ب ج مساوی زاویے ضہ بناتے ہیں اور اگر ث ھ = ب تو ثابت کرو کہ افق کے ساتھ پہاڑ کا میلان طہ، مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\left\{ \frac{لا^2 ما^2}{(لا - ما)^2} - \left(\frac{ك^2 + ب^2}{۲ب} \right)^2 \right\}^{\frac{۱}{۲}} جب\,طہ + \frac{ك^2 ب^2}{۲ب} جم\,طہ$$

$$= \frac{لا\,ما\,(لا + ما)\,جب\,۲\,ضہ}{لا^2 + ما^2 - ۲\,لا\,ما\,جم\,۲\,ضہ}$$

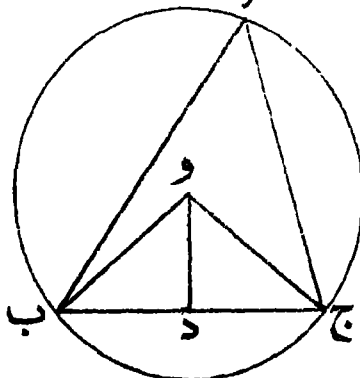
(190)

بارہواں باب

مثلثوں اور ذوار بعتہ الاضلاعوں کے خواص

۱۵۰ ــــــ اس باب میں ہم اکثر اقلیدسی ہندسہ کے اُن مسئلوں کو بلا ثبوت مان لینگے جو ہمارے مقصد کے لیے ضروری ہیں اور ان مسئلوں کی تحقیق کے لیے نظری ہندسہ پر لکھی ہوئی کتابوں کا حوالہ دینگے۔

مثلث کا حائط دائرہ

۱۵۱ ــــــ ایک مثلث کے حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے ضابطہ ر = $\frac{1}{2}$ ا قم ا ' دفعہ ۱۲۰ میں حاصل ہو چکا ہے۔ اس ضابطہ کو یوں بھی حاصل کیا جاسکتا ہے:

(۱۵۱) فرض کرو کہ و حائط دائرہ کا مرکز ہے؛ مثلث ا ب ج کے ضلع ب ج پر عمود و د کھینچو، تو ب ج کا نقطۂ وسطی د ہے اور زاویہ ب و د = ا
چونکہ ب د = و ب جب ب و د، اس لیے

$\frac{1}{2}$ ا = ر جب ا، یا ر = $\frac{1}{2}$ ا قم ا . . . (۱)

اگر مثلث کا رقبہ س سے تعبیر ہو تو

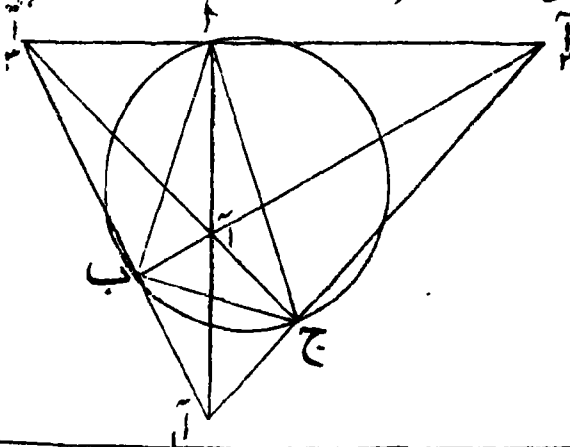
س = $\frac{1}{2}$ ب ج جب ا

اس طرح حائط دائرہ کے نصف قطر کے لیے ہمیں جملہ حاصل ہوتا ہے

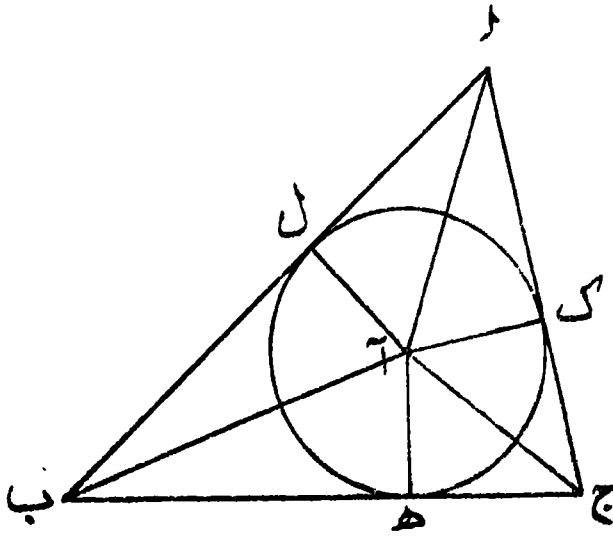
ر = $\frac{\text{ا ب ج}}{\text{۴ س}}$ . . . . (۲)

نیز　　و د = و ب جم ا = ر جم ا

مثلث کے اندرونی اور جانبی دائرے

۱۵۲ــــــ ہم جانتے ہیں کہ ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرنے والے چار دائرے کھینچے جا سکتے ہیں؛ اندرونی دائرہ ہر ضلع کو داخلی طور پر مس کرتا ہے، فرض کرو کہ اس کا مرکز آ ہے؛ ہر جانبی دائرہ مثلث کے ایک ضلع کو اور دوسرے دو ممتدہ ضلعوں کو مس کرتا ہے، فرض کرو کہ

اِن جانبی دائروں کے مرکز آ$_1$، آ$_2$، آ$_3$ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ آ ا، آ ب، آ ج، علی الترتیب زاویوں ا، ب، ج کی تنصیف کرتے ہیں، اور آ$_1$ ب، آ$_1$ ج علی الترتیب زاویوں ب، ج کی خارجی طور پر تنصیف کرتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مثلث آ$_1$ آ$_2$ آ$_3$ کے راسوں آ$_1$، آ$_2$، آ$_3$ سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ا آ$_1$، ب آ$_2$، ج آ$_3$ ہیں اور اِس مثلث آ$_1$ آ$_2$ آ$_3$ کا مرکز عمودی آ ہے۔

مثلث ا ب ج کا حائط دائرہ، مثلث آ$_1$ آ$_2$ آ$_3$ کا نو نقطی دائرہ ہے اور اس لیے یہ حائط دائرہ ضلعوں آ$_2$ آ$_3$، آ$_3$ آ$_1$، آ$_1$ آ$_2$ کے نقاط وسطی میں سے اور نیز آ آ$_1$، آ آ$_2$، آ آ$_3$ کے نقاط وسطی میں سے گذرتا ہے۔

(192) ۱۵۳ —— فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ا ب، ب ج، ج ا کو اس کا اندرونی دائرہ علی الترتیب نقطوں ل، ھ، ک پر مس کرتا ہے۔

تب $\triangle$ آ ب ج + $\triangle$ آ ج ا + $\triangle$ آ ا ب = س،

اب چونکہ $\triangle$ آ ب ج = $\frac{1}{2}$ آ ھ × ب ج = $\frac{1}{2}$ ر ا،

$\triangle$ آ ج ا = $\frac{1}{2}$ ر ب، اور $\triangle$ آ ا ب = $\frac{1}{2}$ ر ج،

جہاں ر اندرونی دائرہ کا نصف قطر ہے، اس لیے

$\frac{1}{2}$ ر (ا + ب + ج) = س،

یعنی ر = $\frac{\text{س}}{\text{س}}$ ، . . . . . . (۳)

جس سے اندرونی دائرہ کا نصف قطر حاصل ہوتا ہے۔ نیز چونکہ

ا = ب ھ + ھ ج = ر (مم $\frac{1}{2}$ ب + مم $\frac{1}{2}$ ج)

اس لیے ر = ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج قط $\frac{1}{2}$ ا . . . . (۴)

یہ ر کے لیے دوسرا جملہ ہے جو (۳) سے بھی اخذ ہو سکتا ہے۔
ضابطوں (۱) اور (۴) کو ملانے سے ہمیں تشاکل جملہ حاصل ہوتا ہے

ر = ۴ ر جب $\frac{1}{2}$ ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج . . . (۵)

نیز چونکہ ا ک + ب ج = $\frac{1}{2}$ (ب ج + ج ا + ا ب)

اس لیے ا ک = ا ل = س - ا

اور اسی طرح ب ھ = ب ل = س - ب، ج ھ = ج ک = س - ج

پس چونکہ ر = ا ک مس $\frac{1}{2}$ ا = ب ھ مس $\frac{1}{2}$ ب = ج ک مس $\frac{1}{2}$ ج

ہمیں جملے حاصل ہوتے ہیں

ر = (س - ا) مس $\frac{1}{2}$ ا = (س - ب) مس $\frac{1}{2}$ ب = (س - ج) مس $\frac{1}{2}$ ج . . (۶)

اِن کو (۳) اور (۴) سے بھی اخذ کیا جا سکتا ہے۔

(193)

۱۵۴ ــــ دفعہ سابق کے جملوں کے جواب میں جانبی دائروں کے نصف قطروں ر_1، ر_2، ر_3 کے لیے جملے معلوم کیے جا سکتے ہیں ۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کو وہ دائرہ جس کا مرکز آ_1 ہے نقطوں ھ_1، ک_1، ل_1 پر مس کرتا ہے۔ تب

$$\Delta\,\text{آ}_1\text{ا ب} + \Delta\,\text{آ}_1\text{ا ج} - \Delta\,\text{آ}_1\text{ب ج} = \text{س}،$$

اس لیے $\frac{1}{2}\,\text{ر}_1\,(\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}) = \text{س}$

اور اس لیے جانبی دائروں کے نصف قطروں کے لیے ہمیں ضابطے ملتے ہیں

$$\text{ر}_1 = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ا}}،\quad \text{ر}_2 = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ب}}،\quad \text{ر}_3 = \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ج}}،\quad \ldots\ (۷)$$

نیز چونکہ $\text{ا} = \text{ب ھ}_1 + \text{ھ}_1\text{ج} = \text{ر}_1\,(\text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{مس}\,\tfrac{1}{2}\text{ج})$،

اس لیے $\text{ر}_1 = \text{ا جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ب جم}\,\tfrac{1}{2}\text{ج قط}\,\tfrac{1}{2}\text{ا} \quad \ldots\ (۸)$

اِس سے ضابطہ ملتا ہے

$\text{ر}_1 = \text{۴ ر جب } \tfrac{1}{2}\text{ا جم } \tfrac{1}{2}\text{ب جم } \tfrac{1}{2}\text{ج}$ .....(۹)

اسی طرح ر_2 اور ر_3 کے لیے تمناظر جملے حاصل ہوتے ہیں ۔

پھر چونکہ

$\text{ب ھ}_1 = \text{ب ل}_1$، اور $\text{ج ھ}_1 = \text{ج ک}_1$، اور $\text{ا ک}_1 = \text{ا ل}_1$

اس لیے $\text{ب ھ}_1 = \text{س} - \text{ج}$، $\text{ج ھ}_1 = \text{س} - \text{ب}$، $\text{ا ک}_1 = \text{ا ل}_1 = \text{س}$

اس طرح ہمیں ضابطے ملتے ہیں

(194) $\text{ر}_1 = \text{س مس } \tfrac{1}{2}\text{ا} = (\text{س} - \text{ج})\text{ مم } \tfrac{1}{2}\text{ب} = (\text{س} - \text{ب})\text{ مم } \tfrac{1}{2}\text{ج}$ ...(۱۰)

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ

$$\text{ر}_1 + \text{ر}_2 + \text{ر}_3 - \text{ر} = \text{۴ ر}،$$

$$\text{ر}_1\text{ر}_2 + \text{ر}_2\text{ر}_3 + \text{ر}_3\text{ر}_1 = \text{س}^2،$$

$$\frac{1}{\text{ر}_1} + \frac{1}{\text{ر}_2} + \frac{1}{\text{ر}_3} = \frac{1}{\text{ر}}$$

(۲) ایک مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے لیے حسب ذیل جملے، جو جانبی دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں ہیں ثابت کرو :—

(الف) $\text{ا} = \dfrac{\text{ر}_1(\text{ر}_2 + \text{ر}_3)}{\sqrt{\text{ر}_1\text{ر}_2 + \text{ر}_2\text{ر}_3 + \text{ر}_3\text{ر}_1}}$ ، (ب) $\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ا} = \dfrac{\text{ر}_1}{\sqrt{(\text{ر}_1 + \text{ر}_2)(\text{ر}_1 + \text{ر}_3)}}$

(ج) $\text{جب ا} = \text{۲ر}_1 \dfrac{\sqrt{\text{ر}_2\text{ر}_3 + \text{ر}_3\text{ر}_1 + \text{ر}_1\text{ر}_2}}{(\text{ر}_1 + \text{ر}_2)(\text{ر}_1 + \text{ر}_3)}$

(۳) ثابت کرو کہ $\text{ر} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{(\text{ر}_1 + \text{ر}_2)(\text{ر}_2 + \text{ر}_3)(\text{ر}_3 + \text{ر}_1)}{\text{ر}_1\text{ر}_2 + \text{ر}_2\text{ر}_3 + \text{ر}_3\text{ر}_1}$

(۴) ثابت کرو کہ $۱۶ ر^۲ ر ر_۱ ر_۲ ر_۳ = ا^۲ ب^۲ ج^۲$

(۵) ثابت کرو کہ $جم\ ا = \frac{۲ر + ر - ر_۱}{۲ر}$

(۶) اگر وہ جانبی دائرہ جو ضلع ا کو مس کرتا ہے حائط دائرہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$جم\ ا = جم\ ب + جم\ ج$$

(۷) ثابت کرو کہ $ر_۱ (ر_۲ + ر_۳) قم\ ا = ر_۲ (ر_۳ + ر_۱) قم\ ب = ر_۳ (ر_۱ + ر_۲) قم\ ج$

(۸) اگر اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے راس ا سے $عہ، عہ_۱، عہ_۲، عہ_۳$ ہوں اور ا سے ب ج پر عمود ع ہو تو ثابت کرو کہ

(ا) $عہ\ عہ_۱\ عہ_۲\ عہ_۳ = ۴ ر^۲ ع^۲$ ،

(ب) $عہ^۲ + عہ_۱^۲ + عہ_۲^۲ + عہ_۳^۲ = ۱۶ ر^۲$ ،

(ج) $\bar{عہ}^۲ + \bar{عہ}_۱^۲ + \bar{عہ}_۲^۲ + \bar{عہ}_۳^۲ = ۴ \bar{ع}^۲$

(۹) بتاؤ کہ اُس مثلث کا رقبہ جو جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے یہ ہے

$$\frac{ا ب ج}{۴ر}، \text{ یا } ۸ ر^۲ جم \tfrac{۱}{۲} ا\ جم \tfrac{۱}{۲} ب\ جم \tfrac{۱}{۲} ج$$

(۱۰) ثابت کرو کہ اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو چار مثلث بنتے ہیں اِن میں کسی کے گرد کھینچے ہوئے دائرہ کا نصف قطر، ر کا دُگنا ہوتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ رقبے $\bar{آ}_۱ \bar{آ}_۲ \bar{آ}_۳$، $\bar{آ} \bar{آ}_۲ \bar{آ}_۳$، $\bar{آ} \bar{آ}_۳ \bar{آ}_۱$، $\bar{آ} \bar{آ}_۱ \bar{آ}_۲$ ایسے بدلتے ہیں جیسے $\frac{۱}{ر}$، $\frac{۱}{ر_۱}$، $\frac{۱}{ر_۲}$، $\frac{۱}{ر_۳}$

(۱۲) ثابت کرو کہ (ا) $\frac{\overline{آ ا_۱}^۲}{ر_۲ ر_۳} + \frac{\overline{آ ا_۲}^۲}{ر_۳ ر_۱} + \frac{\overline{آ ا_۳}^۲}{ر_۱ ر_۲} = ۸ \frac{ر}{ر}$ ،

(ب) $ر^۲ \times \overline{آ ا_۱} \times \overline{آ ا_۲} \times \overline{آ ا_۳} = \overline{آ ا}^۲ \times \overline{آ ب}^۲ \times \overline{آ ج}^۲$ ،

(۱۳) اگر ایک مثلث کے راسوں سے آ کے فاصلے ف۱، ف۲، ف۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف}_1\,\text{ف}_2\,\text{ف}_3}{\text{ا ب ج}} = \frac{1}{\text{س}}$$

(۱۴) اگر اس مثلث کے ضلع اَ، بَ، جَ ہوں جو جانبی دائروں کے نقاط تماس ھ۱، ھ۲، ھ۳ کو ملانے سے بنتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اَ}^2 - \text{ا}^2}{\text{ا}} = \frac{\text{بَ}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}} = \frac{\text{جَ}^2 - \text{ج}^2}{\text{ج}}$$

(۱۵) دائروں ب د ج، ج د ا، ا د ب کے مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کے ضلعوں میں نسبت جب ۲ ا : جب ۲ ب : جب ۲ ج ہوگی۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مبہم صورت میں جبکہ ا، ب، ب دیئے ہوئے ہوں جو دو مثلث حاصل ہوتے ہیں ان کے حائط دائرے مساوی ہوتے ہیں؛ نیز ثابت کرو کہ ان کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ہے

$$(\text{ب}^2\ \text{قم}^2\ \text{ب} - \text{ا}^2)^{\frac{1}{2}}$$

(۱۷) مثلث کے حل کی مبہم صورت میں ثابت کرو کہ دیے ہوئے ضلعوں میں سے بڑے ضلع کے ساتھ اندرونی دائروں کے نقاط تماس کا فاصلہ تیسرے ضلع کی قیمتوں کے فرق کے نصف کے مساوی ہوتا ہے۔

(۱۸) اگر مثلثوں آ ب ج، آ ج ا، آ ا ب کے حائط دائروں کے نصف قطر غم۱، غم۲، غم۳ ہوں تو ثابت کرو کہ

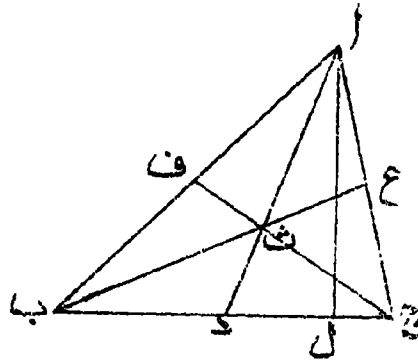
$$۴\,\text{س}^3 - \text{س}\,(\text{غم}_1^2 + \text{غم}_2^2 + \text{غم}_3^2) - \text{غم}_1\,\text{غم}_2\,\text{غم}_3 = ۰$$

(۱۹) ثابت کرو کہ ایک مثلث کے جانبی دائروں کے نصف قطر، کعبی مساوات

$$\text{لا}^3 - \text{لا}^2\,(۴\,\text{س} + \text{ر}) + \text{ر}\,\text{ص}^2 - \text{ر}\,\text{ص}^2 = ۰$$

کی اصلیتیں ہیں۔

خطوط وسطی

۱۵۵ — ایک مثلث کے راسوں کو مقابل کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے ملانے والے خطوط مستقیم ا د، ب ع، ج ف خطوط وسطی کہلاتے ہیں۔

خط وسطی ا د کا طول، مشہور مسئلہ $ا ب^2 + ا ج^2 = 2(ا د^2 + ب د^2)$ سے حاصل ہوتا ہے، اس طرح خطوط وسطی کے طولوں کے مربع مساواتوں

$$م_1^2 = \frac{1}{2} ب^2 + \frac{1}{2} ج^2 - \frac{1}{4} ا^2 ، \quad م_2^2 = \frac{1}{2} ج^2 + \frac{1}{2} ا^2 - \frac{1}{4} ب^2 ،$$

$$م_3^2 = \frac{1}{2} ا^2 + \frac{1}{2} ب^2 - \frac{1}{4} ج^2 \quad \ldots(11)$$

سے ملتے ہیں جہاں $م_1$، $م_2$، $م_3$ خطوط وسطی کے طول ہیں۔ فرض کرو کہ زاویہ ا د ج، $م_1$ سے تعبیر ہوتا ہے، تب

$$\text{مم}\, م_1 = \frac{د ل}{ا ل} = \frac{1}{2} \frac{ب ل - ج ل}{ا ل}$$

جہاں ال، ب ج پر عمود ہے؛ پس م، مساوات

$$\text{مم م} = \frac{1}{2}(\text{مم ب} - \text{مم ج}) \quad \cdots\cdots (12)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

نقطۂ ث جس پر خطوط وسطی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں مثلث کا مرکز ہندسی کہلاتا ہے۔ یہ بہت مشہور ہے کہ خطوط وسطی میں سے ہر ایک کو ث، نسبت ۲ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

(196)

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مم ا ث د + مم ب ث د + مم ج ث ع = مم ا + مم ب + مم ج

(۲) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے مرکز عہ، بہ، جہ ہوں اور مثلثوں ا ب ج، عہ بہ جہ کے رقبے ق، قَ تو ثابت کرو کہ

$$۳۶\ \text{ق قَ} = (\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2)^2$$

(۳) اگر دائروں ب ث ج، ج ث ا، ا ث ب کے نصف قطر ہا، ہب، ہج ہوں تو ثابت کرو کہ

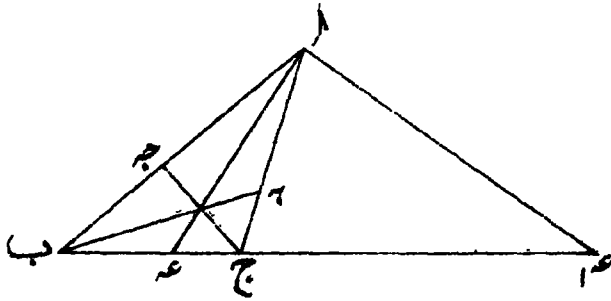
$$\frac{\text{ا}^2(\text{ب}^2 - \text{ج}^2)}{\text{ہا}} + \frac{\text{ب}^2(\text{ج}^2 - \text{ا}^2)}{\text{ہب}} + \frac{\text{ج}^2(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{\text{ہج}} = 0$$

(۴) اگر زاویے ب ا د، ج ب ع، ا ج ف علی الترتیب عہ، بہ، جہ اور زاویے ج ا د، ا ب ع، ب ج ف علی الترتیب عَہ، بَہ، جَہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{مم عہ} + \text{مم بہ} + \text{مم جہ} = \text{مم عَہ} + \text{مم بَہ} + \text{مم جَہ}$$

زاویوں کے ناصف

۱۵۶ ——— فرض کرو کہ زاویہ ا کے داخلی اور خارجی ناصف مقابل کے ضلع سے نقطوں ع اور عم پر ملتے ہیں۔ فرض کرو کہ داخلی ناصفوں اع، ب ہ، ج ء کے طول ف، گ، ہ ہیں اور خارجی ناصفوں اعم، ب ہم، ج جم کے طول فَ، گَ، ہَ۔ تب ع اور عم کے محل معلوم کرنے کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $\frac{ب ع}{ج ع} = \frac{ب ا}{ج ا} = \frac{ب عم}{ج عم}$، اس لیے

$$ب ع = \frac{ا ج}{ب + ج}،\ ج ع = \frac{ا ب}{ب + ج}،\ ب عم = \frac{ا ج}{ج - ب}،\ ج عم = \frac{ا ب}{ج - ب}$$

اور طول ف، فَ معلوم کرنے کے لیے

$$\Delta\, ا ب ع + \Delta\, ا ج ع = س = \Delta\, ا عم ب - \Delta\, ا عم ج،$$

اس لیے $ف (ب + ج)\, جب \frac{1}{2} ا = فَ (ج - ب)\, جم \frac{1}{2} ا = ۲ س$

پس $ف = \frac{۲ ب ج}{ب + ج}\, جم \frac{1}{2} ا،\ فَ = \frac{۲ ب ج}{ج - ب}\, جب \frac{1}{2} ا \ldots (۱۳)$ (۱۹۷)

مثالیں

(۱) اگر عہ، بہ، جہ وہ زاویے ہوں جو اعہ، ب بہ، ج جہ ضلعوں ا، ب، ج کے ساتھ بناتے ہیں تو ثابت کرو کہ ا جب ۲ عہ + ب جب ۲ بہ + ج جب ۲ جہ = ۰
(۲) اگر زاویوں کے ناصفوں کو حائط دائرہ تک خارج کیا جائے اور ان کے طول ف۱، گ۱، ھ۱ ہوں تو ثابت کرو کہ

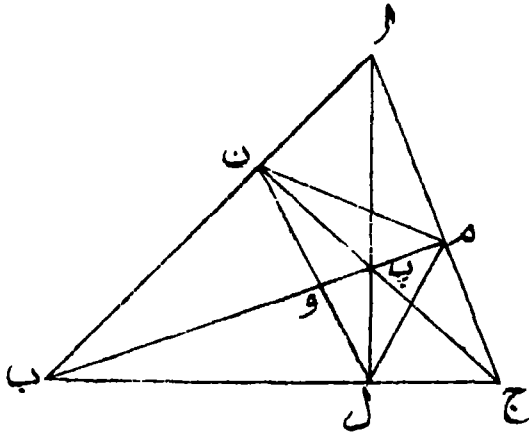
ف۱ جم ½ ا + گ۱ جم ½ ب + ھ۱ جم ½ ج = ا + ب + ج (بالائی خط کے ساتھ)

ف۱ جم ½ ا + گ۱ جم ½ ب + ھ۱ جم ½ ج = ا + ب + ج

اور ف۱ جم ½ ا + گ۱ جم ½ ب + ھ۱ جم ½ ج = ا + ب + ج

(۳) ثابت کرو کہ عہ بہ، ج جہ کو نسبت ۲ ج : ا + ب میں قطع کرتا ہے۔

مثلث پائیں

۱۵۷ —— ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود ا ل، ب م، ج ن کھینچے گئے ہیں، ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے جو مثلث ل م ن بنتا ہے اس کو ا، ب، ج کا **مثلث پائیں** کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ ہے، تب چونکہ پ م ا
پ ن ا قائمہ زاویے ہیں اس لیے ایک دائرہ جس کا قطر پ ا ہو شکل
پ م ا ن کے گرد کھینچا جا سکتا ہے، اس لیے
م ن = پ ا × اُس زاویہ کی جیب جو قطاع م ن میں بنتا ہے
یعنی م ن = پ ا جب ا

اب اگر محاطہ دائرہ کا مرکز ۵ ہو اور و د، ب ج پر عمود ہو تو یہ ظاہر ہے کہ ا پ = ۲ و د، اور ہم نے دفعہ ۱۵۱ میں یہ بتا دیا ہے کہ
و د = س جم ا، اس لیے
م ن = ۲ س جب ا جم ا = ا جم ا

نیز زاویوں پ ل م، پ ل ن میں سے ہر ایک، ا کا متمم ہے، یا م ل ن
= π − ۲ ا، پس مثلث پائیں کے ضلع اور زاویے علی الترتیب میں

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ا جم ا، ب جم ب، ج جم ج} \\ \pi-\text{۲ ا،} \ \pi-\text{۲ ب،} \ \pi-\text{۲ ج} \end{array}\right. \quad \ldots\ldots \quad (۱۴)$$

(198)

یہ توجہ طلب ہے کہ آ، آ$_1$، آ$_2$ کا مثلث پائیں ا ب ج ہے۔ ل م ن کا
مثلث پائیں، ا ب ج کا دوسرا مثلث پائیں کہلاتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس۔

ہم نے اوپر یہ مان لیا ہے کہ مثلث حادۃ الزاویہ ہے، اگر زاویہ ا منفرجہ
ہو تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلث پائیں کے زاویے ۲ ا − π، ۲ ب،
۲ ج ہیں اور اس کے ضلع − ا جم ا، ب جم ب، ج جم ج ہیں۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر
۲ س جم ا جم ب جم ج ہے۔

(۲) اگر دائروں م پ ن، ن پ ل، ل پ م کے قطر عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{بہ\ جہ}{ب\ ج} + \frac{جہ\ عہ}{ج\ ا} + \frac{عہ\ بہ}{ا\ ب} = ۱$$

(۳) اگر مثلث پائیں کے اندرونی اور جانبی دائروں کے نصف قطر ر، ر۱، ر۲، ر۳ ہوں تو

ثابت کرو کہ $\frac{ر_1 ر_2 ر_3}{ر} = \frac{ر ر_1 ر_2 ر_3}{ر^2}$

(۴) اگر ال، ب م، ج ن، حائط دائرہ سے نقطوں لَ، مَ، نَ پر ملیں تو

ثابت کرو کہ $\frac{الَ}{ال} + \frac{ب مَ}{ب م} + \frac{ج نَ}{ج ن} = ۴$

خاص نقطوں کے درمیان فاصلے

۱۵۸ ـــــ فرض کرو کہ مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی پ، حائط دائرہ کا مرکز و، اندرونی دائرہ کا مرکز آ، ایک جانبی دائرہ کا مرکز آ۱، مرکز ہندسی ث، اور نو نقطی دائرہ کا مرکز ع ہے۔ آئیلر کے مشہور مسئلے کی بموجب تین نقطے و، ث، پ ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں اور پ ث = ۲ د ث، نقطہ ع بھی و پ پر واقع ہے اور اس کا وسطی نقطہ ہے۔ زاویوں آ ا و، آ ا پ میں سے ہر ایک، $\frac{1}{2}$(ب ~ ج) کے مساوی ہے: نیز ا و = ر، ا پ = ۲ ر جم ا،

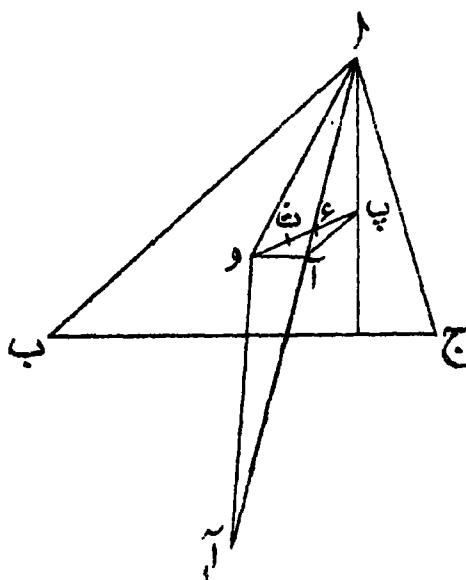
$ا آ = رقم \frac{1}{2} ا = ۴ ر جب \frac{1}{2} ب جب \frac{1}{2} ج$،

$ا آ_1 = ۴ ر جم \frac{1}{2} ب × جم \frac{1}{2} ج$

اب ہم نقطوں و، آ، پ، آ۱، ع کے درمیان ایک دوسرے

(199)

سے جو فاصلے ہیں اُن کے لیے جملے معلوم کر سکتے ہیں۔

(۱) و آ معلوم کرنا۔ فرض کرو و آ = ضہ تو حاصل ہوتا ہے

$$ضہ^2 = ا و^2 + ا آ^2 - ۲ ا و \times ا آ . جم و ا آ$$

اس لیے ضہ^2 = ر^2 [۱ + ۱۶ جب^2 ½ ا جب^2 ½ ب جب^2 ½ ج - ۸ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج × جم ½ (ب - ج)]

یا ضہ^2 = ر^2 (۱ - ۸ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ ج)

پس ہمیں آیلر کا ضابطہ ضہ^2 = ر^2 - ۲ ر ر ‌ . . . . (۱۵)

حاصل ہوتا ہے

(۲) و آ$_1$ معلوم کرنا۔ فرض کرو و آ$_1$ = ضہ$_1$ تو

ضہ$_1^2$ = ر^2 [۱ + ۱۶ جم^2 ½ ا جم^2 ½ ب جم^2 ½ ج - ۸ جم ½ ا جم ½ ب جم ½ ج جم ½ (ب - ج)]

یا ضہ$_1^2$ = ر^2 (۱ + ۸ جب ½ ا جم ½ ب جم ½ ج)

جس سے حاصل ہوتا ہے ضہ^2 = س^2 + ۲ س ر ، ...(۱۶)

(۳) و پ معلوم کرنا۔ مثلث و ا پ سے حاصل ہوتا ہے

وپ^2 = وا^2 + اپ^2 - ۲ و ا × ا پ جم و ا پ

یا وپ^2 = س^2 [۱ + ۴ جم^2 ا - ۴ جم ا جم (ب - ج)]

جس سے حاصل ہوتا ہے وپ^2 = س^2 (۱ - ۸ جم ا جم ب جم ج) ...(۱۷)

(۴) آپ معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے (200)

آپ^2 = ۴ س^2 جم^2 ا + ۱۶ س^2 جب^2 $\frac{1}{2}$ ب جب^2 $\frac{1}{2}$ ج

- ۱۶ س^2 جم ا جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ ج جم $\frac{1}{2}$ (ب - ج)

اس لیے آپ^2 = ۴ س^2 {جم^2 ا + (۱ - جم ب)(۱ - جم ج) - جم ا جب ب جب ج

- جم ا (۱ - جم ب)(۱ - جم ج)}

یا آپ^2 = ۴ س^2 {(۱ - جم ا)(۱ - جم ب)(۱ - جم ج) - جم ا جم ب جم ج}

.... (۱۸)

یا آپ^2 = ۲ ر^2 - ۴ س^2 جم ا جم ب جم ج

(۵) آع معلوم کرنا۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

آع^2 = $\frac{1}{2}$ آپ^2 + $\frac{1}{2}$ آو^2 - $\frac{1}{4}$ وپ^2 ؛

اس لیے آع^2 = ر^2 + $\frac{1}{2}$ س^2 - س ر - $\frac{1}{4}$ س^2 = ($\frac{1}{2}$ س - ر)^2

اس لیے آع = $\frac{1}{2}$ س - ر

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اَع = $\frac{1}{2}$ س + ر ؛ اب چونکہ $\frac{1}{2}$ س

نو نقطی دائرہ کا نصف قطر ہے اس لیے آع، آ ع کے لیے۔ جو جملے ہم نے حاصل کیے ہیں اُن سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اندرونی اور جانبی دائرے نو نقطی دائرہ کو مس کرتے ہیں - پس فیورباک (Feuerbach) کا مسئلہ علم مثلث کے ذریعہ ثابت ہو چکا، اس مسئلہ کے متعدد ہندسی ثبوت دیے جاتے ہیں -

مثالیں

(۱) اگر جانبی دائروں کے مرکزوں سے حائط دائرہ کے مماس کھینچے جائیں اور ان کے طول ج_1، ج_2، ج_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ج}_1^2}+\frac{1}{\text{ج}_2^2}+\frac{1}{\text{ج}_3^2}=\frac{\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}}{\text{ا ب ج}}$$

(۲) ثابت کرو کہ مثلث آ و پ کا رقبہ ہے

$$-2\,\text{ر}^2\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ا})\,\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\text{ث آ}^2=\frac{16}{3}\text{ر}^2\left\{\Sigma\,\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ب}\,\text{جب}^2\tfrac{1}{2}\text{ج}-\frac{1}{12}\Sigma\,\text{جب}^2\text{ا}\right\}$$

$$\text{اور}\quad \text{ث آ}^2+4\,\text{ر ر}=\frac{1}{3}(\text{ب ج}+\text{ج ا}+\text{ا ب})-\frac{1}{9}(\text{ا}^2+\text{ب}^2+\text{ج}^2)$$

(۴) ثابت کرو کہ

$$\text{و پ}^2=\frac{\Sigma\,\text{ا}^2(\text{ا}^2-\text{ب}^2)(\text{ا}^2-\text{ج}^2)}{(4\,\text{س})^2}$$

(۵) اگر راسوں سے نو نقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلے عہ، بہ، جہ ہوں اور مرکزِ عمودی سے اس کا فاصلہ ث ہو تو ثابت کرو کہ

عہ۲ + بہ۲ + جہ۲ + ث۲ = ۳ سہ۲

(۶) ثابت کرو کہ نونقطی دائرہ حائط دائرہ کو قطع نہیں کرتا اِلّا اُس صورت کے جبکہ مثلث کا ایک زاویہ منفرجہ ہو اور اِس صورت میں یہ دائرے ایک دوسرے کو زاویہ

جم^-۱ (۱ + ۲ جم ا جم ب جم ج)

پر قطع کرتے ہیں۔

(۷) اگر حائط دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کے درمیان فاصلہ ½ ر ہو تو ثابت کرو کہ یا مثلث قائم الزاویہ ہے، یا مس ب مس ج = ۹

(۸) اگر نونقطی دائرہ کا مرکز ق ہو تو ثابت کرو کہ

(ق آ۱ - ق آ۲)(ق آ۱ - ق آ۳) = ب۲ - ج۲

(۹) اگر و آ پ ایک تساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

جم ا + جم ب + جم ج = ۳/۲

(۱۰) اگر اندرونی دائرہ کا مرکز، حائط دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی سے متساوی الفصل ہو تو ثابت کرو کہ مثلث کا ایک زاویہ ۶۰° ہے۔

مثلث کے رقبہ کے لیے جملے

۱۵۹ ـــــ مثلث کے رقبہ کے لیے اس سے متعلقہ مختلف خطوط اور زاویوں کی تقوم میں جملوں کی ایک بہت بڑی تعداد معلوم ہو چکی ہے۔ ایسے بہت سے ضابطے Mathesis. Vol. III میں اور Annels of math. Vol. I. No.6 میں ملینگے۔

ان میں سے چند ضابطے ہم ذیل میں درج کرتے ہیں اور اِن کی تصدیق کا کام طالب علم پر مشق کے طور پر چھوڑتے ہیں :-

ما = √(ر ر۱ ر۲ ر۳)، (۲) ما = ½ √(سہ ع ع۱ ع۲ ع۳)، (۳) ما = ۴/۳ √(ثہ (ثہ - م۱)(ثہ - م۲)(ثہ - م۳))

جہاں م، م، م خطوط وسطی ہیں اور ۲ ث = م + م + م (۴) $\frac{س^2}{ع م \frac{1}{2} ا}$،

(۵) $\frac{ف جم \frac{1}{2}(ب-ج) + گ جم \frac{1}{2}(ج-ا) + ھ جم \frac{1}{2}(ا-ب)}{۲(ف^{-1} جم \frac{1}{2}ا + گ^{-1} جم \frac{1}{2}ب + ھ^{-1} جم \frac{1}{2}ج)}$،

جہاں ف، گ، ھ زاویوں کے ناصف ہیں۔

(۶) ر² جم $\frac{1}{2}$ا جم $\frac{1}{2}$ب جم $\frac{1}{2}$ج، (۷) ر² جم $\frac{1}{2}$ا + ۲ ر ر جب ا،

(۸) ر ر ص $\frac{1}{2}$ا، (۹) ر ر $\frac{ر^2 - ر^2}{ب - ج}$، (۱۰) ر ر $\sqrt{\frac{۴ ر ر - (ر + ر)}{ر + ر}}$

مثلثوں کے مختلف خواص

۱۶۰ ــــ اگر مثلث ا ب ج کے مستوی میں کوئی نقطہ ق ہو تو ہمیں متماثلہ رشتہ

Δ ق ب ج + Δ ق ج ا + Δ ق ا ب ≡ Δ ا ب ج

حاصل ہوتا ہے جبکہ اُن مثلثوں کے رقبے جن کا راس ق ہے واجب علامت کے ساتھ لیے جائیں؛ مثلاً Δ ق ب ج منفی ہوگا اگر ق اور ا، ب ج کی مخالف جانبوں میں واقع ہوں۔ ق کو مختلف مقامات پر لینے سے مثلث کے زاویوں کے درمیان مختلف مشہور رشتے حاصل ہوتے ہیں۔

(۱) فرض کرو کہ ق، و پر منطبق ہوتا ہے تو متذکرہ صدر رشتہ ہو جاتا ہے

جب ۲ ا + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۴ جب ا جب ب جب ج

کیونکہ زاویے ب و ج، ج و ا، ا و ب علی الترتیب ۲ ا، ۲ ب، ۲ ج ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ ق ، آ پر ہے تو ہمیں رشتہ حاصل ہوتا ہے

جب $\frac{1}{2}$ ا جب $\frac{1}{2}$ (ب + ج) + جب $\frac{1}{2}$ ب جب $\frac{1}{2}$ (ج + ا)

+ جب $\frac{1}{2}$ ج جب $\frac{1}{2}$ (ا + ب) = ۲ جم $\frac{1}{2}$ ا جم $\frac{1}{2}$ ب جم $\frac{1}{2}$ ج

(۳) فرض کرو کہ ق ، ع پر ہے تو

جب ا جم (ب - ج) + جب ب جم (ج - ا) + جب ج جم (ا - ب)
= ۴ جب ا جب ب جب ج

۱۶۱ ــــــ دفعہ سابق کا مشابہ رشتہ جو ایک مستوی میں کے کسی چار نقطوں ا ، ب ، ج ، ق کے باہمی چھ فاصلوں کے درمیان قائم رہتا ہے متعدد شکلوں میں بیان کیا جا سکتا ہے ۔

(۱) مساوات　△ ق ب ج + △ ق ج ا + △ ق ا ب = △ ا ب ج

کو استعمال کرنے اور ان چار مثلثوں میں سے ہر مثلث کے رقبہ کو اس کے ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ ایک ایسی شکل میں ملتا ہے جس میں چار جذر المربع شامل ہوتے ہیں ۔

(۲) اسی ربط کو منطق شکل میں حاصل کرنا ہو تو زاویوں ب ق ج ، ج ق ا ، ا ق ب کو علی الترتیب عہ ، بہ ، جہ سے تعبیر کرو تو چونکہ عہ + بہ + جہ = ۲ π ہمیں حاصل ہوتا ہے

۱ - جم^2 عہ - جم^2 بہ - جم^2 جہ + ۲ جم عہ جم بہ جم جہ = ۰

اب جم عہ کی بجائے اس کی قیمت (ق ب^2 + ق ج^2 - ب ج^2) / ۲ ق ب × ق ج درج کرنے سے اور علیٰ ہذا جم بہ اور جم جہ کی بجائے ان کی متناظر قیمتیں رکھنے سے ہمیں مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے ۔

۱۶۲ ــــــ کسی مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کوئی عام رشتہ لیکر اس سے دوسرا رشتہ اخذ کیا جا سکتا ہے اگر ان ضلعوں اور

زاویوں کی بجائے مثلث پائیں کے تمناظر ضلع اور زاویے رکھے جائیں۔
اِس مثلث کے ضلع اور زاویے دفعہ ۱۵۷ (۱۴) میں دیے گئے ہیں اور
اس لیے ہم دیے ہوئے رشتہ میں ا، ب، ج کی بجائے ا جم ا، ب جم ب،
ج جم ج اور زاویوں ا، ب، ج، کی بجائے π − ۲ ا، π − ۲ ب،
π − ۲ ج رکھ سکتے ہیں۔

اس استحالہ کی ایک مثال یہ ہے:۔ ہم رشتہ ا^{۲} = ب^{۲} + ج^{۲} − ۲ ب ج جم ا
سے واقف ہیں، اس میں متذکرہ صدر اندراجات کرنے سے ہمیں نیا رشتہ
حاصل ہوتا ہے

ا^{۲} جم^{۲} ا = ب^{۲} جم^{۲} ب + ج^{۲} جم^{۲} ج + ۲ ب ج جم ب جم ج جم ۲ ا

استحالہ کے اِس طریقے کی توسیع عمل میں آسکتی ہے اگر ہم ن واں مثلث پائیں
لیں جس کے ضلع ہیں

(−۱)$^{ن-۱}$ ا جم ا جم ۲ ا جم ۴ ا .... جم ۲$^{ن-۱}$ ا،

(−۱)$^{ن-۱}$ ب جم ب جم ۲ ب جم ۴ ب .... جم ۲$^{ن-۱}$ ب،

(−۱)$^{ن-۱}$ ج جم ج جم ۲ ج جم ۴ ج .... جم ۲$^{ن-۱}$ ج،

اور جس کے زاویے

(203)

$\frac{1}{۳}$(۲^{ن} + ۱) π − ۲^{ن} ا، $\frac{1}{۳}$(۲^{ن} + ۱) π − ۲^{ن} ب، $\frac{1}{۳}$(۲^{ن} + ۱) π − ۲^{ن} ج

ہیں اگر ن طاق ہے، لیکن

− $\frac{1}{۳}$(۲^{ن} − ۱) π + ۲^{ن} ا، − $\frac{1}{۳}$(۲^{ن} − ۱) π + ۲^{ن} ب، − $\frac{1}{۳}$(۲^{ن} − ۱) π + ۲^{ن} ج

ہیں اگر ن جفت ہے۔
پس مثلث کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان کسی رشتہ

ہیں ہم ... ... بجائے

ن-۱ ... جم ۱ جم ۲ ۱ . . . جم ۲ ن-۱ ۱

... زاویہ ۱ کی ... ۱/۲ (۲ن + ۱) π - ۲ن ۱ یا ۲ن ۱ - ... (...) π

لکھ سکتے ہیں (بوجب اس کے کہ ن طاق ہو یا جفت) مع دیگر ضلعوں اور زاویوں کی بجائے ... کے تناظر جملوں کے۔

۱۶۳ ـــــــ مثلث کے زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام کے درمیان کسی عام رشتہ میں زاویوں ۱، ب، ج کی بجائے علی الترتیب پ ۱ + ق ب + رج، ق ۱ + رب + پ ج، ر ۱ + پ ب + ق ج لکھا جا سکتا ہے جہاں پ، ق، ر کوئی عدد ہیں ایسے کہ پ + ق + ر کی شکل ۲ن - ۱ ہے یا ۲ن + ۱ اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے: لیکن یہ استحالہ عمل میں آسکتا ہے بشرطیکہ تمام جیوب کی علامتیں بدل دیجائیں جبکہ پ + ق + ر کی شکل ۲ن - ۱ ہو اور تمام جیوب التمام کی علامتیں بدل دیجائیں جبکہ پ + ق + ر کی شکل ۲ن + ۲ ہو۔

یہ مسئلہ ان واقعات سے مستنبط ہوتا ہے کہ پہلی صورت میں زاویوں

۲ن π - (پ ۱ + ق ب + رج)، ۲ن π - (ق ۱ + رب + پ ج)

۲ن π - (ر ۱ + پ ب + ق ج)

کا مجموعہ π ہے اور دوسری صورت میں زاویوں

(۲ن + ۱) π - (پ ۱ + ق ب + رج)، (۲ن + ۱) π - (ق ۱ + رب + پ ج)، (۲ن + ۱) π - (ر ۱ + پ ب + ق ج) کا مجموعہ π ہے

ذو اربعۃ الاضلاع کے خواص

۱۶۴ ـــــــ فرض کرو کہ ۱ ب ج د ایک محدب ذو اربعۃ الاضلاع

(204)

ہے۔ ضلعوں اب، ب ج، ج د، د ا کو علی الترتیب ا، ب، ج، د سے اور وتروں ا ج، ب د کو علی الترتیب لا، ما سے تعبیر کرو، نیز فرض کرو کہ ا + ج = ۲عہ اور فہ = وتروں کا درمیانی زاویہ ۔

ہم ذوارِبعۃ الاضلاع کے رقبہ س کے لیے ایک جملہ، ا، ب، ج، د اور عہ کی رقوم میں معلوم کرینگے ۔ چونکہ

$$\text{ما}^2 = \text{ا}^2 + \text{د}^2 - 2\,\text{ا د جم ا} = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - 2\,\text{ب ج جم ج}،$$

اس لیے
$$\text{ا د جم ا} - \text{ب ج جم ج} = \tfrac{1}{2}(\text{ا}^2 + \text{د}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2)$$

نیز
$$\text{ا د جب ا} + \text{ب ج جب ج} = 2\,\text{س}$$

اِن مساواتوں کی تناظر طرفوں کا مربع لو اور جمع کرو تو

$$\text{ا}^2\text{د}^2 + \text{ب}^2\text{ج}^2 - 2\,\text{ا ب ج د جم}\,2\text{عہ} = 4\,\text{س}^2 + \tfrac{1}{4}(\text{ا}^2 + \text{د}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2)^2$$

پس
$$16\,\text{س}^2 = 4(\text{ا د} + \text{ب ج})^2 - (\text{ا}^2 + \text{د}^2 - \text{ب}^2 - \text{ج}^2)^2 - 16\,\text{ا ب ج د جم}^2\,\text{عہ}،$$

یا
$$16\,\text{س}^2 = \{(\text{ا} + \text{د})^2 - (\text{ب} - \text{ج})^2\}\{(\text{ب} + \text{ج})^2 - (\text{ا} - \text{د})^2\} - 16\,\text{ا ب ج د جم}^2\,\text{عہ}،$$

اس لیے
$$\text{س}^2 = (\text{س} - \text{ا})(\text{س} - \text{ب})(\text{س} - \text{ج})(\text{س} - \text{د}) - \text{ا ب ج د جم}^2\,\text{عہ}، \quad \ldots\ldots(19)$$

جہاں
$$2\,\text{س} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}$$

اُس ذوارِبعۃ الاضلاع کی صورت میں جس کے گرد ایک دائرہ

اس لیے $$\text{۲ لا ما جم فہ} = \text{ب}^{۲} + \text{د}^{۲} - \text{ا}^{۲} - \text{ج}^{۲} \quad . \quad . \quad . \quad (۲۲)$$

(205)

اس لیے $$\text{س} = \frac{۱}{۴}(\text{ب}^{۲} + \text{د}^{۲} - \text{ا}^{۲} - \text{ج}^{۲})\,\text{مس فہ}، \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۲۳)$$

اور فہ کو ساقط کرنے سے ہمیں بریٹشنی ڈر (Bretschneider) کا ضابطہ

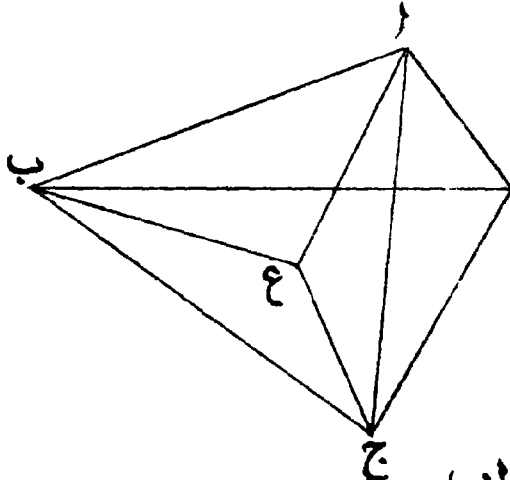
$$\text{س} = \frac{۱}{۴}\left\{۴\,\text{لا}^{۲}\,\text{ما}^{۲} - (\text{ب}^{۲} + \text{د}^{۲} - \text{ا}^{۲} - \text{ج}^{۲})^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}، \quad . \quad . \quad . \quad (۲۴)$$

حاصل ہوتا ہے جو ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ کو ضلعوں اور وتروں کی رقوم میں بیان کرتا ہے۔

اگر ذو اربعۃ الاضلاع میں ایک دائرہ بنایا جاسکے تو ا + ج = ب + د، اس لیے ضابطے (۲۳) اور (۲۴) ہو جاتے ہیں

$$\text{س} = \frac{۱}{۲}(\text{ا ج} - \text{ب د})\,\text{مس فہ}،$$

اور $$\text{س} = \frac{۱}{۲}\left[\text{لا}^{۲}\,\text{ما}^{۲} - (\text{ا ج} - \text{ب د})^{۲}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۶۶ — ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے حاصل ضرب کے لئے ایک جملہ، ضلعوں اور دو متقابلہ زاویوں کے حاصل جمع کی جیب التمام کی رقوم میں معلوم کیا جاسکتا ہے۔

ب اور ج سے خطوط مستقیم ب ع اور ج ع کھینچو ایسے کہ زاویے ج ب ع، ب ج ع علی الترتیب زاویوں ا ب د، ا د ب کے مساوی ہوں۔ مثلث ع ج ب، ا ب د متشابہ ہیں، اس لئے

$$\frac{\text{ا د}}{\text{ج ع}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ع}}$$

اس طرح　ا د × ج ب = ب د × ج ع

نیز چونکہ زاویے ج ب د، ا ب ع مساوی ہیں اور

ا ب : ب ع = ب د : ب ج

اس لیے مثلث ا ب ع، ج ب د متشابہ ہیں اور اس لیے

ا ب × ج د = ب د × ا ع

اب چونکہ ا ج^2 = ا ع^2 + ع ج^2 − ۲ ا ع × ع ج جم (ا + ج)

اس لیے ب د^2 سے ضرب دینے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لا^2 ما^2 = ا^2 ج^2 + ب^2 د^2 − ۲ ا ب ج د جم ۲ ع، . . . (۲۵)

اگر ۲ ع = π تو ٹولمی کا مسئلہ لا ما = ا ج + ب د حاصل ہوتا ہے جو ایسے ذوار بعۃ الاضلاع کے لیے صحیح ہے جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے۔

اگر ۲ ع = $\frac{1}{2}\pi$ تو لا^2 ما^2 = ا^2 ج^2 + ب^2 د^2 جو ایسے ذوار بعۃ الاضلاع کے لیے صحیح ہے جس میں دو متقابلہ زاویوں کا حاصل جمع ایک زاویہ قائمہ ہو۔

۱۶۷ — اس ذوار بعۃ الاضلاع کی صورت میں جو ایک دائرہ کے اندر کھینچا جا سکے وتروں لا، ما کے اور اس تیسرے وتر کے طولوں کو جو ضلعوں ا اور ج کے نقطہ تقاطع کو ضلعوں ب اور د کے نقطہ تقاطع سے ملانے سے بنتا ہے ضلعوں کی رقوم میں معلوم کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ تیسرا وتر ف گ ہے اور ا ج، ب د، ف گ کے طول علی الترتیب لا، ما، ی سے تعبیر ہوتے

ہیں۔ تب چونکہ

$$لا^۲ = ا^۲ + ب^۲ - ۲ ا ب \text{ جم } ب،$$

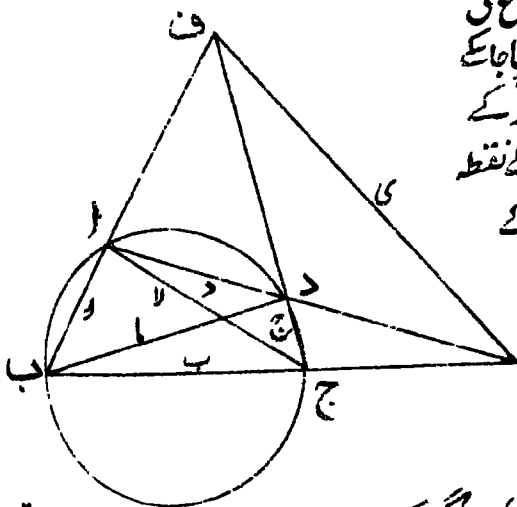
اور

$$لا^۲ = ج^۲ + د^۲ - ۲ ج د \text{ جم } د،$$

اس لیے

$$لا^۲ \left(\frac{۱}{ا ب} + \frac{۱}{ج د} \right) = \frac{ا^۲ + ب^۲}{ا ب} + \frac{ج^۲ + د^۲}{ج د}$$

پس

$$لا^۲ = (ا ج + ب د)(ا د + ب ج) \Big/ (ا ب + ج د)،$$

(۲۶) ....

اور اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$ما^۲ = (ا ج + ب د)(ا ب + ج د) \Big/ (ا د + ب ج)،$$

نیز چونکہ

(207)

$$ف ا = ا د \frac{\text{جب } د}{\text{جب } (ا + د)} = \frac{د لا}{ما \text{ جم } د + لا \text{ جم } ا}$$

اور اسی طرح

$$ف ب = \frac{ب ما}{ما \text{ جم } د + لا \text{ جم } ا}$$

اس لیے

$$\frac{ف ا}{دلا} = \frac{ف ب}{ب ما} = \frac{ف ب - ف ا}{ب ما - دلا} = \frac{ا}{ب ما - دلا}$$

پس

$$ف ا \times ف ب = \frac{ا^۲ ب د لا ما}{(ب ما - د لا)^۲}؛$$

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے

$$گ ج \times گ ب = \frac{ب^۲ ا ج لا ما}{(ا ما - ج لا)^۲}$$

اب چونکہ ف گ پر کا مربع، ف اور گ سے دائرہ تک کھینچے ہوئے مماسوں پر کے مربعوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دیکھو Mc Dowell's *Geometry* صفحہ ۹۲)، اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ی^۲ = لا ما \left\{ \frac{ا^۲ ب د}{(ب ما - د لا)^۲} + \frac{ب^۲ ا ج}{(ا ما - ج لا)^۲} \right\}$$

اب $لا^۲$ اور $ا^۲$ کی اُن قیمتوں سے جو اوپر حاصل ہو چکی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{لا}{اد + بج} = \frac{ا}{اب + جد} = \frac{ب\,ا - د\,لا}{ا(ب^۲ - د^۲)} = \frac{ا\,ا - ج\,لا}{ب(ا^۲ - ج^۲)}$$

اس لیے $ی^۲$ کے مندرجہ بالا جملہ میں اندراج کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ی^۲ = (اد + بج)(اب + جد)\left\{\frac{بد}{(ب^۲ - د^۲)^۲} + \frac{اج}{(ا^۲ - ج^۲)^۲}\right\} \ldots (۲۷)$$

مثالیں

(۱) اگر ذوارابعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{۱}{۴}\left\{\frac{(اب + جد)(اج + بد)(اد + بج)}{(س - ا)(س - ب)(س - ج)(س - د)}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

(۲) ثابت کرو کہ نصف قطر ر کے دائرہ کے مرکز اور اس دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ایک ذوارابعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقطۂ تقاطع کے درمیان فاصلہ ہے

$$\frac{ر}{(اب + جد)(اد + بج)}\left[(اج + بد)\left\{اج(ب^۲ - د^۲)^۲ + بد(ا^۲ - ج^۲)^۲\right\}\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

(۳) ثابت کرو کہ ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذوارابعۃ الاضلاع کے وتر ایک دوسرے سے ذیل کے زاویہ پر ملتے ہیں

$$جم^{-۱}\frac{(ا^۲ + ج^۲) \sim (ب^۲ + د^۲)}{۲(اج + بد)} \quad یا \quad ۲\,مس^{-۱}\left\{\frac{(س - ب)(س - د)}{(س - ا)(س - ج)}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

اور نیز ثابت کرو کہ ایک وتر کے مقطوعوں کا حاصل ضرب ہے

$$\frac{اب\,جد\,(اج + بد)}{(اب + جد)(اد + بج)}$$

(۴) اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع ایک دائرہ میں کھینچا جائے اور اس کا رقبہ س ہو تو ثابت کرو کہ متقابلہ ضلعوں کے نقاط وسطی کو ملانے والے خطوط مستقیم زاویہ

$$\text{مس}^{-1}\left\{\frac{۴\,س}{(ب^2 - د^2)(ا^2 - ج^2)} \times \frac{(ا د + ب ج)(ا ب + ج د)}{ا ج + ب د}\right\}$$

پر ملتے ہیں۔

(208)

(۵) اگر ایک دائرہ میں کھینچے ہوئے ذو اربعۃ الاضلاع کے تین وتروں میں سے دو دو کے نقاط تقاطع ع، ف، گ ہوں تو ثابت کرو کہ مثلث ع ف گ کے رقبہ کو ذو اربعۃ الاضلاع کے رقبہ سے نسبت ہے

$$ا^2 ب^2 ج^2 د^2 : (ا^2 ب^2 - ج^2 د^2)(ا^2 د^2 - ب^2 ج^2)$$

(۶) ثابت کرو کہ ایک ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے اندر ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہے $\sqrt{ا ب ج د}\ \text{جیب}\ \frac{1}{2}(ا + ج)$ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ $\sqrt{ا د}\ \text{جیب}\ \frac{1}{2} ا = \sqrt{ب ج}\ \text{جیب}\ \frac{1}{2} ج$

(۷) اگر چار خطوط مستقیم دیئے جائیں تو اِن سے تین جداگانہ ذو اربعۃ الاضلاع بنائے جا سکتے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک دائرہ میں کھینچا جا سکتا ہے؛ ان کے رقبے مساوی ہوتے ہیں؛ اِن کے وہ چھ وتر جو دائرہ کے اندر متقاطع ہوتے ہیں زوج زوج مساوی ہوتے ہیں؛ اور اگر اِن خطوں کے طول عہ، بہ، جہ ہوں اور مشترک رقبہ س اور دائرہ کا نصف قطر ر ہو تو ثابت کرو کہ

$$ر = \frac{عہ\ بہ\ جہ}{۴\ س}$$

(۸) دو مثلثوں کے رقبوں کا فرق جن کے قاعدے ایک ذو اربعۃ الاضلاع کے ضلع ب، د ہیں اور جن کے راس ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے نقطۂ تقاطع پر منطبق ہوتے ہیں حسب ذیل ہوگا

$$\frac{1}{4}\sqrt{۴ ا^2 ج^2 - (ا^2 + ج^2 - ب^2 - د^2)^2}$$

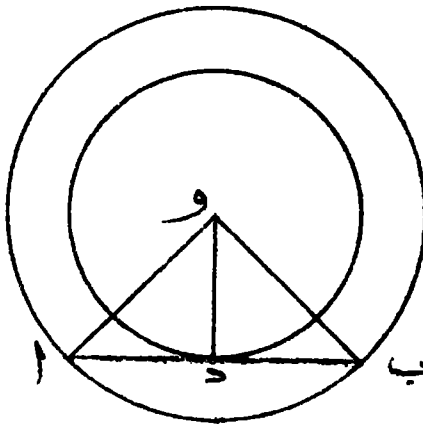
(۹) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع ایسا ہو کہ وہ سب مستطیل جو اس کے گرد کھینچے جا سکتے ہیں تشابہ ہیں تو ثابت کرو کہ $ا^2 + ج^2 = ب^2 + د^2$

(۱۰) ایک ذواربعۃ الاضلاع ایسا ہے کہ ایک دائرہ اس کے گرد کھینچا جا سکتا ہے اور دوسرا اس کے اندر؛ ثابت کرو کہ اس دوسرے دائرہ کا نصف قطر $\frac{2\sqrt{ا ب ج د}}{ا + ب + ج + د}$ ہے۔

(۱۱) اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع کے وتر نقطہ ۹ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ

رقبہ ا و ب × رقبہ ا ب ج د = رقبہ ا ب ج × رقبہ ا ب د

منتظم کثیر الاضلاعوں کے خواص

۱۶۸ ـــــ فرض کرو کہ و، اُن دائروں کا مرکز ہے جو ن ضلعوں والے ایک منتظم کثیر الاضلاع کے گرد اور اس کے اندر کھینچے گئے ہیں۔ فرض کرو کہ قبل الذکر دائرہ کا نصف قطر ر ہے اور مابعد الذکر دائرہ کا نصف قطر ر، اور فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کا طول ا ہے۔

(209) اگر کثیر الاضلاع کا ایک ضلع اب ہو اور اندرونی دائرہ کے ساتھ اس کا نقطہ تماس د ہو تو زاویہ ادب = $\frac{\pi 2}{ن}$ اور زاویہ اود = $\frac{\pi}{ن}$ پس

$$ل = ۲ ر جب \frac{\pi}{ن} = ۲ ر س \frac{\pi}{ن} \quad .... (۲۸)$$

اس طرح دائروں کے نصف قطر معلوم ہو جاتے ہیں اگر ایک ضلع ل دیا گیا ہو۔ مثلث واب کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} ر^2 جب \frac{\pi 2}{ن} ، یا \frac{1}{2} ل ر ، یا ر^2 س \frac{\pi}{ن}$$

اس لیے کثیر الاضلاع کا رقبہ

$$\frac{1}{2} ن ر^2 جب \frac{\pi 2}{ن} ، یا ن ر^2 س \frac{\pi}{ن} ، \quad ... (۲۹)$$

یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ ایک دائرہ کے اندر یا گرد ن ضلعوں والے منتظم کثیر الاضلاع کے کھینچنے کا سوال زاویہ $\frac{\pi}{ن}$ کے دائری تفاعلوں کی تعیین کے سوال میں تحویل ہوتا ہے۔

۱۶۹ ——— مثالیں

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج کو قطر مانکر دائرے کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا قطر ق جو اِن تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے ایسا ہے کہ

$$\sqrt{\frac{ق}{س-ا} - 1} + \sqrt{\frac{ق}{س-ب} - 1} + \sqrt{\frac{ق}{س-ج} - 1} = \sqrt{\frac{س}{ق-س}}$$

اگر دیئے ہوئے مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں اور اُس دائرہ کا مرکز و ہو جس کا قطر ق ہے تو

$$\text{ود} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ا})،\ \text{وع} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ب})،\ \text{وف} = \frac{1}{2}(\text{ق} - \text{ج})$$

نیز مثلث دع ف کے ضلع $\frac{1}{2}$ ا، $\frac{1}{2}$ ب، $\frac{1}{2}$ ج ہیں، پس رشتہ

$$\triangle \text{وع ف} + \triangle \text{و ف د} + \triangle \text{و د ع} = \triangle \text{د ع ف}$$

میں مثلثوں کے رقبوں کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کرنے سے مطلوبہ رشتہ حاصل ہو جاتا ہے۔

(۲) ایک نقطہ پ سے مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر عمود پ ل، پ م، پ ن کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ل م ن کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}(\text{ر}^2 - \text{ف}^2) \cdot \text{جب ا جب ب جب ج}$$

جس میں ف سے وہ فاصلہ مُراد ہے جو پ اور حائط دائرہ کے مرکز کے درمیان ہے۔

و پ کو خارج کرو تا کہ وہ حائط دائرہ سے نقطہ پَ پر ملے، پَ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود پَ لَ، پَ مَ، پَ نَ کھینچو تو اِن کے پایٔں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جس کو اس مثلث کے لحاظ سے پَ کا خطِ پایٔں کہتے ہیں۔ ایک نقطہ سے ایک مثلث کے ضلع پر جو عمود کھینچا جائے وہ مثبت شمار ہوتا ہے اگر نقطہ اسی جانب واقع ہو جس جانب ضلع کے مقابل کا زاویہ واقع ہے اور منفی شمار ہوتا ہے اگر نقطہ مذکورہ بالا جانب کے مقابل واقع ہو۔

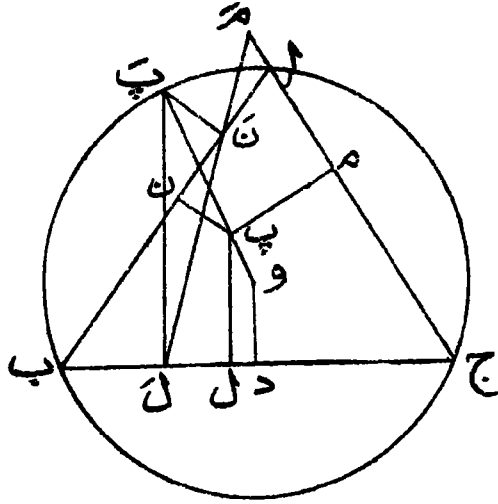
اب ہمیں حاصل ہوتا ہے $\quad \dfrac{\text{پ ل} - \text{ود}}{\text{پَ لَ} - \text{ود}} = \dfrac{\text{و پ}}{\text{و پَ}} = \dfrac{\text{ف}}{\text{ر}}$ (210)

$$\text{اس لیے}\quad \text{پ ل} = (\text{ر} - \text{ف})\,\text{جم ا} + \frac{\text{ف}}{\text{ر}}\,\text{پَ لَ}$$

اسی طرح پ م، پ ن کے لیے متشابہ جملے ملتے ہیں۔ اب

$$2\triangle \text{ل م ن} = \text{پ م} \times \text{پ ن جب ا} + \text{پ ن} \times \text{پ ل جب ب} + \text{پ ل} \times \text{پ م جب ج}$$

= (ر - ف)² Σ جب ا جم ب جم ج + ف²/ر² Σ پَ مَ × پَ نَ جب ا

+ ف/ر (ر - ف) Σ پَ لَ جب ا

نیز ½ Σ پَ مَ × پَ نَ جب ا، مثلث لَ مَ نَ کا رقبہ ہے، جو صفر ہے اور

Σ پَ لَ جب ا = ١/٢ر Σ ر × پَ لَ = ١/ر Σ ۵ پَ ب ج = ١/ر ۵ ا ب ج

اور Σ جب ا جم ب جم ج = جب ا جب ب جب ج

پس ۵ ۲ ل م ن = (ر - ف)² جب ا جب ب جب ج + ۲ف(ر - ف) جب ا × جب ب جب ج = (ر² - ف²) جب ا جب ب جب ج

(۳) اگر ا، ب، ج کوئی تین ثابت نقطے ہوں اور پ کوئی نقطہ ایک دائرہ پر ہو جس کا مرکز و ہے تو ثابت کرو کہ اِس دائرہ پر پ کے تمام مقامات کے لیے

اپ² × ۵ ب و ج + ب پ² × ۵ ج و ا + ج پ² × ۵ ا و ب

مستقل ہے۔

زاویوں ب وج، ج وا، اوب کو ہ، ب، ج سے تعبیر کرو تو ہ + ب + ج = ۲π، فرض کرو کہ زاویہ پ وا = ط - اب چونکہ

اپ² = وپ² + وا² - ۲ وا × وپ جم ط

مع ب پ²، ج پ² کے لیے متشابہ جملوں کے، اس لیے مندرجہ بالا جملہ

= وپ² × Δ اب ج + Σ وا² × Δ ب وج - ۲ وپ Σ وا × Δ ب وج جم ط

(211) اس جملہ کی پہلی دو رقمیں، دائرہ پر پ کے محل پر منحصر نہیں ہیں اور آخری رقم میں ۲وپ کا جز

½ وا × وب × وج {جم ط جب ہ + جم (ط + ج) جب ب + جم (ب - ط) جب ج}

یا ½ وا × وب × وج جم ط (جب ہ + جب ب جم ج + جم ب جب ج)

اور یہ جملہ صفر ہے؛ اس لیے مسئلہ ثابت ہو چکا۔

اس مسئلہ کی مخصوص صورتیں حسب ذیل ہیں: —

(ا) پ ا² جب ۲ا + پ ب² جب ۲ب + پ ج² جب ۲ج مستقل ہے جبکہ پ، حائط دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

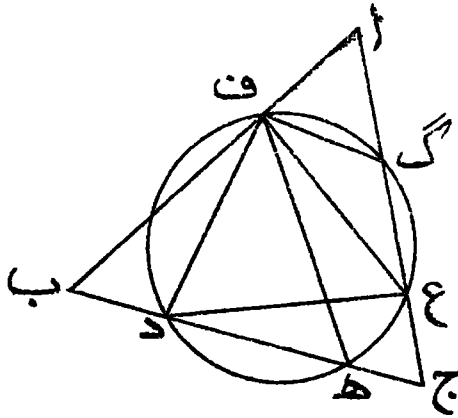
(ب) پ ا² جب ا + پ ب² جب ب + پ ج² جب ج مستقل ہے جبکہ پ، اندرونی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(ج) پ ا² جب ا جم (ب - ج) + پ ب² جب ب جم (ج - ا) + پ ج² جب ج جم (ا - ب) مستقل ہے جبکہ پ، نو نقطی دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اس اقل تساوی الاضلاع مثلث کے ضلع کا طول

$$\frac{۲ Δ \sqrt{۲}}{\sqrt{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ۴ \sqrt{۳}\, Δ}}$$

ہے جو ایک دیے ہوئے مثلث ا ب ج کے اندر کھینچا جا سکے اس طور پر کہ اس کے راس دیے ہوئے مثلث کے ضلعوں پر واقع ہوں، جملہ بالا میں ∆ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مُراد ہے۔

فرض کرو کہ ایسا متساوی الاضلاع مثلث د ع ف ہے اور فرض کرو کہ د ع ف کا حائط دائرہ ب ج اور ا ج کو علی الترتیب ھ اور گ میں قطع کرتا ہے، زاویوں ف گ ا، ف ھ ب میں سے ہر ایک ۶۰° ہے، اور اس لیے ف گ، ف ھ ثابت سمتوں میں ہیں؛ نیز زاویہ ھ ف گ = ۱۲۰° - ج

اگر ا ف کو لا سے تعبیر کریں تو

$$ف گ = \frac{لا \ جب \ ا}{جب \ ۶۰}، \quad ف ھ = (ج - لا) \frac{جب \ ب}{جب \ ۶۰}$$

$$اس لیے \quad ھ گ^۲ = قم^۲ ۶۰ \{ لا^۲ جب^۲ ا + (ج - لا)^۲ جب^۲ ب - ۲ لا (ج - لا)$$

$$\times جب \ ا \ جب \ ب \ جم (۱۲۰ - ج) \}$$

اب دائرہ کا نصف قطر ہے ھ گ \ ۲ جب (۱۲۰° − ج) پس دائرہ اقل ہوگا جبکہ ھ گ اقل ہو۔ اب کسی دو درجی جملہ $\text{ل} \, \text{لا}^{2} + 2 \, \text{م} \, \text{لا} + \text{ن}$ کی اقل قیمت $\text{ن} - \frac{\text{م}^{2}}{\text{ل}}$ ہے (جہاں ل مثبت ہے) کیونکہ $\text{ل} \, \text{لا}^{2} + 2 \, \text{م} \, \text{لا} + \text{ن}$ اس شکل $\text{ل} \left(\text{لا} + \frac{\text{م}}{\text{ل}}\right)^{2} + \text{ن} - \frac{\text{م}^{2}}{\text{ل}}$ میں لکھا جاسکتا ہے۔ اس لیے ھ گ جب ۶۰° کی اقل قیمت کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

(212)

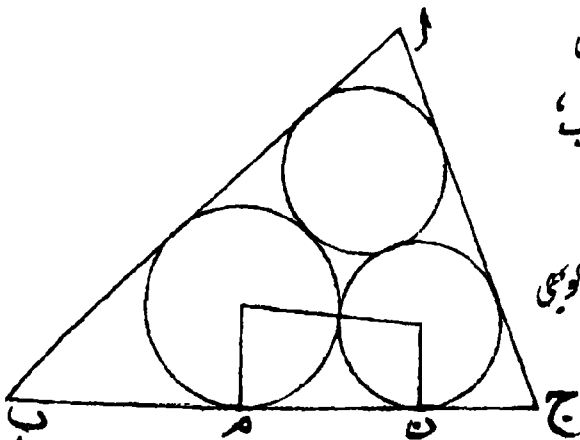
$$\frac{1}{2}\left[\text{ج}^{2} \, \text{جب}^{2} \, \text{ب} - \frac{\{\text{ج جب}^{2} \, \text{ب} + \text{ج جب ا جب ب جم} \, (120^\circ - \text{ج})\}^{2}}{\text{جب}^{2} \, \text{ا} + \text{جب}^{2} \, \text{ب} + 2 \, \text{جب ا جب ب جم} \, (120^\circ - \text{ج})}\right]$$

$$= \frac{\text{ج جب ا جب ب جب} \, (120^\circ - \text{ج})}{\{\text{جب}^{2} \, \text{ا} + \text{جب}^{2} \, \text{ب} + 2 \, \text{جب ا جب ب جم} \, (120^\circ - \text{ج})\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \, \text{ج}^{2} \, \text{جب ا جب ب جب} \, (120^\circ - \text{ج})}{\text{جب ج} \sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{ج}^{2} + 4\sqrt{3} \, \Delta}}$$

اب مساوی الاضلاع کا ضلع ہے ھ گ جب ۶۰° \ جب (۱۲۰° − ج) پس اس ضلع کی اقل قیمت ہے

$$\frac{2 \, \Delta \sqrt{2}}{\sqrt{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{ج}^{2} + 4\sqrt{3} \, \Delta}}$$

(۵) تین دائرے بناؤ جو باہم مس کریں اور ان میں سے ہر ایک ایک دیے ہوئے مثلث کے دو ضلعوں کو بھی مس کرے۔

فرض کرو کہ دائروں کے نصف قطر غ_1، غ_2، غ_3 ہیں، تب $\text{م ن} = 2\sqrt{\text{غ}_2 \text{غ}_3}$

اس لیے $\text{ل} = \text{ب م} + \text{ج ن} + \text{م ن} = \text{غ}_2 \,\text{مم}\, \tfrac{1}{2}\text{ب} + \text{غ}_3 \,\text{مم}\, \tfrac{1}{2}\text{ج} + 2\sqrt{\text{غ}_2 \text{غ}_3}$

مع ب اور ج کے لیے متشابہ جملوں کے۔

فرض کرو $\text{لا}^2 = \text{غ}_1 \,\text{مم}\, \tfrac{1}{2}\text{ا}$، $\text{ما}^2 = \text{غ}_2 \,\text{مم}\, \tfrac{1}{2}\text{ب}$، $\text{ی}^2 = \text{غ}_3 \,\text{مم}\, \tfrac{1}{2}\text{ج}$،

$\sqrt{\text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ج}} = -\text{جم عہ}$، $\sqrt{\text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ج}\ \text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ا}} = -\text{جم بہ}$، $\sqrt{\text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ا}\ \text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ب}} = -\text{جم جہ}$

تو $\text{جب}^2 \text{عہ} = 1 - \text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ج} = \frac{\text{ل}}{\text{س}}$، اور اسی طرح $\text{جب}^2 \text{بہ} = \frac{\text{ب}}{\text{س}}$، $\text{جب}^2 \text{جہ} = \frac{\text{ج}}{\text{س}}$

اس لیے ہمیں مساواتیں ملتی ہیں

$$\frac{\text{ما}^2 + \text{ی}^2 - 2\,\text{ما ی جم عہ}}{\text{جب}^2 \text{عہ}} = \frac{\text{ی}^2 + \text{لا}^2 - 2\,\text{ی لا جم بہ}}{\text{جب}^2 \text{بہ}} = \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\,\text{لا ما جم جہ}}{\text{جب}^2 \text{جہ}} = \text{س}$$

(213) یہ مساواتیں دفعہ ۶۸ مثال (۱۲) میں زیر بحث آچکی ہیں؛ اس میں جو پہلا حل حاصل ہوا تھا اس کے لینے سے

$\text{لا} = \sqrt{\text{س}}\ \text{جم}\,(\text{شہ} - \text{عہ})$، $\text{ما} = \sqrt{\text{س}}\ \text{جم}\,(\text{شہ} - \text{بہ})$، $\text{ی} = \sqrt{\text{س}}\ \text{جم}\,(\text{شہ} - \text{جہ})$

جہاں $2\,\text{شہ} = \text{عہ} + \text{بہ} + \text{جہ}$۔ اس لیے $\text{غ}_1 = \text{س مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ا}\ \text{جم}^2 (\text{شہ} - \text{عہ})$،

$\text{غ}_2 = \text{س مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}^2 (\text{شہ} - \text{بہ})$، $\text{غ}_3 = \text{س مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ج}\ \text{جم}^2 (\text{شہ} - \text{جہ})$

دائروں کے مطلوبہ نصف قطر ہیں۔ محولہ بالا مثال کے دوسرے حلوں سے دائروں کے تین جٹوں کے نصف قطر ملتے ہیں، یہ دائرے ایسے ہیں کہ ہر جٹ میں سے دو دائرے مثلث کے دو محدودہ ضلعوں کو مس کرتے ہیں؛ ایک ایسے ہی جٹ کے نصف قطر ہیں

$\text{س مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ا}\ \text{جم}^2 \text{س}$، $\text{س مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ب}\ \text{جم}^2 (\text{س} - \text{جہ})$، $\text{س مس}\, \tfrac{1}{2}\text{ج}\ \text{جم}^2 (\text{س} - \text{بہ})$

پس دائروں کے کل آٹھ جٹ ہیں جو دیے ہوئے مسئلہ کی شرطوں کو پورا کرتے ہیں۔

متناسب ہوں تو ثابت کرو کہ اِن فاصلوں کے درمیانی زاویے ہونگے

$$\frac{1}{3}\pi+\text{ا}\text{، }\frac{1}{3}\pi+\text{ب}\text{، }\frac{1}{3}\pi+\text{ج}$$

۱۱ - اُن چار دائروں میں سے جو ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرتے ہیں ہر ایک دائرہ کے نقاط تماس ملائے گئے ہیں ؛ اندرونی دائرہ سے اس طور پر جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ اُن مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ سے تفریق کیا گیا ہے جو جانبی دائروں سے مذکور الصدر طریقہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل تفریق اصلی مثلث کے رقبہ کا دُگنا ہے ۔

۱۲ - اگر ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہو اور اُس کے اندر کوئی نقطہ پ تو ثابت کرو کہ

$$\triangle\,\text{اپج}\times\text{مم اپج}-\triangle\,\text{بپد}\times\text{مم بپد}$$

پ کے محل پر منحصر نہیں ہے ۔

۱۳ - تین دائروں کو جو ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں ایک چوتھا دائرہ مس کرتا ہے جس کے اندر یہ سب دائرے ہیں۔ اگر اندرونی تین دائروں کے نصف قطر ا، ب، ج ہوں اور اِن کے مرکزوں کے فاصلے بیرونی دائرہ کے مرکز سے علی الترتیب عہ، بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$2\left(\frac{\text{بہ جہ}}{\text{ب ج}}+\frac{\text{جہ عہ}}{\text{ج ا}}+\frac{\text{عہ بہ}}{\text{ا ب}}\right)=4+\frac{\text{عہ}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{بہ}^2}{\text{ب}^2}+\frac{\text{جہ}^2}{\text{ج}^2}$$

۱۴ - ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب میں علی الترتیب نقطے پ، ق، ر ہیں ایسے کہ $\frac{\text{ب پ}}{\text{پ ج}}=\frac{\text{ج ق}}{\text{ق ا}}=\frac{\text{ا ر}}{\text{ر ب}}$؛ ثابت کرو کہ $\text{ا پ}^2+\text{ب ق}^2+\text{ج ر}^2$ اقل ہوگا جبکہ پ، ق، ر، ضلعوں کی تنصیف کریں ۔

۱۵ - ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب، ج پر مثلث کے بیرونی جانب قطاع دائرے کھینچے گئے ہیں جن کے اندر علی الترتیب زاویے عہ، بہ، جہ بنتے ہیں، اور عہ + بہ + جہ $=\pi$، ان دائروں کے مرکزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اس مثلث کے زاویے ۶۰، ۹۰، ۳۰ ہیں۔

(215) ۱۶۔ ایک مثلث کے ضلعوں کے نقاط وسطی سے مقابل کے زاویوں کے ناصفوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کا رقبہ اُس مستطیل کے رقبہ کا چوتھائی ہے جس کے متصلہ اضلاع قبل الذکر مثلث کا گھیرا اور اس کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہیں۔

۱۷۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں ایک نقطہ پ ہے اور اس نقطہ سے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائین ل، م، ن ہیں۔ اگر م ن + ن ل + ل م مستقل ہو اور ل کے مساوی ہو تو

ثابت کرو کہ پ ا^2 + پ ب^2 + پ ج^2 کی اقل قیمت ہے

$$\frac{ل^2}{\text{جب}^2 ا + \text{جب}^2 ب + \text{جب}^2 ج}$$

۱۸۔ ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب کے متوازی علی الترتیب ر$_1$، ر$_2$، ر$_3$ فاصلوں پر خطوط مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کھینچے گئے ہیں۔ مثلث اَ بَ جَ کا رقبہ معلوم کرو۔

اگر ایسے آٹھ مثلث بنائے جائیں تو ان کے گھیروں کا اوسط مثلث ا ب ج کے گھیرے کے مساوی ہوتا ہے لیکن ان کے رقبوں کا اوسط مثلث ا ب ج کے رقبہ سے بقدر

$$\frac{ا^2 ر_1^2 + ب^2 ر_2^2 + ج^2 ر_3^2}{۴ \Delta}$$

کے بڑا ہوتا ہے۔

۱۹۔ ایک مختلف الاضلاع مثلث ا ب ج کے ضلعوں کو قاعدے مانکر متشابہ تساوی الساقین مثلث بنائے گئے ہیں ایسے کہ یا تو سب کے سب اندرونی جانب ہیں یا سب کے سب بیرونی جانب۔ ان تساوی الساقین مثلثوں کے راسوں کو ملاکر ایک نیا مثلث اَ بَ جَ بنایا گیا ہے۔ اگر اَ بَ جَ تساوی الاضلاع مثلث ہو تو ثابت کرو کہ تساوی الساقین مثلثوں کے

قاعدوں پرکے زاویوں میں سے ہر ایک ۳۰° ہے لیکن اگر اَ بَ جَ ' مثلث ا ب ج کے متشابہ ہو تو ان زاویوں میں سے ہر ایک مس$^{-1}$ $\frac{۴\Delta}{ا^۲ + ب^۲ + ج^۲}$ ہے جہاں Δ سے مثلث ا ب ج کا رقبہ مراد ہے۔

۲۰۔ ایک خطِ مستقیم تین ہم مرکز دائروں کو نقطوں ا، ب، ج پر قطع کرتا ہے اور ان کے مرکز سے فاصلہ ف پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو ا، ب، ج پر کے مماسوں سے بنتا ہے۔ $\frac{ب ج \times ج ا \times ا ب}{۲ ف}$ ہے۔

۲۱۔ اگر ایک مثلث ا ب ج کے نو نقطی دائرہ کا مرکز ن ہو اور ضلعوں کے نقاط وسطی د، ع، ف ہوں تو ثابت کرو کہ

ب ج جم ن د ج + ج ا جم ن ع ا + ا ب جم ن ف ب = ۰ ۔

۲۲۔ ایک مثلث کے ضلع ب ا پر ب د، ا ج کے مساوی ناپا گیا ہے۔ ب ج اور ا د کی تنصیف نقاط ع، ف سے کی گئی ہے اور ع اور ف کو ملایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ب ع ف کے حائط دائرہ کا نصف قطر $\frac{۱}{۴}$ ب ج × قم $\frac{۱}{۲}$ ا ہے۔

۲۳۔ اگر مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر اَ، بَ، جَ کوئی نقطے ہوں تو ثابت کرو کہ

ا بَ × ب جَ × ج اَ + بَ ج × جَ ا × اَ ب = ۴ م × Δ اَ بَ جَ

۲۴۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے فاصلے مثلث کے راسوں سے لا، ما، ی ہوں تو ثابت کرو کہ

ا^۲ لا^۴ + ب^۲ ما^۴ + ج^۲ ی^۴ + (ا + ب + ج)^۲ لا^۲ ما^۲ ی^۲ = ۲ (ب^۲ ج^۲ ما^۲ ی^۲ + ج^۲ ا^۲ ی^۲ لا^۲ + ا^۲ ب^۲ لا^۲ ما^۲)

۲۵۔ د، ع، ف وہ نقطے ہیں جہاں مثلث ا ب ج کے زاویوں کے

(216

ناصف مقابل کے ضلعوں سے ملتے ہیں؛ اگر لا، ا، ی وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث د ع ف کے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے گئے ہیں اور ع₁، ع₂، ع₃ وہ عمود ہوں جو ا، ب، ج سے مثلث اب ج کے مقابل کے ضلعوں پر کھینچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ع}_1^2}{\text{لا}^2} + \frac{\text{ع}_2^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ع}_3^2}{\text{ی}^2} = \text{۱۱} + \text{۸ جب } \tfrac{1}{2}\text{ا جب } \tfrac{1}{2}\text{ب جب } \tfrac{1}{2}\text{ج}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے مرکز عمودی کے فاصلے اس کے راسوں سے حسب ذیل مساوات کی اصلیں ہیں:۔

$$\text{لا}^3 - 2(\text{م} + \text{ر})\,\text{لا}^2 + (\text{ر}^2 - 4\text{م}^2 + \text{س}^2)\,\text{لا} - 2\text{م}\{\text{س}^2 - (\text{ر} + 2\text{م})^2\} = 0$$

۲۷۔ اگر ایک مثلث کا ہر ضلع اس کے گھیرے کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جو ۲ : ۵ سے کم ہے تو ایک مثلث بنایا جا سکتا ہے جس کے ضلع جانبی دائروں کے نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۲۸۔ ایک دائرہ کے اندر ایک مثلث اب ج بنایا گیا ہے اور ب ج کے نقطہ وسطی د سے ایک خط ب ج کے علی القوائم کھینچا گیا ہے جو دائرہ کے محیط سے ع اور ف پر ملتا ہے۔ اع اور اف کو ملایا گیا ہے اور اس طرح مثلث اع ف کو حاصل کیا گیا ہے۔ اسی طرح اب، اج کی تنصیف کرکے باقی اور دو مثلث بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے رقبے نسبت جب (ب-ج) : جب (ج-ا) : جب (ا-ب) میں ہیں۔

۲۹۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں؛ ثابت کرو کہ اُن دو دائروں کے نصف قطر جو اِن تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جا سکتے ہیں یہ ہیں

$$\frac{\text{ا ب ج}}{(\text{ب ج} + \text{ج ا} + \text{ا ب}) \pm 2\sqrt{\text{ا ب ج}\,(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})}}$$

۳۰۔ اب ج ایک مثلث ہے؛ اس کے بیرونی جانب اس کے ضلعوں پر مساوی الاضلاع مثلث اَب ج، بَ ج ا، جَ اب بنائے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ

(۱) ااَ، ب بَ، ج جَ ایک نقطہ و پر ملتے ہیں؛

(۲) و اَ = و بَ + و جَ؛

(۳) Δ اَ بَ جَ $= \frac{۵}{۲} \Delta$ اب ج $+ \frac{\sqrt{۳}}{۸}($ب ج$^۲ +$ ج ا$^۲ +$ اب$^۲)$

۳۱۔ ایک مثلث کے ضلعوں ا، ب کے وسطی نقطے اَ، بَ ہیں؛ ا، ب سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمودوں کے پائیں د، ع ہیں؛ اور اَد، بَع کی تنصیف نقطوں پ، ق سے ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{پ ق} = \frac{۱}{۴}\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲ - ۲\,\text{اب جم ۲ج}}$$

۳۲۔ ایک حادۃ الزاویہ مثلث کے راسوں سے مقابل کے ضلعوں پر کے عمود نقطہ پ پر ملتے ہیں اور ایک نیا مثلث ضلعوں پ ا، پ ب، پ ج کے ساتھ بنایا گیا ہے۔ وہ شرط معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو اور اگر یہ ممکن ہے اور اس نئے مثلث کے زاویے عہ، بہ، جہ ہیں تو ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{\text{جم عہ}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{جم بہ}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{جم جہ}}{\text{جم ج}} = \frac{۱}{۲}\,\text{قط ا قط ب قط ج}$$

۳۳۔ نصف قطر ر کے ایک دائرہ کے اندر جس کا مرکز ج ہے دو نقطے ا، ب لیے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان دائروں کے قطر جو ا، ب میں سے گذریں اور دیے ہوئے دائرہ کو مس کریں مساوات ذیل کی اصلیں ہیں:—

$$\text{لا}^۲(\text{ر}^۲\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲\text{ب}^۲\,\text{جب}^۲\text{ج}) - ۲\,\text{لا رج}^۲(\text{ر}^۲ - \text{اب جم ج}) + \text{ج}^۲(\text{ر}^۴ - ۲\text{ر}^۲\,\text{اب جم ج} + \text{ا}^۲\text{ب}^۲) = ۰$$

جہاں چھوٹے و بڑے حروف مثلث اب ج کے اجزا کو تعبیر کرتے ہیں۔

۳۴۔ اگر ایک مثلث کی کاغذ پر سے کاٹ کر علٰحدہ کر لیا جائے اور اس کو موڑ کر دوہرا کیا جائے اس طور پر کہ سلوٹ حائط دائرہ کے مرکز اور ایک راس ا

یں سے گذرے تو ثابت کرو کہ دُہرا کئے ہوئے حصہ کا رقبہ ہے

½ ب² جب² ج جم ج قم (۲ج - ب) قط (ج - ب)، جہاں ج > ب

۳۵ - ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین سے متصلہ ضلعوں پر عمود کھینچے گئے ہیں - ثابت کرو کہ ان چھ عمودوں کے پائین ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جس کا نصف قطر ہے

ر (جم² ا جم² ب جم² ج + جب² ا جب² ب جب² ج)^½

۳۶ - اگر پ ایک نقطہ ہو جہاں سے ایک مثلث ا ب ج کے تین جانبی دائروں کے مماس مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ پ کا فاصلہ ضلع ب ج سے حسب ذیل ہے -

½ (ب + ج) قط ½ ا جب ½ ب جب ½ ج

۳۷ - اگر لا، ما، ی اُن تین مربعوں کے ضلع ہوں، جو مثلث ا ب ج کے اندر اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کا ایک ایک ضلع بالترتیب مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر واقع ہے، تو ثابت کرو کہ　　۱/لا + ۱/ما + ۱/ی = ۱/ر + ۱/ب + ۱/ج + ۱/ا

۳۸ - مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود اَ اَ، ب بَ، ج جَ ہیں، مثلثوں ا بَ جَ، بَ ب جَ، اَ جَ اَ بَ کے مرکز عمودی د۱، د۲، د۳ ہیں، ثابت کرو کہ (۱) مثلثات د۱ د۲ د۳، اَ بَ جَ مساوی ہیں، (۲) ۲ ر ر۱ = ر ر۱ ر۲ ر۳ جہاں دائروں د۱ اَ، د۲ بَ، د۳ جَ کے نصف قطر ر۱، ر۲، ر۳ ہیں اور اُس دائرہ کا نصف قطر ر ہے جو اَ بَ جَ کے اندر کھینچا گیا ہے اور ر۱ اُس دائرہ کا جو اَ بَ جَ کے گرد کھینچا گیا ہے -

۳۹ - اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کے فاصلے اندرونی

دائرہ کے مرکز سے لا، ما، ی ہوں اور حائط دائرہ کا قطر ق ہو تو ثابت کرو کہ

لا ما ی + ق (لا² + ما² + ی²) = ۴ ق³

۴۰۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کو راسوں سے ملانیوالے خطوط مستقیم اِس دائرہ کو ا، ب، ج پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کا رقبہ ہے

½ ر² (جم ½ ا + جم ½ ب + جم ½ ج)

۴۱۔ اگر ایک مثلث کے ہر ضلع کو بقدر چھوٹی مقدار لا کے بڑھایا جائے تو ثابت کرو کہ رقبہ میں تقریباً　 م لا (جم ا + جم ب + جم ج) کا اضافہ ہوگا۔

۴۲۔ ایک دائرہ کے قطر ا اَ، ب بَ، ج جَ ہیں اور اَ، بَ، جَ سے علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب پر کے عمودوں کے پائیں د، ع، ف ہیں۔ ثابت کرو کہ ا د، ب ع، ج ف ایک نقطہ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ رقبوں ا ب ج، د ع ف میں نسبت ۱ : ۲ جم ا جم ب جم ج ہے۔

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز آ سے ضلعوں پر عمود آ د، آ ع، آ ف کھینچے جائیں تو آ ع ا ف، آ ف ب د، آ د ج ع میں کھینچے ہوئے دائروں کے نصف قطر معلوم کرو؛ اگر یہ نصف قطر علی الترتیب غم، غم، غم ہوں تو ثابت کرو کہ

(ر − ۲ غم₁) (ر − ۲ غم₂) (ر − ۲ غم₃) = ر³ − ۴ غم₁ غم₂ غم₃

۴۴۔ تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب، ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا نصف قطر س جو اِن تین دائروں کو بیرونی طور پر مس کرتا ہے مساوات

$$\sqrt{\text{س ب ج (ب + ج + س)}} + \sqrt{\text{س ج ا (ج + ا + س)}} + \sqrt{\text{س ا ب (ا + ب + س)}} = \sqrt{\text{ا ب ج (ا + ب + ج)}}$$

(218)

سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۵۔ مثلث ا ب ج کے زاویوں میں سے مثلث کے مستوی کے عمود وار خطوط ا ا₁، ب ب₁، ج ج₁ کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول علی الترتیب لا، ما، ی ہیں۔ اگر ا ب ج اور ا₁ ب₁ ج₁ کے رقبے Δ اور Δ_1 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\Delta_1^2 - \Delta^2 = \frac{1}{4}\{\text{ا}^2(\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}-\text{ی}) + \text{ب}^2(\text{ما}-\text{ی})(\text{ما}-\text{لا}) + \text{ج}^2(\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}-\text{ما})\}$$

$$= \frac{1}{4}\{\text{ا}_1^2(\text{لا}-\text{ما})(\text{لا}-\text{ی}) + \text{ب}_1^2(\text{ما}-\text{ی})(\text{ما}-\text{لا}) + \text{ج}_1^2(\text{ی}-\text{لا})(\text{ی}-\text{ما})\}$$

۴۶۔ تین دائرے بنائے گئے ہیں جن میں سے ہر ایک، ایک مثلث کے دو ضلعوں اور نیز اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے۔ ان تینوں دائروں کے مرکزوں کو ملا کر ایک مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس مثلث کے رقبہ کو دیے ہوئے مثلث کے رقبہ کے ساتھ نسبت ہے

$$4\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}\;\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}\;\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}\left(\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ا}+\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ب}+\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)$$

$$:\;\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\;\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\;\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\left(\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}\right)$$

۴۷۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کے ناصف مقابل کے ضلعوں سے د، ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ ہے

$$2\,\text{ر}^2\,\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ا}\;\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ب}\;\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{ج}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ب}-\text{ج})\;\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ج}-\text{ا})\;\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا}-\text{ب})}$$

اور نیز ثابت کرو کہ

$$(\text{ا}+\text{ب})^2(\text{ا}+\text{ج})^2\,\text{ع ف}^2 + (\text{ب}+\text{ج})^2(\text{ب}+\text{ا})^2\,\text{ف د}^2 + (\text{ج}+\text{ا})^2(\text{ج}+\text{ب})^2\,\text{د ع}^2$$

$$= 16\,\Delta^2\,\text{ر}\,(11\,\text{ر} + 2\,\text{ر}_1)$$

جہاں Δ مثلث ا ب ج کے رقبے کو تعبیر کرتا ہے۔

۴۸ ۔ ایک مثلث کے حائط دائرہ کا مرکز و ہے، اس کا مرکز عمودی ک ہے؛ اور و ک، حائط دائرہ کو پ اور پَ میں قطع کرتا ہے اور پ اور پَ کے خطوطِ پائیں سے ق اور قَ پر ملتا ہے ۔

ثابت کرو کہ　　و ق × و قَ = ۲ ر۲ جم ا. جم ب. جم ج

۴۹ ۔ ایک مثلث کے نونقطی دائرہ کا مرکز ن ہے اور ج ب اور ج ا کے وسطی نقطے د، ع ہیں ۔ ثابت کرو کہ ذوالاربعۃ الاضلاع ن د ج ع کا رقبہ ہے

½ غہ۲ (جب ۲ ا + جب ۲ ب + ۲ جب ۲ ج)

جہاں نونقطی دائرہ کا نصف قطر غہ ہے ۔

۵۰ ۔ ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے ایک دوسرا مثلث بنایا گیا ہے اور اس دوسرے مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے تیسرا مثلث، علیٰ ہٰذا القیاس ۔ ثابت کرو کہ ن ویں مثلث کے ضلع ہیں

ا قم ½ ا قم (π − ۱)/۲۲ قم (۳π + ۱)/۲۳ ... قم ((۲ن−۲ − ۱)π + (−۱)ن−۲ ا)/۲ن−۱

مع دیگر دو متشابہ جملوں کے ۔

۵۱ ۔ اگر مثلث ا ب ج کے نونقطی دائرہ کا مرکز ن ہو اور ا نَ ب ج سے نقطہ د پر ملے تو ثابت کرو کہ

د ن : د ا :: جم (ب − ج) : ۴ جب ب جب ج

اور نیز بتاؤ کہ ب ن ج کا رقبہ ½ ر۲ جب ا. جم (ب − ج) ہے ۔

۵۲ ۔ مثلث ا ب ج کے راسوں ا، ب، ج سے مقابل کے ضلعوں پر عمود گرائے گئے ہیں جن کے پائیں د، ع، ف ہیں ۔ ثابت کرو کہ اُس دائرہ کا نصف قطر جو تین دائروں د ج ع، ع ا ف، ف ب د کو مس کرتا ہے حسب ذیل ہے

۲ ر جب ا جب ب جب ج. جم ا. جم ب. جم ج (جب ا + جب ب + جب ج)
――――――――――――――――――――
جب۲ ا جب۲ ب جب۲ ج − ۲ جب۲ ا. جم۲ ا + ۲. جم ا. جم ب. جم ج ۲ جب ب جب ج

(219)

۵۳ ۔ اگر کسی نقطہ و سے مثلث اب ج کے ضلعوں ب ج، ج ا، اب پر عمود و د، و ع، و ف کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ

مم ا د ج + مم ب ع ا + مم ج ف ب = ۰

۵۴ ۔ اگر ب، ج، ب دیے گئے ہوں اور اِن اجزاء کے ساتھ دو مثلث موجود ہوں تو ثابت کرو کہ اِن کے اندرونی دائرے ایک دوسرے کو مس کرینگے اگر

ج^{۲} (جم^{۲} ب + ۲ جم ب − ۳) + ۲ ب ج (۱ − جم ب) + ب^{۲} = ۰

۵۵ ۔ اگر ایک مثلث کے جانبی دائروں کے مرکزوں سے نو نقطی دائرہ کے مماس کھینچے جائیں اور ان کے طول م$_{۱}$، م$_{۲}$، م$_{۳}$ ہوں تو ثابت کرو کہ

م$_{۱}^{۲}$/ر$_{۱}$ + م$_{۲}^{۲}$/ر$_{۲}$ + م$_{۳}^{۲}$/ر$_{۳}$ = ر + ۷ رٔ، اور (م$_{۱}^{۲}$ − م$_{۲}^{۲}$)/(ر$_{۱}$ − ر$_{۲}$) + (م$_{۲}^{۲}$ − م$_{۳}^{۲}$)/(ر$_{۲}$ − ر$_{۳}$) + (م$_{۳}^{۲}$ − م$_{۱}^{۲}$)/(ر$_{۳}$ − ر$_{۱}$) = ۲ ر + ۱۱ ر

۵۶ ۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے راسوں سے نو نقطی دائرہ کے مرکز کے فاصلوں کے مربعوں کا حاصل جمع ہے

ر^{۲} (۱۱/۴ + ۲ جم ا جم ب جم ج)

۵۷ ۔ ایک دیے ہوئے دائرہ کے گرد چار متشابہ مثلث بنائے گئے ہیں اور ان کے رقبے ق، ق$_{۱}$، ق$_{۲}$، ق$_{۳}$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

(ا) مثلثوں کا ایک زاویہ ۲ مم$^{-۱}$ (ق ق$_{۱}$ / ق$_{۲}$ ق$_{۳}$)$^{۱/۴}$ ہے،

(ب) ق$^{۱/۲}$ = ق$_{۱}^{۱/۲}$ + ق$_{۲}^{۱/۲}$ + ق$_{۳}^{۱/۲}$

(ج) دائرہ کا نصف قطر (ق ق$_{۱}$ ق$_{۲}$ ق$_{۳}$)$^{۱/۸}$ ہے۔

۵۸ - ایک مثلث کے راسوں ا ، ب ، ج سے خطوط مستقیم کھینچے گئے ہیں جو مثلث کے ضلعوں سے ایک ہی جہت میں زاویے طہ ، فہ ، پہ بناتے ہیں - ثابت کرو کہ اِن خطوط سے جو مثلث بنتا ہے اس کے حائط دائرہ کا قطر ہے

$$\frac{\text{جب}(۲ا + \text{فہ} - \text{پہ})\ \text{جم طہ} + \text{جب}(۲ب + \text{پہ} - \text{طہ})\ \text{جم فہ} + \text{جب}(۲ج + \text{طہ} - \text{فہ})\ \text{جم پہ}}{\text{جب}(ا + \text{فہ} - \text{پہ})\ \text{جب}(ب + \text{پہ} - \text{طہ})\ \text{جب}(ج + \text{طہ} - \text{فہ})}\ \text{ت}$$

۵۹ - ایک مثلث کے ضلعوں کے محاذی ایک نقطہ و پر زاویے عہ ، بہ ، جہ بنتے ہیں ؛ ثابت کرو کہ

$$(۱)\ \text{جم}\tfrac{۱}{۲}\text{عہ} + \text{جم}\tfrac{۱}{۲}\text{بہ} + \text{جم}\tfrac{۱}{۲}\text{جہ} = ۴\ \text{جم}\tfrac{۱}{۴}(\text{بہ} + \text{جہ})\ \text{جم}\tfrac{۱}{۴}(\text{جہ} + \text{عہ})\ \text{جم}\tfrac{۱}{۴}(\text{عہ} + \text{بہ})$$

$$(۲)\ \text{او} = \frac{ب\ ج\ \text{جب}(\text{عہ} - ا)}{\left[ب\ ج\ \text{جب عہ جب}(\text{عہ} - ا) + ج\ ا\ \text{جب بہ جب}(\text{بہ} - ب) + ا\ ب\ \text{جب جہ جب}(\text{جہ} - ج)\right]}$$

۶۰ - اگر ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع ا) کے مستوی میں کسی نقطہ کے فاصلے مثلث کے راسوں سے $\text{ف}_۱$ ، $\text{ف}_۲$ ، $\text{ف}_۳$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}_۲^۲\,\text{ف}_۳^۲ + \text{ف}_۳^۲\,\text{ف}_۱^۲ + \text{ف}_۱^۲\,\text{ف}_۲^۲ + ا^۲(\text{ف}_۱^۲ + \text{ف}_۲^۲ + \text{ف}_۳^۲) = ا^۴ + \text{ف}_۱^۴ + \text{ف}_۲^۴ + \text{ف}_۳^۴$$

پس ثابت کرو کہ دو متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کا مجموعہ جن میں سے ہر ایک مثلث کے راس ایک ثابت نقطہ سے دئے ہوئے تین فاصلوں پر واقع ہیں اِن فاصلوں پر بنائے ہوئے متساوی الاضلاع مثلثوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے -

۶۱ - اگر مثلث ا ب ج کے اندر کوئی نقطہ پ ہو اور مثلثوں ب پ ج ، ج پ ا ، ا پ ب کے حائط دائروں کے مرکز $\text{و}_۱$ ، $\text{و}_۲$ ، $\text{و}_۳$ اور مثلث $\text{و}_۱\ \text{و}_۲\ \text{و}_۳$ کے حائط دائرہ کا نصف قطر غہ ہو تو ثابت کرو کہ

۴ غ جب ط جب ف جب پ = لا جب ط + م جب ف + ی جب پ
جہاں پ ا، پ ب، پ ج کے طول لا، م، ی ہیں اور ط، ف، پ زاوئے ب پ ج، ج پ ا، ا پ ب ہیں۔

(330)

۶۲ - تین دائرے جن کے نصف قطر ا، ب ج ہیں ایک دوسرے کو بیرونی طور پر مس کرتے ہیں اور ر، ر اُن دائروں کے نصف قطر ہیں جو ان تین دائروں کو مس کرتے ہوئے کھینچے جا سکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ر_1} + \frac{1}{ر_2} = \frac{2}{ا} + \frac{2}{ب} + \frac{2}{ج}$$

۶۳ - اگر ایک مثلث کے زاویوں ب، ج کے ناصف مقابل کے ضلعوں سے نقطوں ع، ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ ع ف، ب ج کے ساتھ زاویہ

$$\text{س}^{-1} \frac{(ب - ج) جب ا}{(ا + ب) جم ج + (ا + ج) جم ب}$$

بناتا ہے۔

۶۴ - اگر ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ ہو، آ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ$_1$ ہو، آ$_1$ ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز آ$_2$ ہو اور علیٰ ہذا القیاس تو بتاؤ کہ جیسے ن لا انتہا بڑھتا ہے آ$_{ن-1}$ آ$_ن$، ب ج کو اس نسبت میں تقسیم کرتا ہے جو زاویوں ج اور ب کے نیمقطری ناپوں کے درمیان ہے۔

۶۵ - ایک مثلث کے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر نقطے د، ع، ف لیے گئے ہیں اور د، ع، ف میں سے خطوط مستقیم بَ جَ، جَ اَ، اَ بَ کھینچے گئے ہیں جو علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب سے مساوی المیلان ہیں اور مثلث اَ بَ جَ بناتے ہیں جو ا ب ج کے متشابہ ہے۔ ثابت کرو کہ اَ بَ جَ کے حائط دائرہ کا نصف قطر ہے

(ع ف جم ع + ف د جم پ + د ع جم جہ) / ۴ جب ا جب ب جب ج

جہاں اَ، بَ، جَ کے میلان علی الترتیب ب ج، ج ا، ا ب کے ساتھ ع‌ہ، ب‌ہ، ج‌ہ ہیں۔

۶۶ ۔ اگر ایک مثلث کے حائط دائرہ پر ایک نقطہ پ ہو جس کا خط پائیں مثلث کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے اور اگر پ کو مرکز عمودی سے ملانے والا خطِ مستقیم خط پائیں کو علی القوائم قطع کرے تو ثابت کرو کہ

پ ا^2 + پ ب^2 + پ ج^2 = ۴ ر^2 (۱ − ۲ جم ا جم ب جم ج)

۶۷ ۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج میں د ایک نقطہ ہے، اگر مثلثوں ا ب د، ا ج د کے اندرونی دائرے ضلع ا د کو ایک ہی نقطہ پر مس کریں تو ثابت کرو کہ ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا نقطہ تماس ضلع ب ج کے ساتھ د ہے؛ لیکن اگر دائروں کے نصف قطر مساوی ہوں تو

ج د : ب د :: قم د + قم ج : قم د + قم ب

۶۸ ۔ نصف قطر ر کے ایک دائرہ کے اندر کسی نقطہ سے تین سمتی نصف قطر جن کے طول ل۱، ل۲، ل۳ ہیں دائرہ تک کھینچے گئے ہیں اور ان میں سے ہر دو کا درمیانی زاویہ $\frac{2\pi}{3}$ ہے ۔ ثابت کرو کہ

۳ ر^2 (ل۱ ل۲ ل۳ − ل۲ ل۳ + ل۱ ل۲)^2 = (ل۲^2 + ل۲ ل۳ + ل۳^2)(ل۳^2 + ل۳ ل۱ + ل۱^2)(ل۱^2 + ل۱ ل۲ + ل۲^2)

اور اگر اِس نقطہ کا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ف ہو تو ثابت کرو کہ

(ر^2 − ف^2)(ل۲ ل۳ + ل۳ ل۱ + ل۱ ل۲) = ل۱ ل۲ ل۳ (ل۱ + ل۲ + ل۳)

۶۹ ۔ ایک مثلث کے ضلع ب ج کو مس کرنے والے بانی دائرہ کے نقاط تماس د۱، ع۱، ف۱ ہیں اور علیٰ ہٰذالقیاس مثلثوں د ع ف، د۲ ع۲ ف۲، د۳ ع۳ ف۳ کے اندرونی دائرے کھینچے گئے ہیں ۔ اگر ان دائروں کے نصف قطر غہ، غہ۱، غہ۲، غہ۳ ہوں تو بتاؤ کہ

۱/عم : ۱/عظم = ۱ – مس $\frac{1}{2}$ ا : ۱ – مس $\frac{1}{2}$ ب : ۱ – مس $\frac{1}{2}$ ج

(221) ۷۰ ۔ ایک مثلث ا ب ج میں اَ ، بَ ، جَ اُن دائروں کے مرکز ہیں جن میں سے ہر ایک مثلث کے دو ضلعوں اور اس کے اندرونی دائرہ کو مس کرتا ہے ۔ ثابت کرو کہ مثلث اَ بَ جَ کا رقبہ ہے

مس $\frac{1}{4}$ (π – ا) مس $\frac{1}{4}$ (π – ب) مس $\frac{1}{4}$ (π – ج)

× {قم $\frac{1}{4}$ (π – ا) قم $\frac{1}{4}$ (π – ب) قم $\frac{1}{4}$ (π – ج) + ۴} ر^{2}

۷۱ ۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے وہ تین مماس کھینچے گئے ہیں جو ضلعوں کے متوازی ہیں ۔ ان مماسوں سے مثلث کے کونوں پر تین مثلث بن جاتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ان تین مثلثوں کے اندرونی دائروں کے نصف قطر لا ، مساوات

س^{2} لا^{3} – ر س^{2} لا^{2} – $\frac{1}{4}$ ر^{3} (ا^{2} + ب^{2} + ج^{2} – ۲ ب ج – ۲ ج ا – ۲ ا ب) لا – ر^{5} = ۰

سے حاصل ہوتے ہیں ۔

۷۲ ۔ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کو ملانیوالے خطِ مستقیم پر مثلث کے راسوں سے عمودوں کے طول ف ، ق ، ر ہیں ؛ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ف جب ا}}{\text{قط ب – قط ج}} = \frac{\text{ق جب ب}}{\text{قط ج – قط ا}} = \frac{\text{ر جب ج}}{\text{قط ا – قط ب}}$$

جبکہ ف ، ق ، ر کی علامتوں سے متعلق ایک قرارداد کر لی جائے ۔

۷۳ ۔ ایک متساوی الاضلاع مثلث کے اندر ایک نقطہ لیا گیا ہے اور راسوں سے اس کے فاصلے عہ ، بہ ، جہ ہیں ۔ خطوط (بہ ، جہ) ، (جہ ، عہ) ، (عہ ، بہ) کے اندرونی زاویوں کے ناصف مثلث کے متناظر ضلعوں سے

نقطوں ف، ق، ر پر علی الترتیب ملتے ہیں ۔ ثابت کرو کہ ف ق ر کے رقبہ کو تساوی الاضلاع مثلث کے رقبہ سے نسبت ہے

۲ عہ بہ جہ : (بہ + جہ) (جہ + عہ) (عہ + بہ)

۷۴ ۔ مثلث ا ب ج کے مستوی میں کسی نقطہ سے راسوں کے فاصلے ل، م، ن ہیں اور حائط دائرہ کے مرکز سے اس کا فاصلہ ف ہے۔ ثابت کرو کہ

ل^2 جب ۲ ا + م^2 جب ۲ ب + ن^2 جب ۲ ج = ۲ (ر^2 + ف^2) جب ا جب ب جب ج

۷۵ ۔ اگر ایک مثلث کا مرکزِ ہندسی ث ہو تو ثابت کرو کہ

مم ث ا ب + مم ث ب ج + مم ث ج ا = ۳ مم سہ

= مم ا ب ث + مم ب ج ث + مم ج ا ث

اور مم ا ث ب + مم ب ث ج + مم ج ث ا + مم سہ = ۰

جہاں مم سہ = مم ا + مم ب + مم ج

نیز اگر مثلث میں ک ایک نقطہ ہو ایسا کہ زاویے ک ا ج، ث ا ب مساوی ہیں مع دو اور متشابہ رشتوں کے، تو ثابت کرو کہ

مم ا ک ب + مم ب ک ج + مم ج ک ا + $\frac{1}{2}$ مم سہ + $\frac{3}{2}$ مس سہ = ۰

۷۶ ۔ ایک مثلث کے رقبہ کے اندر تین دائروں میں سے ہر دائرہ دیگر دو دائروں کو مس کرتا ہے اور نیز مثلث کے دو ضلعوں کو مس کرتا ہے، اگر ایک ضلع پر نقاطِ تماس کے درمیان فاصلہ عہ ہو اور اسی طرح دیگر دو ضلعوں پر متناظر فاصلے بہ، جہ ہوں تو ثابت کرو کہ اُس مثلث کا رقبہ جو اِن دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے بنتا ہے $\frac{1}{4}$ (بہ^2 جہ^2 + جہ^2 عہ^2 + عہ^2 بہ^2)$^{\frac{1}{2}}$ ہے ۔

۷۷ ۔ اگر ایک ذوارابعۃ الاضلاع کے راسوں سے وتروں د، د$_2$ پر عمود ا، ب، ج، د ہوں تو ثابت کرو کہ وتروں کے درمیانی زاویہ کی جیب

$$= \left\{\frac{(\text{ا}+\text{ج})(\text{ب}+\text{د})}{\text{۲ ا د}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(222) ۷۸ ۔ اگر ا ب ج د ایک ذوا ربعۃ الاضلاع ہو تو کسی طریقہ سے ثابت کرو کہ وہ خطِ مستقیم جو زاویوں آ اور ج کے ناصفوں کے نقطۂ تقاطع کو زاویوں ب اور د کے ناصفوں کے نقطۂ تقاطع سے ملاتا ہے آ د کے ساتھ حسب ذیل زاویہ بناتا ہے

$$\text{مس}^{-1}\left\{\frac{\text{جب آ} - \text{جب د} + \text{جب}(\text{آ}+\text{ب})}{1 + \text{جم آ} + \text{جم د} + \text{جم}(\text{آ}+\text{ب})}\right\}$$

۷۹ ۔ آ ب ج د ع ایک مستوی مخمس ہے ؛ یہ دیا گیا ہے کہ مثلثوں ع آ ب، آ ب ج، ب ج د، ج د ع، د ع آ کے رقبے علی الترتیب ا، ب، ج، د، ع کے مساوی ہیں ۔ ثابت کرو کہ مخمس کا رقبہ آ، مساوات

$$\text{آ}^2 - (\text{ا}+\text{ب}+\text{ج}+\text{د}+\text{ع})\,\text{آ} + (\text{اب}+\text{بج}+\text{جد}+\text{دع}+\text{عا}) = 0$$

سے معلوم ہو سکتا ہے ۔

۸۰ ۔ اگر ایک ذوا ربعۃ الاضلاع جس کے ضلع ترتیب وار ا، ب، ج، د ہیں ایسا ہو کہ اس کے اندر ایک دائرہ بنایا جا سکتا ہے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ ذوا ربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ کھینچا جا سکتا ہو، اور اس صورت میں اندرونی دائرہ کے نصف قطر کا مربع ہے

$$\frac{\text{ا ب ج د}}{(\text{ا}+\text{ج})(\text{ب}+\text{د})}$$

۸۱ ۔ ۲ ن ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہے، ان ضلعوں میں سے ن اضلاع ا کے مساوی ہیں اور ن اضلاع ب کے مساوی ۔ ثابت کرو کہ دائرہ کا نصف قطر ہے

$$\frac{1}{2}\left(\text{ا}^2 + 2\,\text{اب جم}\frac{\pi}{\text{ن}} + \text{ب}^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{قم}\frac{\pi}{\text{ن}}$$

۸۲ - ایک ذوارلبعۃ الاضلاع جس کے ضلع ا، ب، ج، د ہیں ایک دائرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے؟ اِس کے خارجی زاویوں کی تنصیف کی گئی ہے؛ ثابت کرو کہ اُس ذوارلبعۃ الاضلاع کے وتر جو ان ناصفوں سے بنتا ہے ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اور اِس ذوارلبعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$\frac{1}{2}\,\frac{\text{س}^2(\text{اب}+\text{ج د})(\text{ا د}+\text{ب ج})}{(\text{ا}+\text{ج})(\text{ب}+\text{د})\sqrt{(\text{س}-\text{ا})(\text{س}-\text{ب})(\text{س}-\text{ج})(\text{س}-\text{د})}}$$

جہاں $\text{۲ س} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}$

۸۳ - ذوارلبعۃ الاضلاع ا ب ج د ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے اور اس کا تیسرا وتر ع ف ہے جو راس ا کے مقابل ہے۔ اگر ا سے ب ج، ج د پر عمود ڈالے جائیں اور یہ عمود اُن دائروں سے جو ا د، ا ب پر ان کو قطر مانکر کھینچے گئے ہوں نقطوں پ، ق پر ملیں تو

ثابت کرو کہ $\quad \text{پ ق جب د} = \text{ع ف}\,(\text{جب}^2\,\text{ا} - \text{جب}^2\,\text{د})$

۸۴ - ایک دوسرے کے لحاظ سے دو دائروں کی طاقت کی تعریف اُس اضافہ سے کی جاتی ہے جو ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کے مربع کو ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع پر حاصل ہے۔ مثلث ا ب ج کے لیے ثابت کرو کہ اندرونی دائرہ اور اُس جانبی دائرہ کی طاقت جو ا کے مقابل ہے $\frac{1}{2}\{\text{ا}^2 + (\text{ب} - \text{ج})^2\}$ ہے اور اس سے اس امر کی تصدیق کرو کہ اگر یہ جانبی دائرہ دوسرے جانبی دائرہ کو مس کرے تو مثلث کو متساوی الساقین ہونا چاہیے۔

۸۵ - ایک مخمس کے ضلع، جو ایک دائرہ کے گرد کھینچا گیا ہے، ترتیب وار ا، ب، ج، د، ع ہیں۔ ثابت کرو کہ مخمس کا رقبہ، مساوات

$$\text{لا}^4 - \text{لا}^2\,\text{س}\left\{\tfrac{1}{4}\Sigma\,\text{ا}^2(\text{ب}+\text{ع}-\text{ج}-\text{د}) - \tfrac{1}{4}\Sigma\,\text{ا}^3 + \tfrac{1}{2}\Sigma\,\text{ا ج د}\right\}$$
$$+\,(\text{س}-\text{ا}-\text{ع})(\text{س}-\text{ب}-\text{د})(\text{س}-\text{ج}-\text{ع})(\text{س}-\text{د}-\text{ا})(\text{س}-\text{ج}-\text{ب})\,\text{س}^3 = ۰$$

(223)

کی ایک اصل ہے جہاں ۲ س = ا + ب + ج + د + ع

۸۶ ـ ایک دائرہ میں جس کا نصف قطر ر ہے ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچا گیا ہے ـ اِس دائرہ کے محیط پر کسی نقطہ کے فاصلے کثیر الاضلاع کے چار متصلہ راسوں سے ا، ب، ج، د ہیں ـ ا، ب، ج اور د کے درمیان رشتہ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ

$$ر^۲ = \frac{(ا ب - ج د)(ب ج - ا د)(ج ا - ب د)}{(ا + ب - ج - د)(ب + ج - د - ا)(ج + ا - ب - د)(ا + ب + ج + د)}$$

۸۷ ـ ایک محدب مخمس ا ب ج د ع ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے، اس کا گھیرا اور رقبہ علی الترتیب ۲ س اور س ہیں، اور ع اور ب پر کے زاویوں کا مجموعہ عہ ہے، ا اور ج پر کے زاویوں کا مجموعہ بہ، اور وقس علی ہٰذا ـ ثابت کرو کہ

$$س^۲ (جب ۲ عہ + \ldots + جب ۲ صہ) + ۲ س (جب عہ + \ldots + جب صہ)^۲ = ۰$$

۸۸ ـ ا ب ج د ایک محدب ذوارلبعۃ الاضلاع ہے جس کے ضلع ایک دائرے کو مس کرتے ہیں اور راس ایک دوسرے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں ـ مخمس کے حائط دائرہ کے مماس نقطوں ا، ب، ج، د پر کھینچے گئے ہیں جن سے ایک دوسرا محدب ذوارلبعۃ الاضلاع بنتا ہے ـ ثابت کرو کہ اِس آخری ذوارلبعۃ الاضلاع کا رقبہ ہے

$$۲ ر^۲ \frac{(س ثہ - ۲ ا ب ج د)(ا ب ج د)^{\frac{۳}{۲}} ثہ}{(ثہ - ب ج د)(ثہ - ج د ا)(ثہ - د ا ب)(ثہ - ا ب ج)}$$

جہاں دائرہ ا ب ج د کا نصف قطر ر ہے اور ۲ س = ا + ب + ج + د اور

$$۲ ثہ = ب ج د + ج د ا + د ا ب + ا ب ج$$

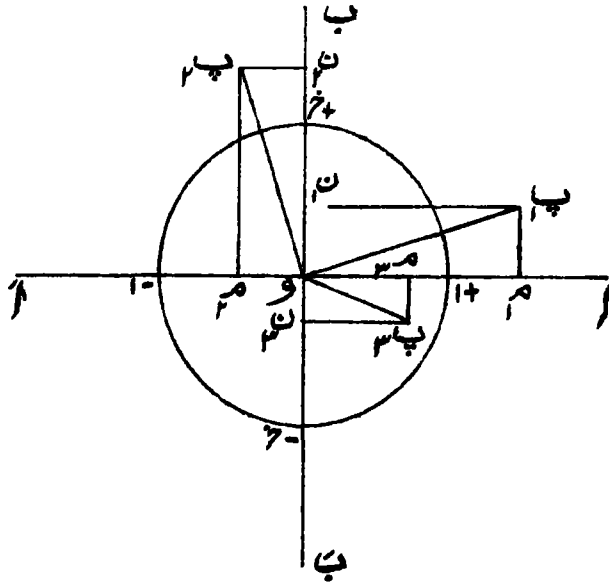
تیرھواں باب

ملتف اعداد

۱۷۰ ـــــــ جبر و مقابلہ کی کتابوں میں شکل لا + خ ما کے عددوں پر جنھیں ملتف اعداد کہا جاتا ہے بحث کی جاتی ہے اور جبری اعمال کے معمولی قوانین کا ان پر اطلاق درست ثابت کیا جاتا ہے ۔ ہم اس باب میں اُس طریقہ پر غور کرینگے جس میں ایسے ملتف عدد ہندسی طور پر تعبیر کیے جا سکتے ہیں اور جس میں ایسے عددوں کے حاصل جمع اور حاصل ضرب ہندسی طور پر ظاہر کیے جا سکتے ہیں ۔ یہ معلوم ہوگا کہ اس سلسلہ میں دائری تفاعل فطرتاً خود بخود پیش ہوتے ہیں، اور فی الواقعی ایسے تفاعلوں کا ادخال ضروری ہے تاکہ ملتف عددوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم اختصاراً بیان ہو سکیں ۔

ملتف عدد کی ہندسی تعبیر

۱۷۱ ـــــــ ایک مثبت یا منفی حقیقی عدد کو ہندسی طور پر اس طرح تعبیر کرتے ہیں کہ ایک ثابت لامتناہی خط مستقیم ا و ا پر پیمانہ کے مطابق طول و م = ا لا ا کسی معروف نقطہ و سے اس کی ایک سمت یا دوسری سمت میں بموجب اس کے کہ عدد لا مثبت ہے یا منفی ناپتے ہیں؛ تب ہم یہ خیال کر سکتے ہیں کہ عدد لا یا تو م کے محل سے تعبیر ہوتا

ہے یا خطِ مستقیم وم سے۔ اب خالص خیالی عدد خ ما کو تعبیر کرنے کے لیے
کسی ثابت مستوی میں جس میں اَ و ا واقع ہے ایک ثابت خطِ مستقیم
ب و بَ لو جو ا و اَ پر عمود ہو، پھر بَ و ب پر و سے طول و ن = | ما |
ناپو جو و ب یا و بَ کی سمت میں لیا جائے بموجب اس کے کہ ما مثبت ہو
یا منفی؛ تب ہم یہ خیال کرینگے کہ خیالی عدد خ یا نقطہ ن سے تعبیر ہوتا
ہے یا نیز خطِ مستقیم و ن سے۔ اکائی نصف قطر کا دائرہ خطوطِ مستقیم
ا اَ اور ب بَ کو اُن نقطوں پر قطع کریگا جو عددوں ± ۱، ± خ کو تعبیر
کرتے ہیں۔ ملتف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرنے کے لیے مستطیل وم پ ن (225)
کی تکمیل کرو، تب ہم یہ خیال کرینگے کہ نقطہ پ یا نیز خطِ مستقیم و پ
ملتف عدد لا + خ ما کو تعبیر کرتا ہے۔ اس طرح ہم یہ فرض کر لیتے ہیں کہ
دو عددوں لا اور خ ما کا حاصل جمع ہندسی طور پر اُس متوازی الاضلاع
کے وتر سے تعبیر ہوتا ہے جس کے دو ضلع خطوطِ مستقیم وم، و ن ہیں
جو علی الترتیب لا اور خ ما کو تعبیر کرتے ہیں۔

شکل میں پ$_1$ ، ملتف عدد لا$_1$ + خ ما$_1$ کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا$_1$ اور ما$_1$ دونوں مثبت ہیں ؛ پ$_2$ ، ملتف عدد لا$_2$ + خ ما$_2$ کو جس میں لا$_2$ منفی ہے اور ما$_2$ مثبت ؛ پ$_3$ ، عدد لا$_3$ + خ ما$_3$ کو جس میں لا$_3$ مثبت ہے اور ما$_3$ منفی ۔ اَ و ا کو حقیقی محور کہتے ہیں اور بَ و ب کو خیالی محور ۔

۱۷۲ ـــــــ فرض کرو کہ و پ کا مطلق طول ر سے تعبیر ہوتا ہے اور ط وہ زاویہ ہے جو و پ ، و ا کے ساتھ بناتا ہے جبکہ اس کو و ا سے مخالف سمت ساعت ناپا جاتا ہے ۔ تب

لا = ر جم ط ، ما = ر جب ط ، ی = لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)

جہاں $ر = \sqrt{لا^2 + ما^2}$ ، $ط = مس^{-1} \frac{ما}{لا}$

عدد $ر = \sqrt{لا^2 + ما^2}$ کو جو لازمی طور پر مثبت عدد ہے ملتف عدد لا + خ ما کا مقیاس کہتے ہیں اور زاویہ ط کو اس ملتف عدد کی دلیل یا وجہ ۔

(226)

پس خطِ مستقیم و پ جو اس مستوی میں و سے کسی سمت میں ناپا گیا ہو مطلق طول کی اور سمت کی دو خصوصیتوں کی وجہ سے ایک ملتف عدد کو پوری طرح تعبیر کرنے کے قابل ہے ۔ عدد لا + خ ما کو اس مستوی کے کسی اور خطِ مستقیم سے بھی تعبیر کیا جا سکتا ہے جو و پ کے متوازی اور طول میں اس کے مساوی کھینچا گیا ہو کیونکہ ایسا خطِ مستقیم لا + خ ما کے مقیاس اور دلیل دونوں کو تعبیر کرتا ہے ۔

۱۷۳ ـــــــ فرض کرو کہ کوئی نقطہ پ ، ا سے ابتدا کر کے اور مخالف سمت ساعت حرکت کرتے ہوئے ایک دائرہ مرتسم کرتا ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ر ہے ؛ تب اس ملتف عدد کا مقیاس جو پ سے تعبیر ہوتا ہے مستقل اور ر کے مساوی رہتا ہے لیکن دلیل جبری طور پر ۔ ۰ سے شروع کر کے مسلسل

بڑھتی جاتی ہے ۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ نقطہ پ دائرہ میں متعدد مکمل گردشیں کر چکا ہے، تب ہر دفعہ جب وہ کسی ثابت مقام پ۱ سے گذرتا ہے ملتف عدد لا + خ ما کی وہی قیمت ہوتی ہے، یعنی اس کی دلیل میں ۲ π کے ضعف کے اضافہ سے یہ ملتف عدد نہیں بدلتا۔ بہ الفاظ دیگر متغیر

لا + خ ما = ر (جم ط + خ جب ط)

جس کو اس کے مقیاس ر اور اس کی دلیل ط کا تفاعل خیال کیا جا سکتا ہے دلیل کے لحاظ سے دَوری (Periodic) ہے۔

کسی عدد لا + خ ما کے لیے ط کی اُس قیمت کو جو - π اور π کے درمیان واقع ہوتی ہے **دلیل کی صدر قیمت** کہہ سکتے ہیں؛ اور ہم بالعموم ایسے عدد کی دلیل کا جب ذکر کرینگے تو اس سے مُراد یہی صدر قیمت ہوگی۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ دلیل ط کی صدر قیمت کا مس ا $\frac{ما}{لا}$ کی صدر قیمت ہونا ضروری نہیں ہے (دیکھو دفعہ ۳۸)، کیونکہ لا + خ ما کی ایک دی ہوئی قیمت کے جواب میں جم ط اور جب ط دونوں کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں اور اس لیے ط کی صرف ایک قیمت - π اور π کے درمیان ہوتی ہے۔

اِس مفہوم میں ایک مثبت حقیقی عدد کی دلیل صفر ہے اور ایک ثبت خیالی عدد کی دلیل $\frac{1}{2}$ π ہے اور ایک منفی خیالی عدد کی دلیل - $\frac{1}{2}$ π، لیکن منفی حقیقی عدد کی دلیل کی صدر قیمت حسب تعریف بالا مبہم ہے کیونکہ یہ π ہے یا - π، لیکن ہم اس کو π ہی خیال کرینگے۔ مزدوج اعداد لا + خ ما، لا - خ ما کے مقیاس تو ایک ہی ہوتے ہیں لیکن اِن کی دلیلیں ط اور - ط ہیں۔

لا + خ ما کے مقیاس کو اکثر مق (لا + خ ما) سے یا |لا + خ ما| سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۱۷۴ ـــ اس امر کا مشاہدہ کرنا بنیادی اہمیت رکھتا ہے کہ حقیقی متغیر لا جبکہ لا۱ سے لا۲ تک مسلسل بڑھتا ہے تو وہ صرف قیمتوں کے

(227)

ایک جہت میں سے گذر سکتا ہے، لیکن ملتف متغیر لا + خ ا کی یہ کیفیت نہیں ہے۔ یہ فرض کرکے بھی کہ لا اور ا دونوں مسلسل بڑھتے ہیں لاانتہا طریقے ہیں جن میں ملتف متغیر لا + خ ا قیمت لا₁ + خ ا₁ سے لا₂ + خ ا₂ تک مسلسل بدل سکتا ہے کیونکہ لا₁ سے لا₂ تک لا کا مسلسل اضافہ ا₁ سے ا₂ تک ا کے مسلسل اضافہ کے تابع نہیں ہے۔ یہ امر اس واقعہ میں لازمی طور پر شامل ہے کہ ملتف عدد میں دو الگ الگ اکائیاں پائی جاتی ہیں اور اس واقعہ کی یہ ہندسی تعبیر ہے کہ شکل میں دو نقطے پ₁ اور پ₂ لاانتہا طریقوں سے ایک دوسرے سے ملائے جا سکتے ہیں کیونکہ متغیر کو تعبیر کرنیوالا نقطہ، پ₁ اور پ₂ کو ملانیوالے کسی اختیاری منحنی پر حرکت کر سکتا ہے۔ اگر ایک حقیقی متغیر کو ہمیشہ حقیقی رہتے ہوئے لا₁ سے لا₂ تک بڑھنا ہے تو متغیر کو تعبیر کرنیوالے نقطہ کی حرکت محور لا میں مقید ہو جاتی ہے؛ اگر متغیر پر یہ قید نہ ہو کہ اس کی درمیانی قیمتیں حقیقی ہوں تو اس کو تعبیر کرنیوالا نقطہ کسی اختیاری منحنی کو مرتسم کر سکتا ہے جو محور لا پر کے ان دو نقطوں کو ملا سکتا ہے۔

ہم اس نکتہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک خالص حقیقی یا خالص خیالی عدد لازماً یک بُعدی ہے، لیکن ایک ملتف عدد دو بُعدی ہے اور اس لیے اس کی ہندسی تعبیر کے لیے دو بُعدی فضا چاہیے۔

ملتف عددوں کو ہندسی طور پر تعبیر کرنیکا طریقہ ارگنڈ (Argand) نے ایک مقالہ میں جو ۱۸۰۶ء میں شائع ہوا تھا دیا تھا لیکن اس سے قبل ۱۷۵۰ء میں کیوں (kühn) نے ان کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کی سعی کی تھی۔ تعبیر کے اس طریقہ پر جو نظریہ قائم ہوا ہے اس کی توسیع و ترقی کوشی[1]، گاس[2]، ریمن اور دوسروں نے کی۔ یہ نظریہ تفاعلوں کے موجودہ نظریہ کی بنیاد ہے۔

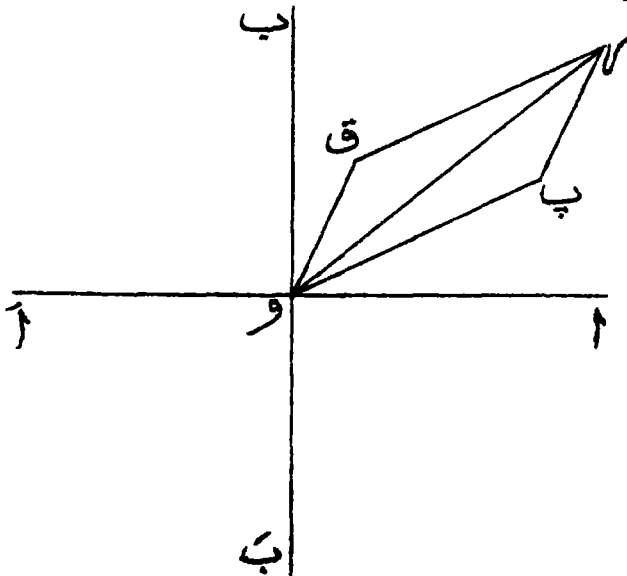
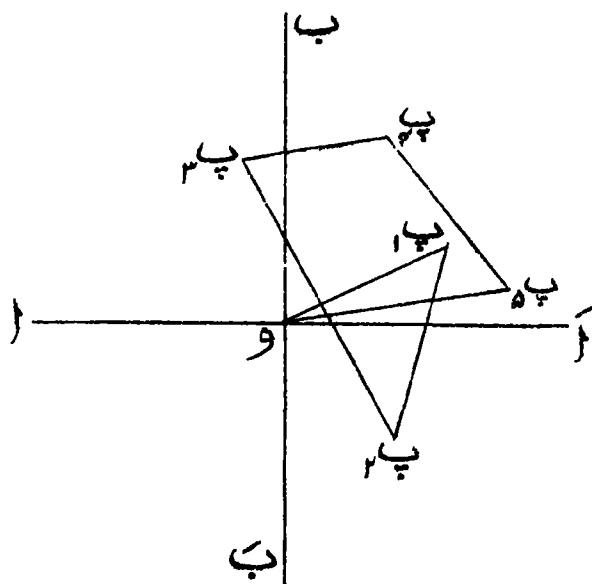
ملتف عددوں کی جمع

۱۷۵ — فرض کرد کہ دو ملتف عددوں لا₁ + خ ا₁، لا₂ + خ ا₂ کو

[1] Cauchy
[2] Gauss

نقطے پ، ق تعبیر کرتے ہیں؛ متوازی الاضلاع و پ ر ق کی تکمیل کرو؛ تب و ر کا ظل کسی ایک محور پر، اس محور پر و پ، پ ر یا و پ، و ق کے ظلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے؛ اس لیے نقطہ ر، دو دئے ہوئے ملتف عددوں کے مجموعہ (لا + لا۲) + خ (ما + ما۲) کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ دو ملتف عددوں کا حاصل جمع ہندسی طور پر اس طرح حاصل ہوتا ہے کہ اِن ملتف عددوں کو تعبیر کرنیوالے خطوطِ مستقیم کو قانونِ متوازی الاضلاع کی بموجب جمع کیا جائے۔ ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ وہ مساوی اور متوازی خطوطِ مستقیم جن کے طول ایک ہی ہیں اور جو ایک ہی سمت میں کھینچے گئے ہیں ایک ہی ملتف عدد کو تعبیر کرتے ہیں، مثلاً پ ر جو پ سے و ق کے متوازی اور مساوی کھینچا گیا ہے ملتف عدد لا۲ + خ ما۲ کو تعبیر کرتا ہے۔ پس ہم جمع کے قاعدے کو یوں بیان کر سکتے ہیں :- و سے خطِ مستقیم و پ کھینچو جو لا + خ ما کو تعبیر کرے اور پھر پ سے پ ر کھینچو جو لا۲ + خ ما۲ کو تعبیر کرے؛ و ر کو ملاؤ؛ تب و ر، یا نقطہ ر، حاصل جمع (لا + لا۲) + خ (ما + ما۲) کو تعبیر کریگا۔

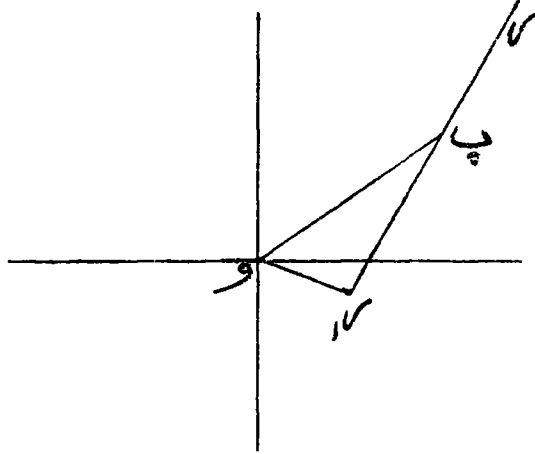
(228)

(229)

۱۷۶ — جمع کا جو طریقہ اوپر بیان کیا گیا ہے اس کی توسیع اعداد کے کسی جٹ کے لیے ہو سکتی ہے۔

دفعہ ماقبل کی دوسری شکل میں و پ$_1$ کھینچو جو لا$_1$ + خ ما$_1$ کو تعبیر کرے، پھر پ$_1$ سے پ$_1$ پ$_2$ کھینچو جو لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرے، پھر پ$_2$ سے پ$_2$ پ$_3$ کھینچو جو لا$_3$ + خ ما$_3$ کو تعبیر کرے، وقس علیٰ ہذا۔ اس کے بعد و پ$_ن$ کو ملاؤ۔ تب ان عددوں لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$، ...، لا$_ن$ + خ ما$_ن$ کا حاصل جمع خطِ مستقیم و پ$_ن$ یا نقطہ پ$_ن$ سے تعبیر ہوگا۔

چونکہ طول و پ$_ن$، طولوں و پ$_1$، پ$_1$ پ$_2$، ...، پ$_{ن-1}$ پ$_ن$ کے مجموعہ سے بڑا نہیں ہو سکتا اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ملتف عددوں کے ایک جٹ کے حاصل جمع کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ کے مساوی یا اس سے کم ہوتا ہے۔

۱۷۷ — لا$_2$ + خ ما$_2$ کو لا$_1$ + خ ما$_1$ سے تفریق کرنے کے لئے پ$_1$ سے ایک خط پ$_1$ ر$_1$ کھینچنا چاہیے جو -(لا$_2$ + خ ما$_2$) کو تعبیر کرے۔ یہ خط پ$_1$ ر$_1$ کے مساوی مگر مخالف

سمت میں ہوگا۔ تب مطلوبہ حاصل تفریق یا فرق خط و ر۱ سے یا نقطہ ر۱ سے تعبیر ہوگا۔

ملتف عددوں کی ضرب

۱۷۸ — دو عددوں $\text{لا}_1 + \text{خ}\,\text{ما}_1$، $\text{لا}_2 + \text{خ}\,\text{ما}_2$ کا حاصل ضرب ہے

$$(\text{لا}_1\,\text{لا}_2 - \text{ما}_1\,\text{ما}_2) + \text{خ}\,(\text{لا}_1\,\text{ما}_2 + \text{لا}_2\,\text{ما}_1)$$

اور اگر ہم $\text{لا}_1 + \text{خ}\,\text{ما}_1$، $\text{لا}_2 + \text{خ}\,\text{ما}_2$ کی بجائے

$$\text{ر}_1\,(\text{جم}\,\text{ط}_1 + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_1)،\quad \text{ر}_2\,(\text{جم}\,\text{ط}_2 + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_2)$$

رکھیں تو ان کا حاصلِ ضرب لکھا جا سکتا ہے

(230)

$$\text{ر}_1\,\text{ر}_2\,\{\text{جم}\,(\text{ط}_1 + \text{ط}_2) + \text{خ}\,\text{جب}\,(\text{ط}_1 + \text{ط}_2)\}$$

اِس جملہ سے ظاہر ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا مقیاس اِن عددوں کے مقیاسوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے اور حاصل ضرب کی دلیل دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔

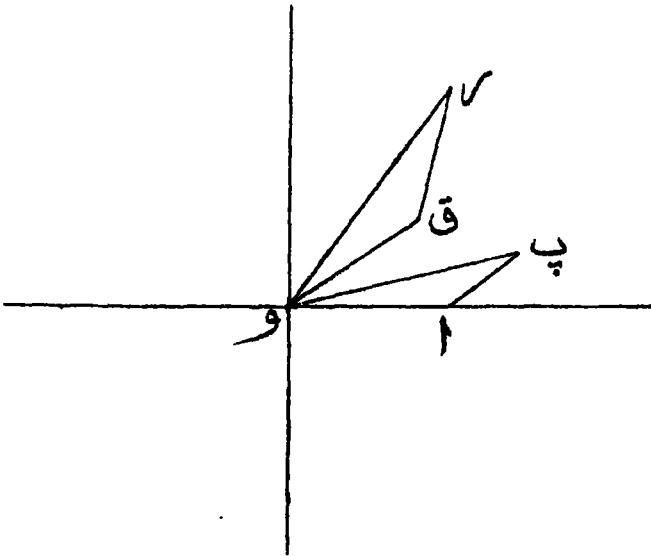
تاہم یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اگر لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کی دلیلوں کی صدر قیمتیں ط$_1$، ط$_2$ ہوں تو ضروری نہیں کہ حاصل ضرب کی دلیل کی صدر قیمت ط$_1$ + ط$_2$ ہو۔

اب ہم دو عددوں کے حاصل ضرب کے لیے ہندسی عمل حاصل کر سکتے ہیں؛ فرض کرو کہ ا، پ، ق، تین عددوں +۱، لا$_1$ + خ ما$_1$، لا$_2$ + خ ما$_2$ کو تعبیر کرتے ہیں؛ اپ کو ملاؤ، وق پر ایک مثلث ق و ر اس طرح بناؤ کہ وہ ا و پ کے متشابہ ہو

اور زاویہ ق و ر = + ط$_1$،

تب زاویہ ر و ا = ط$_1$ + ط$_2$

اور نیز و ر : و ق = و پ : و ا

پس و ر کا طول طولوں و پ اور و ق کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ ر، حاصل ضرب (لا$_1$ + خ ما$_1$) × (لا$_2$ + خ ما$_2$) کو تعبیر کرتا ہے۔

اب اگر ہم ایک تیسرا جزو ضربی $\text{لا}_3 + \text{خ}\,\text{ما}_3 = \text{م}_3(\text{جم}\,\text{ط}_3 + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_3)$ شامل کریں تو

$$(\text{لا}_1 + \text{خ}\,\text{ما}_1)(\text{لا}_2 + \text{خ}\,\text{ما}_2)(\text{لا}_3 + \text{خ}\,\text{ما}_3)$$

$$= \text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3\{\text{جم}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2) + \text{خ}\,\text{جب}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2)\}\{\text{جم}\,\text{ط}_3 + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_3\}$$

$$= \text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3\{\text{جم}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \text{ط}_3) + \text{خ}\,\text{جب}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \text{ط}_3)\}$$

اسی طرح چار یا زیادہ ملتف عددوں کا حاصل ضرب معلوم ہو سکتا ہے۔

(231) ن ملتف عددوں کی صورت میں ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$(\text{لا}_1 + \text{خ}\,\text{ما}_1)(\text{لا}_2 + \text{خ}\,\text{ما}_2)\cdots(\text{لا}_\text{ن} + \text{خ}\,\text{ما}_\text{ن})$$

$$= \text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3\cdots\text{م}_\text{ن}\{\text{جم}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \cdots + \text{ط}_\text{ن}) + \text{خ}\,\text{جب}(\text{ط}_1 + \text{ط}_2 + \cdots + \text{ط}_\text{ن})\}$$

یا **ملتف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب کا مقیاس اِن کے مقیاسوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے اور ان کے حاصل ضرب کی دلیل اِن کی دلیلوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔** ملتف عددوں کے کسی جٹ کے حاصل ضرب کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے مذکورۂ بالا دو عددوں کے حاصل ضرب کے طریقے کی تکرار عمل میں لائی جا سکتی ہے۔

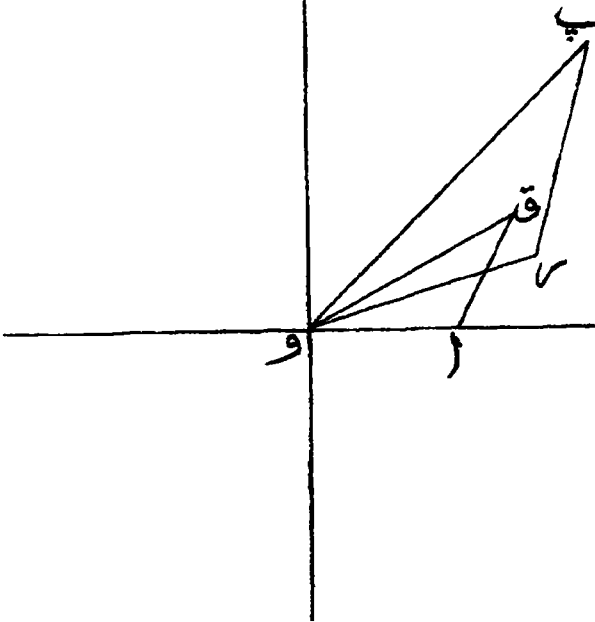
ایک ملتف عدد کو دوسرے سے تقسیم کرنا

۱۷۹ ـــ خارج قسمت $(\text{لا}_1 + \text{خ}\,\text{ما}_1) \div (\text{لا}_2 + \text{خ}\,\text{ما}_2)$

$$= \frac{1}{ر_2^2}\{(لا_1 لا_2 + ما_1 ما_2 - خ(لا_1 ما_2 - لا_2 ما_1)\}$$

یا
$$= \frac{ر_1}{ر_2}\{جم(ط_1 - ط_2) + خ\ جب(ط_1 - ط_2)\}$$

پس دو عددوں کے خارج قسمت کا مقیاس ان کے مقیاسوں کا خارج قسمت ہوتا ہے اور خارج قسمت کی دلیل ان کی دلیلوں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے۔

خارج قسمت کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے نقطہ ق $(لا_2 + خ ما_2)$

(232) کو نقطہ ا (+ ۱) سے ملاؤ، اور مثلث و ر پ کو اس طور پر بناؤ کہ مثلث و ا ق کے متشابہ ہو اور زاویہ ر و پ کا ناپ − $ط_2$ ہو۔ تب زاویہ ر و ا = $ط_1 - ط_2$ اور و ر = $\frac{و پ}{و ق}$ اس لیے نقطہ ر حاصل تقسیم یا خارج قسمت کو تعبیر کرتا ہے۔

ملتف عددوں کی قوتیں

۱۸۰ ـــــــــ اگر مساوات (۱) میں دائیں جانب کے سب اجزائے ضربی کو لا + خر ا کے مساوی رکھیں تو ضابطہ ملتا ہے

(لا + خر ا)^{ن} = ر^{ن} (جم ن ط + خر جب ن ط)

پس کسی ملتف عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس اس دیے ہوئے عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت کے برابر ہے اور اس کی دلیل دیے ہوئے عدد کی دلیل کی ن گنا ہے۔ عدد ن سے یہاں کوئی مثبت صحیح عدد مراد ہے۔

ملتف عدد کی کسی مثبت قوت کی قیمت ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ پ$_{۱}$ (لا + خر ا) کو ا (۱ + ۱) سے ملایا گیا ہے؛ وپ$_{۱}$ پر مثلث وپ$_{۱}$پ$_{۲}$ بناؤ جو و ا پ$_{۱}$ کے متشابہ ہو، وپ$_{۲}$ پر مثلث وپ$_{۲}$پ$_{۳}$ بناؤ جو اسی مثلث کے متشابہ ہو، اور علیٰ ہذالقیاس۔ تب وپ$_{۱}$، وپ$_{۲}$، وپ$_{۳}$، ...، وپ$_{ن}$ کے طول علی الترتیب ر، ر^{۲}، ر^{۳}، ...، ر^{ن} ہیں اور زاویے پ$_{۱}$و ا، پ$_{۲}$و ا، ... پ$_{ن}$و ا علی الترتیب ط، ۲ ط، ... ن ط ہیں پس نقطے پ$_{۱}$، پ$_{۲}$، ... پ$_{ن}$ علی الترتیب عددوں (لا + خر ما)، (لا + خر ما)^{۲}، ...، (لا + خر ما)^{ن} کو تعبیر کرتے ہیں۔

مخصوص صورت ر = ۱ میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

(جم ط + خر جب ط)^{ن} = جم ن ط + خر جب ن ط

اور اگر ق$_{۱}$ سے جم ط + خر جب ط تعبیر ہو تو نقطے ق$_{۱}$، ق$_{۲}$، ... ق$_{ن}$ جو جم ط + خر جب ط کی مختلف قوتوں کو تعبیر کرتے ہیں اکائی نصف قطر کے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں اور اس طرح کہ کسی دو متصل نقطوں کے

کے درمیان جو قوس ہے اُس کے محاذی مرکز و پر زاویہ ط بنتا ہے۔

۱۸۱ —— قوت نماؤں کے نظریہ کے مطابق اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ سے وہ عدد تعبیر ہوتا ہے جس کی ن ویں قوت لا + خ ما ہے۔ اب چونکہ کسی عدد کے مقیاس کی ن ویں قوت اُس عدد کی ن ویں قوت کا مقیاس ہے اور چونکہ ہر عدد کا مقیاس حقیقی اور مثبت ہوتا ہے اس لیے $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کا مقیاس $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$ ہے جہاں $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$، مقیاس ر کا حقیقی مثبت ن واں جذر ہے۔ فرض کرو کہ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی ایک قیمت $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\,(\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ})$ ہے تو

$$\text{ر}\,(\text{جم فہ} + \text{خ جب فہ})^{\text{ن}} = \text{ر}\,(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})$$

یا

$$\text{جم ن فہ} + \text{خ جب ن فہ} = \text{جم ط} + \text{خ جب ط} \qquad (233)$$

اس لیے $\text{جم ن فہ} = \text{جم ط}$، $\text{جب ن فہ} = \text{جب ط}$

یا

$$\text{ن فہ} = \text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi$$

جہاں س کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے بشمول صفر۔ پس

$$(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$$

کی ایک قیمت ہے $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right\}$

کیونکہ اس جملہ کی ن ویں قوت لا + خ ما کے مساوی ہے۔ اوپر کے استدلال سے یہ ظاہر ہے کہ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی ہر قیمت مندرجۂ بالا شکل کی ہونی چاہیے۔ اگر س کو قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ن-۱ دی جائیں تو اِن قیمتوں میں سے ہر ایک کے لیے

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}$$

کی قیمت مختلف ہوگی کیونکہ س کی دو قیمتوں س_1، س_2 کے لیے اس جملہ کی مساوی قیمتیں ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیئے

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_1\pi}{\text{ن}} = \text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_2\pi}{\text{ن}}$$

اور

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_1\pi}{\text{ن}} = \text{جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_2\pi}{\text{ن}}$$

یعنی

$$\frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_1\pi}{\text{ن}} = ۲\text{ک}\,\pi = \frac{\text{ط} + ۲\,\text{س}_2\pi}{\text{ن}}$$

یا

$$\text{س}_1 - \text{س}_2 = \text{ن}\,\text{ک}$$

جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ لیکن یہ ناممکن ہے اگر س_1 اور س_2 دونوں مختلف اور ن سے کم ہیں۔ اس لیے مذکورہ بالا قیمتیں سب کی سب مختلف ہیں۔

اگر ہم س کو دوسری قیمتیں دیں جو صفر اور ن − ۱ کے درمیان واقع نہ ہوں تو ان سے $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی کوئی اور قیمتیں حاصل نہیں ہونگی کیونکہ اگر س کی ایسی کوئی قیمت س_2 ہو تو صفر اور ن − ۱ کے درمیان ایک عدد س_1 کا معلوم کرنا ہمیشہ ممکن ہے ایسا کہ $\text{س}_1 - \text{س}_2$، ن کا ایک ضعف ہو، اور اس لیے جملہ بالا کی قیمت $\text{س} = \text{س}_1$ کے لیے وہی ہے جو $\text{س} = \text{س}_2$ کے لیے ہے۔

پس، ہم دیکھتے ہیں کہ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)،\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$\ldots،\ \sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{ط} + ۲(\text{ن} - ۱)\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط} + ۲(\text{ن} - ۱)\pi}{\text{ن}}\right\}$$

سے ملتی ہیں جو ن اعداد پر مشتمل ہے اور جس میں $\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}$ حقیقی اور مثبت ہے۔

۱۸۲ — اگر لا + خ ما کی دلیل کی صدر قیمت ط ہو یعنے دلیل کی وہ قیمت جو $-\pi$ اور π کے درمیان واقع ہے تو ہم $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی صدر قیمت کو جملہ

(234)

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ر}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)$$

تصور کر سکتے ہیں۔ اب جملوں جم ط + خ جب ط، جم (ط + ۲π) + خ جب (ط + ۲π)، ... کے ن ویں جذروں کی صدر قیمتیں $\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$، $\text{جم}\,\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}+2\pi}{\text{ن}}$، ... متصور ہو سکتی ہیں۔ اس لیے $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی مختلف قیمتیں ر اور ط کے متناظر جملوں کی صدر قیمتیں ہیں جب کہ دلیل ط کی ن مختلف قیمتیں لیجائیں۔ $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی صدر قیمت سے وہ جملہ مراد ہے جس میں ط کی صدر قیمت لی گئی ہے۔

اگر ا ایک مثبت حقیقی مقدار ہے تو $\text{ا}^{\frac{1}{2}}$ کی دو قیمتیں $\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,0 + \text{خ جب}\,0)$ اور $\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,\pi + \text{خ جب}\,\pi)$ ہیں یعنے $\sqrt{\text{ا}}$ اور $-\sqrt{\text{ا}}$ جہاں ا کا مثبت جذر المربع $\sqrt{\text{ا}}$ ہے،

$(-\text{ا})^{\frac{1}{2}}$ کی قیمتیں، جس میں ط = π، یہ ہیں $\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,\frac{1}{2}\pi + \text{خ جب}\,\frac{1}{2}\pi)$،

$\sqrt{\text{ا}}\,(\text{جم}\,\frac{3}{2}\pi + \text{خ جب}\,\frac{3}{2}\pi)$

یا خ$\sqrt{\text{ا}}$، −خ$\sqrt{\text{ا}}$؛ $\text{ا}^{\frac{1}{2}}$ کی صدر قیمت $\sqrt{\text{ا}}$ ہے اور $(-\text{ا})^{\frac{1}{2}}$ کی صدر قیمت خ$\sqrt{\text{ا}}$

۱۸۳ — دفعہ ۱۸۱ کے جملوں میں ر = ۱، ط = ۰ رکھنے سے

ایک کے ن ویں جذر حاصل ہوتے ہیں اور اس لیے یہ جذر ہیں

$$\text{۱، جم}\,\frac{2\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}\text{، جم}\,\frac{4\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{4\pi}{\text{ن}}\text{، } \ldots$$

$$\ldots\text{، جم}\,\frac{2(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{2(\text{ن}-1)\pi}{\text{ن}}$$

اب اگر ہم جذر $\text{جم}\,\frac{2\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{2\pi}{\text{ن}}$ کو سہ سے تعبیر کریں تو اوپر کے سب جذر

$$\text{۱، سہ، سہ}^2\text{، } \ldots \text{ سہ}^{\text{ن}-1}$$

سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اب چونکہ

$$\text{جم}\,\frac{\text{ط}+2\text{ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}+2\text{ر}\pi}{\text{ن}} = \left(\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}\right)$$
$$\times\left(\text{جم}\,\frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\,\frac{2\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)$$

اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $(\text{لا} + \text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی صدر قیمت $\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}$ سے تعبیر ہو تو $(\text{لا}+\text{خ ما})^{\frac{1}{\text{ن}}}$ کی تمام قیمتیں سلسلہ

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}\text{، سہ}\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}\text{، سہ}^2\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}\text{، }\ldots\text{، سہ}^{\text{ن}-1}\sqrt[\text{ن}]{\text{لا}+\text{خ ما}}$$

سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثالیں

(۱) $(-1)^{\frac{1}{5}}$ اور نیز $(-1)^{\frac{1}{6}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(۲) $(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{4}}$ کی تمام قیمتیں معلوم کرو۔

(235) ۱۸۴ ـــــ اب ہم یہ دکھائینگے کہ ایک مختلف عدد کے ن ویں جذروں کو ہندسی طور پر کس طرح تعبیر کیا جا سکتا ہے؟ اس ہندسی طریقہ سے ن ویں جذر کی ن مختلف قیمتوں کے وجود کا خود بخود ثبوت مل جائیگا۔ عمومیت کو نقصان پہنچائے بغیر ہم مقیاس کو ایک (اکائی) فرض کر سکتے ہیں، اس طرح ہمیں جملہ (جم ط + خر جب ط)$^{\frac{1}{ن}}$ کی قیمتیں تعبیر کرنی ہیں۔

فرض کرو کہ ایک نقطہ پ، ا سے جس پر ط = ۰، چلتا ہے اور اکائی نصف قطر کا دائرہ مرتسم کرتا ہے، تب پ کے کسی محل میں جس کے لیے زاویہ پ و ا، جو و پ سے مرتسم ہوا ہے ط ہے نقطہ پ، جملہ جم ط + خر جب ط کو تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک دوسرا نقطہ پ، ا سے اسی آن چلتا ہے جس آن پ نکلا ہے اور فرض کرو کہ اس کی زاوئی رفتار ہمیشہ پ کی رفتار کا $\frac{1}{ن}$ رہتی ہے اور اس لیے زاویہ پ و ا ہمیشہ $\frac{ط}{ن}$ کے مساوی رہتا ہے۔ تب پ، جم $\frac{ط}{ن}$ + خر جب $\frac{ط}{ن}$ کو تعبیر کرتا ہے۔ جب، پ اولاً کسی محل پ۱ پر پہنچتا ہے تو

فرض کرو کہ پ، پ۱ پر پہنچتا ہے، تب زاویہ پ۱ و ا، زاویہ پ۱ و ا کا ن گنا ہے۔ اس لیے پ۱ اُس عدد کی ن ویں قوت کو تعبیر کرتا ہے جو پ۱ سے تعبیر ہوتا ہے، یا اس کے بالعکس پ۱، (جم ط۱ + خ جب ط۱) کے ن ویں جذر کو تعبیر کرتا ہے۔ اب فرض کرو کہ پ دائرہ کے گرد حرکت کرتا ہے تا آنکہ وہ پھر پ۱ پر پہنچتا ہے اور اس طرح زاویہ ط۱ + ۲ π مرتسم کرتا ہے، تب پ، پ۲ پر پہنچیگا جہاں پ۲ و ا = (ط۱ + ۲ π)/ن ۔ پھر اگر پ دوسری مکمل گردش کرے اور پ۱ پر پہنچے تو پ، پ۳ پر ہوگا جہاں پ۳ و ا = (ط۱ + ۴ π)/ن اور علیٰ ہذا القیاس۔ نقطے پ۱، پ۲، ... ، پن ایک ایسے منتظم کثیر الاضلاع کے راس ہونگے جو اِس دائرہ کے اندر کھینچا گیا ہو اور جس کے ضلعوں کی تعداد ن ہو۔ جب پ، و کے گرد ن سے زیادہ مکمل گردشیں کرتا ہے تو نقطہ پ، محلوں پ۱، پ۲، پ۳، ... پر مکرر پہنچتا ہے۔ نقطوں پ۱، پ۲، ... ، پن میں سے ہر نقطہ، (جم ط۱ + خ جب ط۱)$^{\frac{1}{ن}}$ کی ایک قیمت کو تعبیر کرتا ہے کیونکہ اِن نقطوں میں سے کسی نقطہ سے جو جملہ تعبیر ہوتا ہے اُس کی ن ویں قوت وہ جملہ ہے جو نقطہ پ۱ سے تعبیر ہوتا ہے۔ نقطہ پ۱ اُس قیمت کو تعبیر کرتا ہے جو چھوٹی سے چھوٹی دلیل ط۱ کے لیے ہے۔ پس ہمیں (جم ط۱ + خ جب ط۱)$^{\frac{1}{ن}}$ کی ن قیمتیں حاصل ہو چکیں اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ قیمتیں، جم $\frac{ط_۱ + ۲ س \pi}{ن}$ + خ جب $\frac{ط_۱ + ۲ س \pi}{ن}$ کی مختلف قیمتیں ہیں جبکہ س = ۰، ۱، ۲، ... ، ن - ۱

۱۸۵ ـــــ کسی عدد لا + خ ما کے ن ویں جذروں کو ہندسی طور پر حاصل کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ (۱) ہم ایک زاویہ کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کر سکیں اور (۲) ایک دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچ سکیں، اور (۳) مقیاس کو ہندسی طور پر تعبیر کرنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ ہم ایک خطِ مستقیم بنا سکیں جس کا طول ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم کے طول کا ن واں جذر ہو۔ اکائی (ایک) کے تمام ن ویں جذر

(236)

معلوم کرنے کے لیے صرف یہ ضروری ہے کہ ان ہندسی سوالات میں سے دوسرے کو حل کیا جائے کیونکہ اس صورت میں وہ زاویہ صفر ہے جس کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرنا ہوتا ہے۔ پس ایک دیے ہوئے دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع کھینچنے کا سوال اِس سوال کے مماثل ہے کہ مساوات $لا^ن - ۱ = ۰$ کی اصلوں کی عددی قیمتیں حاصل کی جائیں۔ یہ ہندسی سوال حسب ذیل صورتوں میں ایک طریقہ سے حل ہو سکتا ہے جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائروں کی ساخت کا عمل شامل ہے:۔

(۱) جبکہ ن، ۲ کی کوئی قوت ہو　　مثلاً جبکہ ن = ۴، ۸، ۱۶، ۳۲

(۲) جبکہ ن، شکل $۲^م + ۱$ کا ایک مفرد عدد ہو مثلاً جبکہ ن = ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷

اس کو گاس نے اپنی کتاب *"Disquisitiones arith."* میں ثابت کیا تھا۔

(۳) جبکہ ن، شکل $۲^م + ۱$ کے متعدد مفرد عددوں اور ۲ کی کسی قوت کا حاصل ضرب ہو مثلاً جبکہ ن = ۱۵، ۸۵، ۲۵۵

گاس کے مسئلہ کا ثبوت اگر ہم دینے بیٹھیں تو عددوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہمیں جانا ہوگا؛ تاہم ہم نے دفعہ ۸۵ مثال (۴) میں مخصوص صورت ن = ۱۷ پر بحث کی ہے جہاں جب $\frac{\pi}{۱۷}$ کو ایک ایسی شکل میں جو جذروں پر مشتمل ہے معلوم کیا گیا ہے۔

(237)

ڈیموائر کا مسئلہ

۱۸۶ــــــ م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے جم م طہ + خ جب م طہ، (جم طہ + خ جب طہ)م کی ایک قیمت ہے۔

یہ مسئلہ جو ڈیموائر کے مسئلہ کے نام سے مشہور ہے دفعات ۱۸۰ اور ۱۸۱ میں اِن دو صورتوں م = ن اور م = $\frac{۱}{ن}$ کے لیے ثابت

کیا جا چکا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ ثبوت کی تکمیل کے لیے ہمیں اُن صورتوں پر غور کرنا ہے (۱) جبکہ $م = \frac{ف}{ق}$، یعنی جبکہ م ایک مثبت کسر ہو، (۲) جبکہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہو اور آخر الامر (۳) جبکہ م کوئی منفی حقیقی عدد ہو۔ یہ ظاہر ہے کہ $(جم\,ط + خ\,جب\,ط)^{\frac{ف}{ق}}$ $= (جم\,ف\,ط + خ\,جب\,ف\,ط)^{\frac{۱}{ق}}$ اور اس کی ایک قیمت $جم\,\frac{ف\,ط}{ق} + خ\,جب\,\frac{ف\,ط}{ق}$ ہے۔ اس لیے مسئلہ بالا درست ہے جبکہ م ایک مثبت منطق عدد ہو۔

یہ ذہن نشین رہے کہ $(جم\,ط + خ\,جب\,ط)^{\frac{ف}{ق}}$ کی قیمتیں سب کی سب جملہ

$$جم\,\frac{ف(ط + ۲س\pi)}{ق} + خ\,جب\,\frac{ف(ط + ۲س\pi)}{ق}$$

سے ملتی ہیں جس میں س = ۰، ۱، ۲، ...، ق-۱ اور $\frac{ف}{ق}$ اپنی مختصر ترین شکل میں ایک منطق کسر ہو۔

اگر م ایک منطق عدد نہیں ہے تو اس کی تعریف ہمیشہ نامحدود مختلف طریقوں سے منطق عددوں $م_۱$، $م_۲$، ...، $م_س$، ... کے ایک مستدق تواتر کی انتہا کے طور پر کی جا سکتی ہے۔ ایسے مستدق تواتر میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اگر صہ اختیاری طور پر انتخاب کردہ کوئی منطق عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو س ہمیشہ معلوم ہو سکتا ہے ایسا کہ $م_س$ اپنے بعد والوں $م_{س+۱}$، $م_{س+۲}$، ... میں سے ہر ایک سے مطلق قیمت میں اس قدر فرق رکھے جو صہ سے کم ہو۔ اگر ر کوئی مثبت حقیقی عدد ہے تو رام کی

خاص قیمت کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ مستدق تواتر $ر_{۱}^{م}$، $ر_{۲}^{م}$، $ر_{۳}^{م}$، ...، $ر_{س}^{م}$، ... کی انتہا ہے جہاں ان میں سے ہر عدد حقیقی اور مثبت ہے اور $ر_{س}^{م}$ اپنی خاص قیمت رکھتا ہے۔ یہ معلوم[1] ہے کہ یہ تواتر مستدق ہے اور اس کی ایک انتہا ہے جو منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر کے تابع نہیں ہے جو (تواتر) غیر منطق عدد م کی تعریف کے لیے استعمال ہوا ہے۔

اگر ی، ملتف عدد ر (جم ط + خ جب ط) کو تعبیر کرے تو $ی^{م}$ کی ایک قیمت کی تعریف جبکہ م ایک غیر منطق عدد ہو اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ تواتر $ر_{۱}^{م}(جم\ ط + خ\ جب\ ط)^{م_{۱}}$، $ر_{۲}^{م}(جم\ ط + خ\ جب\ ط)^{م_{۲}}$، ...، $ر_{س}^{م}(جم\ ط + خ\ جب\ ط)^{م_{س}}$، ... کی انتہا ہے جس میں $ر_{س}^{م}$ اپنی خاص قیمت رکھتا ہے اور $م_{س}$ کی تمام قیمتوں کے جواب میں تناظر قیمتیں $(جم\ ط + خ\ جب\ ط)^{م_{س}}$ کو دی گئی ہیں۔ اس تعریف کے جواب میں $ی^{م}$ کی ایک قیمت تواتر $ر_{۱}^{م}(جم\ م_{۱}ط + خ\ جب\ م_{۱}ط)$، $ر_{۲}^{م}(جم\ م_{۲}ط + خ\ جب\ م_{۲}ط)$، ...، $ر_{س}^{م}(جم\ م_{س}ط + خ\ جب\ م_{س}ط)$، ... کی انتہا ہے۔ چونکہ $ر_{س}^{م} \to ر^{م}$ اور $جم\ م_{س}ط + خ\ جب\ م_{س}ط \to جم\ م\ ط + خ\ جب\ م\ ط$ (اس امر کی وجہ سے کہ جم م ط اور جب م ط، م کے مسلسل تفاعل ہیں) ہم دیکھتے ہیں کہ $ی^{م}$ کی ایک قیمت $ر^{م}(جم\ م\ ط + خ\ جب\ م\ ط)$ ہے، اور $(جم\ ط + خ\ جب\ ط)^{م}$ کی ایک قیمت جم م ط + خ جب م ط ہے۔

(238)

---

[1] اس کے ثبوت کے لیے مصنف کی کتاب Theory of functions of a real variable کا صفحہ ۴۴ دیکھو۔ اس کتاب کے پہلے باب میں غیر منطق عددوں کے نظریہ پر مکمل بحث کی گئی ہے۔

پس ڈیموائر کا مسئلہ ایک مثبت غیر منطق قوت نما کے لیے ثابت ہو چکا۔

$(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{۱}{م}}$ کی عام قیمتیں ہیں

$$\text{جم م}\,(\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi) + \text{خ جب م}\,(\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi)$$

جس میں س سے کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد تعبیر ہوتا ہے۔ چونکہ م(س۱-س۲) ہرگز ایک صحیح عدد نہیں ہو سکتا جبکہ م غیر منطق ہو ہم دیکھتے ہیں کہ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{۱}{م}}$ کی قیمتوں کا جٹ نامحدود طور پر بڑا ہے۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ $\text{ی}^{\frac{۱}{م}}$ کی تعریف جس کی بموجب اس کی قیمتیں جملہ

$$\text{ر}^{\frac{۱}{م}}\left\{\text{جم م}\,(\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi) + \text{خ جب م}\,(\text{ط} + ۲\,\text{س}\,\pi)\right\}$$

کی قیمتیں ہیں ایسی ہے کہ قوت نماؤں کے وہ قوانین جو حقیقی قوت نماؤں پر اطلاق پذیر ہیں غیر منطق قوت نماؤں کے لیے بھی اُسی طرح درست ہیں۔
اگر م منطق یا غیر منطق منفی عدد ـ ک ہو تو

$$(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{۱}{م}} = \frac{۱}{(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{ک}{م}}}$$

اور اس کی ایک قیمت ہمیشہ

$$\frac{۱}{\text{جم ک ط} + \text{خ جب ک ط}} \quad \text{یا} \quad \text{جم ک ط} - \text{خ جب ک ط}$$

ہے جو جم م ط + خ جب م ط کے مساوی ہے۔ اس طرح ڈیموائر کا مسئلہ کسی منفی قوت نما کے لیے درست ہے۔

مسئلہ ـــــ ۱۸۷

(جم ط$_1$ + خ جب ط$_1$)(جم ط$_2$ + خ جب ط$_2$) .... (جم ط$_ن$ + خ جب ط$_ن$)

= جم(ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) + خ جب(ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$)

سے، جو ڈیموائر کے مسئلہ کے ثبوت میں استعمال ہوا ہے دفعہ ۴۹ کے مسئلوں (۲۸)، (۲۹)، (۳۰) کا ثبوت حاصل ہوتا ہے۔ ہم اس متماثلہ کی دائیں جانب کے جملہ کو اس شکل

جم ط$_1$ جم ط$_2$ ... جم ط$_ن$ (۱ + خ مس ط$_1$)(۱ + خ مس ط$_2$) ... (۱ + خ مس ط$_ن$)

میں لکھ سکتے ہیں۔ پس اس متماثلہ کی طرفین کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

جم(ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) = جم ط$_1$ جم ط$_2$ ... جم ط$_ن$ (۱ − م$_2$ + م$_4$ − ...)،

جب(ط$_1$ + ط$_2$ + ... + ط$_ن$) = جم ط$_1$ جم ط$_2$ ... جم ط$_ن$ (م$_1$ − م$_3$ + م$_5$ − ...)،

(239) جہاں م$_س$ سے وہ مجموعہ تعبیر ہوتا ہے جو ن مماسوں میں سے س، س مماسوں کے حاصل ضربوں کا ہے۔

دفعہ ۵۱ کے مسئلے (۳۹)، (۴۰)، (۴۳) مسئلہ جم ن ط + خ جب ن ط = (جم ط + خ جب ط)^ن سے فوراً حاصل ہوتے ہیں اگر اس مساوات کی بائیں جانب کو مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلایا جائے اور طرفین کے خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھا جائے۔

اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (جم ط + خ جب ط)^ن = جم ن ط + خ جب ن ط اور اس لیے نیز (جم ط − خ جب ط)^ن = جم ن ط − خ جب ن ط۔ ان سے ہمیں ضابطے

حاصل ہوتے ہیں جم ن طہ = $\frac{1}{2}$(جم طہ + خر جب طہ)^{ن} + $\frac{1}{2}$(جم طہ - خر جب طہ)^{ن} ،

خر جب ن طہ = $\frac{1}{2}$(جم طہ + خر جب طہ)^{ن} - $\frac{1}{2}$(جم طہ - خر جب طہ)^{ن}

ان میں سے پہلی مساوات فی الحقیقت اس واقعہ کا اظہار ہے جس کا ذکر دفعہ ۱۸۱ میں آچکا ہے کہ

۱ + لا جم طہ + لا^{۲} جم ۲ طہ + ... + لا^{ن} جم ن طہ + ...

ایک متوالی سلسلہ ہے جس کا رشتہ کا پیمانہ ۱ - ۲ لا جم طہ + لا^{۲} ہے۔ جم ن طہ کو ع$_{ن}$ سے تعبیر کرو تو ع$_{ن}$ - ۲ جم طہ × ع$_{ن-۱}$ + ع$_{ن-۲}$ = ۰۔ اِس مساوات کو حل کرنے کے لیے مان لو ع$_{ن}$ = ا ک^{ن} جیسا کہ بالعموم ایسی صورتوں میں کیا جاتا ہے تو ک کے لیے ہمیں دو درجی مساوات ک^{۲} - ۲ ک جم طہ + ۱ = ۰ حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں ک = جم طہ ± خر جب طہ ہیں،

پس ع$_{ن}$ = ا(جم طہ + خر جب طہ)^{ن} + ب(جم طہ - خر جب طہ)^{ن}

اُس مساوات کا مکمل حل ہے جو ع$_{ن}$ میں ہے۔ ن = ۱ اور ن = ۲ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا = ب = $\frac{1}{2}$ اور اس طرح وہ جملہ حاصل ہوتا ہے جو جم ن طہ کے لیے اُوپر دیا گیا ہے۔ اسی طرح وہ جملہ معلوم ہو سکتا ہے جو جب ن طہ کے لیے ہے۔

اجزائے ضربی

۱۸۸۔ اب ہم لا^{ن} - (ا + خر ب) کو لا کے لحاظ سے ن خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کر سکتے ہیں۔ یہ جملہ معدوم ہوتا ہے اگر لا = (ا + خر ب)$^{\frac{1}{ن}}$

کی قیمتوں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو، اگر اس جملہ کی ن قیمتیں ق₁، ق₂، ق₃، ... ، قن سے تعبیر ہوں تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے

$$لا^ن - (ا + خ ب) = (لا - ق_1)(لا - ق_2) \ldots (لا - ق_ن)$$

کیونکہ جب، لا - قس = ۰ تو لاَن - (ا + خ ب) معدوم ہوتا ہے اور اس لیے لا - قس ایک جزو ضربی بغیر باقی کے ہونا چاہیے۔ اس طرح ہمیں ن مختلف اجزائے ضربی حاصل ہوتے ہیں اور ظاہر ہے کہ ان سے زیادہ اجزائے ضربی نہیں ہو سکتے۔ رکھو ا = ر جم ط، ب = ر جب ط تو لاَن - (ا + خ ب) کے اجزائے ضربی ہو جاتے ہیں

$$\prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ لا - غ \left(جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} + خ جب \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} \right) \right\}$$

جہمیں $غ = \sqrt[ن]{ر} = (ا^۲ + ب^۲)^{\frac{1}{۲ن}}$

اس نتیجے سے متعدد جملوں کے اجزائے ضربی جو ساتویں باب میں حاصل کیے جا چکے ہیں ماخوذ ہو سکتے ہیں۔

(240)

(۱) فرض کرو ا = ۱، ب = ۰ تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$لا^ن - ۱ = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا - جم \frac{۲ س \pi}{ن} - خ جب \frac{۲ س \pi}{ن} \right)،$$

اور چونکہ $\frac{۲ س \pi}{ن} + \frac{۲ (ن - س) \pi}{ن} = ۲ \pi$

اس لیے اگر ن طاق ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}}-۱=(\text{لا}-۱)\prod_{\text{س}=۱}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\left(\text{لا}-\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}-\text{خ}\,\text{جب}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}+\text{خ}\,\text{جب}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}\right)$$

$$=(\text{لا}-۱)\prod_{\text{س}=۱}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\left(\text{لا}^{۲}-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}+۱\right)$$

اور اگر ن جفت ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ن}}-۱=(\text{لا}-۱)(\text{لا}+۱)\prod_{\text{س}=۱}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(\text{لا}^{۲}-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ن}}+۱\right)$$

(۲) فرض کرو ا = −۱، ب = ۰. تو ہمیں ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{لا}^{\text{ن}}+۱=(\text{لا}+۱)\prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۳)}\left(\text{لا}^{۲}-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\,\text{س}+۱)\pi}{\text{ن}}+۱\right)$$ جبکہ ن طاق ہو،

اور $$\text{لا}^{\text{ن}}+۱=\prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(\text{لا}^{۲}-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{(۲\,\text{س}+۱)\pi}{\text{ن}}+۱\right)،$$ جبکہ ن جفت ہو۔

(۳) $\text{لا}^{۲\text{ن}}-۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ط}+۱$

$$=(\text{لا}^{\text{ن}}-\text{جم}\,\text{ط}-\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط})(\text{لا}^{\text{ن}}-\text{جم}\,\text{ط}+\text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط})$$

$$=\prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\text{ن}-۱}\left(\text{لا}-\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi+\text{ط}}{\text{ن}}-\text{خ}\,\text{جب}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi+\text{ط}}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi+\text{ط}}{\text{ن}}+\text{خ}\,\text{جب}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi+\text{ط}}{\text{ن}}\right)$$

$$=\prod_{\text{س}=۰}^{\text{س}=\text{ن}-۱}\left(\text{لا}^{۲}-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi+\text{ط}}{\text{ن}}+۱\right)$$

یا لا کی بجائے $\frac{لا}{ما}$ رکھنے اور طرفین کو $ما^{ن}$ سے ضرب دینے سے

$$لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} ما^{ن} جم ط + ما^{۲ن}$$

$$= \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا^{۲} - ۲ لا ما جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} + ما^{۲} \right)$$

(۴) اس آخری نتیجہ سے ہم اخذ کرتے ہیں

$$لا^{ن} + لا^{-ن} - ۲ جم ط = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left(لا + لا^{-۱} - ۲ جم \frac{ط + ۲ س \pi}{ن} \right)$$

رکھو $لا = جم فہ + خ جب فہ$، تو $لا^{-۱} = جم فہ - خ جب فہ$

اور $لا^{ن} = جم ن فہ + خ جب ن فہ$، $لا^{-ن} = جم ن فہ - خ جب ن فہ$

اس لیے، طہ کو ن طہ میں بدلنے سے،

$$جم ن فہ - جم ن ط = ۲^{ن-۱} \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ جم فہ - جم \left(ط + \frac{۲ س \pi}{ن} \right) \right\}$$

(241)

دائرہ کے خواص

۱۸۹ ــــ دفعہ ماسبق کے اجزائے ضربی والے ضابطوں کے ذریعہ دائرہ کے بعض مشہور خواص حاصل ہو سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ نصف قطر د کے ایک دائرہ میں ن ضلعوں والا ایک کثیر الاضلاع $ا_۱ ا_۲ .... ا_ن$ کھینچا گیا ہے اور فرض کرو کہ دائرہ کے مستوی میں پ کوئی نقطہ ہے

اور اس کا فاصلہ دائرہ کے مرکز و سے ج ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ پ و $ا_۱$ کو ط سے تعبیر کیا گیا ہے، تب زاویے پ و $ا_۲$، پ و $ا_۳$... علی الترتیب ط + ۲π\ن، ط + ۴π\ن ... ہیں۔ اس لیے

$$پ ا_۱^۲ \times پ ا_۲^۲ \times پ ا_۳^۲ \ldots پ ا_ن^۲ = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ ا^۲ - ۲ ا ج \text{ جم} \left(ط + \frac{۲ س π}{ن} \right) + ج^۲ \right\}$$

پس ہمیں مسئلہ حاصل ہوتا ہے

$$پ ا_۱^۲ \times پ ا_۲^۲ \times \ldots \times پ ا_ن^۲ = ا^{۲ن} - ۲ ا^ن ج^ن \text{ جم } ن ط + ج^{۲ن}$$

جو دائرہ کی ڈیموائر کی **خاصیت** کے نام سے مشہور ہے۔

اس صورت میں جبکہ پ محیط پر ہو مسئلہ بالا ہو جاتا ہے

$$پ ا_۱ \times پ ا_۲ \times \ldots \times پ ا_ن = ۲ ا^ن \text{ جب } \frac{۱}{۲} ن ط$$

اس صورت میں جبکہ پ، نصف قطر و $ا_۱$ پر ہو ط صفر ہوتا ہے اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$پ ا_۱ \times پ ا_۲ \times \ldots \times پ ا_ن = ا^ن \sim ج^ن$$

نیز اگر پ، زاویہ $ا_ن$ و $ا_۱$ کے ناصف پر واقع ہو تو ط = $\frac{π}{ن}$ اور مسئلہ ہو جاتا ہے

$$پ ا_۱ \times پ ا_۲ \ldots پ ا_ن = ا^ن + ج^ن$$

یہ آخری دو صورتیں دائرہ کی کوٹ (Cote) کی خاصیتیں کہلاتی ہیں۔

مثالیں

۱۹۰ —

(۱) $\text{لا}^{\text{م}-۱} \Big/ (۱+\text{لا}^{\text{ن}})$ کو جزوی کسور میں بیان کرو جہاں م ایک صحیح عدد ہے ن سے چھوٹا۔

اگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}}+۱=۰$ کی ایک اصل عہ ہو تو جزو ضربی لا ۔ عہ کے جواب میں جزوی کسر ہے $\frac{\text{عہ}^{\text{م}-۱}}{\text{ن}\,\text{عہ}^{\text{ن}-۱}} \times \frac{۱}{\text{لا}-\text{عہ}}$ یا $\frac{۱}{\text{ن}}\,\frac{\text{عہ}^{\text{م}-\text{ن}}}{\text{لا}-\text{عہ}}$، اور اس لیے عہ کی مزدوج قیمتوں کے جواب میں جو دو کسریں ہیں ان کو باہم لینے سے ہمیں کسر حاصل ہوتی ہے

$$\frac{۱}{\text{ن}}\;\frac{۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}(\text{ن}-\text{م})\pi-۲\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}(\text{ن}-\text{م}+۱)\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}$$

$$\text{یا}\;\frac{۲}{\text{ن}}\;\frac{\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}}\pi-\text{لا}\,\text{جم}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}$$

(242)

اگر ن طاق ہو تو مزید کسر $\frac{(-۱)^{\text{ن}-\text{م}}}{\text{ن}(\text{لا}+۱)}$ حاصل ہوتی ہے۔ پس اگر ن طاق ہے تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{\text{لا}^{\text{ن}}+۱}=\frac{(-۱)^{\text{ن}-\text{م}}}{\text{ن}(\text{لا}+۱)}+\frac{۲}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۳)}\frac{\text{جم}(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}}\pi-\text{لا}\,\text{جم}(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}$$

اور اگر ن جفت ہے تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{\text{لا}^{\text{ن}}+۱}=\frac{۲}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۱)}\frac{\text{جم}(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}-۱}{\text{ن}}\pi-\text{لا}\,\text{جم}(۲\text{ر}+۱)\frac{\text{م}}{\text{ن}}\pi}{\text{لا}^۲-۲\,\text{لا}\,\text{جم}\,\frac{۲\text{ر}+۱}{\text{ن}}\pi+۱}$$

(۲) $\frac{\text{لا}^{\text{م}-۱}}{\text{لا}^{\text{ن}}-۱}$ کو جزوی کسروں میں بیان کرو اگر م، ن سے چھوٹا ہو۔

(۳) ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط}}{\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + \text{ا}^{۲\text{ن}}} = \frac{۱}{\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}} \sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \frac{\text{لا} - \text{ا}\,\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)}{\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا}\,\text{ا}\,\text{جم}\left(\text{ط} + \frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^۲}$$

کسر $\frac{\text{ن}\left(\text{لا}^{۲\text{ن}-۱} - \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}\,\text{جم ن ط}\right)}{\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ط} + \text{ا}^{۲\text{ن}}}$ کا نسب نما اجزائے ضربی میں تحلیل ہو سکتا ہے اور پھر ہر جزو ضربی کے متناظر کسر مثال (۱) کے مطابق معلوم ہو سکتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ

$$(\text{ا})\quad \frac{\text{ن جب ن ط}}{\text{جب ط}} \times \frac{۱}{\text{جم ن ط} - \text{جم ن ف}} = \sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \frac{۱}{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{ف} + ۲\text{ر}\pi\backslash\text{ن}\right)}$$

$$(\text{ب})\quad \frac{\text{ن}^۲\,\text{جب ن ط جب ن ف}}{\text{جب ط}} \times \frac{۱}{\left(\text{جم ن ط} - \text{جم ن ف}\right)^۲} = \sum_{\text{ر}=۰}^{\text{ر}=\text{ن}-۱} \frac{\text{جب}\left(\text{ف} + ۲\text{ر}\pi\backslash\text{ن}\right)}{\left\{\text{جم ط} - \text{جم}\left(\text{ف} + ۲\text{ر}\pi\backslash\text{ن}\right)\right\}^۲}$$

(ا) کی دائیں جانب کا جملہ، جم ط کا ایک جبری تفاعل ہے اور اس لیے مثال (۱) کے مطابق جزوی کسروں میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ مساوات (ب)، (ا) کی طرفین کو ف کے لحاظ سے تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے یا دوسرے الفاظ میں ف کو ف + ہ میں بدل کر مساوات کی طرفین میں ہ کے سروں کو مساوی رکھنے سے

(۵) اگر جم ط + جم ف + جم پ = ۰، اور جب ط + جب ف + جب پ = ۰

تو ثابت کرو کہ جم ۳ ط + جم ۳ ف + جم ۳ پ − ۳ جم (ط + ف + پ) = ۰،

اور جب ۳ ط + جب ۳ ف + جب ۳ پ − ۳ جب (ط + ف + پ) = ۰

یہ اُس عام طریقہ کی ایک مثال ہے جو جبری مسئلوں میں حرفوں کی بجائے مختلف قیمتیں رکھ کر مثلثی مسئلوں کو اخذ کرنیکا ہے۔ اگر ا + ب + ج = ۰ تو ا^۳ + ب^۳ + ج^۳ − ۳ ا ب ج = ۰ ؛ فرض کرو ا = جم ط + خ جب ط، ب = جم فہ + خ جب فہ، ج = جم پہ + خ جب پہ تو گویا ہمیں یہ دیا گیا ہے کہ اگر

(جم ط + جم فہ + جم پہ) + خ (جب ط + جب فہ + جب پہ) = ۰ ،

تو (جم ۳ ط + جم ۳ فہ + جم ۳ پہ) + خ (جب ۳ ط + جب ۳ فہ + جب ۳ پہ)

− ۳ {جم (ط + فہ + پہ) + خ جب (ط + فہ + پہ)} = ۰

اب دونوں مساواتوں میں حقیقی اور خیالی حصوں کو الگ الگ صفر کے مساوی رکھنے سے مسئلہ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

تیرہویں باب پر مثالیں

(243)

۱۔ ثابت کرو کہ ((۱ + جب فہ + خ جم فہ) / (۱ + جب فہ − خ جم فہ))^ن = جم (½ ن π − ن فہ) + خ جب (½ ن π − ن فہ)

۲۔ {جم ط − جم فہ + خ (جب ط − جب فہ)}^ن + {جم ط − جم فہ − خ (جب ط − جب فہ)}^ن

کی قیمت معلوم کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ ((۱ + لا)^ن − (۱ − لا)^ن) / ۲ لا

= ن (لا^۲ + مس^۲ π/ن) (لا^۲ + مس^۲ ۲π/ن) . . . (لا^۲ + مس^۲ مπ/ن)

جہاں $ر = \frac{1}{2}$ (ن-۱) یا $\frac{1}{2}$ ن-۱ اور ۱ مساوی ہے ایان کے بموجب اس کے کہ ن طاق ہے یا جفت -

۴ - ثابت کرو کہ

$$۴ جب \tfrac{1}{2}(ب-ج) جب \tfrac{1}{2}(ج-ع) جب \tfrac{1}{2}(ع-ب) \sum جب (ف ع + ق ب + ر ج)$$

$$= جب \left\{(ن+۱) ع - \tfrac{1}{2}(ب+ج)\right\} جب \tfrac{1}{2}(ب-ج) + \ldots$$

جہاں $\sum$ اُس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو ف، ق، ر کی تمام ایسی صحیح عددی قیمتوں (بشمول صفر) کے لیے لیا گیا ہے کہ ف + ق + ر = ن

۵ - اگر پ ایک مثبت صحیح عدد ہو اور مساوات $لا^{پ} = ۱$ کی اصلیں ع، ب، ج، ... ہوں اور ن، ایک سے بڑی کوئی عددی مقدار ہو تو ثابت کرو کہ $ع^{\frac{1}{ن}} + ب^{\frac{1}{ن}} + ج^{\frac{1}{ن}} + \ldots$ کی حقیقی قیمت صرف مس $\frac{\pi}{ن}$ \ مس $\frac{\pi}{پ ن}$ ہے -

۶ - اگر $(۱ + لا)^{ن} = ف_{.} + ف_{۱} لا + ف_{۲} لا^{۲} + \ldots$

تو ثابت کرو کہ $ف_{.} - ف_{۲} + ف_{۴} - \ldots = ۲^{\frac{1}{2}ن} جم \frac{1}{4} ن \pi$،

$$ف_{۱} - ف_{۳} + ف_{۵} - \ldots = ۲^{\frac{1}{2}ن} جب \tfrac{1}{4} ن \pi$$

۷ - اگر $لا_{۱}$، $لا_{۲}$، ...، $لا_{ن}$ وہ متناظر اصلیں ہوں جو مساوات $لا^{۲ن} - ۲ لا^{ن} جم ن ط + ۱ = ۰$ کی اصلوں کے مزدوج جوڑوں سے منتخب کی گئی ہیں اور اگر

$$ف(ع) = \sum_{ر=۱}^{ر=ن} لا_{ر} جم \left(ع + \frac{ر \pi}{ن}\right)$$

تو ثابت کرو کہ

$$ف(ع_{۱}) ف(ع_{۲}) \ldots ف(ع_{پ}) = \left(\tfrac{1}{2} ن\right)^{پ-۱} \left[ف\left\{\tfrac{1}{پ}(ع_{۱} + ع_{۲} + \ldots + ع_{پ})\right\}\right]^{پ}$$

۸ — اگر عہ، بہ، جہ، ضہ، صہ کوئی پانچ زاویے ہوں ایسے کہ ان کی جیوب التمام کا مجموعہ اور نیز ان کی جیوب کا مجموعہ صفر ہے تو ثابت کرو کہ

$$\sum \text{جم}\,4\,\text{عہ} = \tfrac{1}{2}\sum(\text{جم}\,2\,\text{عہ})^2 - \tfrac{1}{2}\sum(\text{جب}\,2\,\text{عہ})^2 ،$$

$$\sum \text{جب}\,4\,\text{عہ} = \sum \text{جب}\,2\,\text{عہ} \sum \text{جم}\,2\,\text{عہ}$$

۹ — اگر ن مقداروں مس لا، مس ۲ لا، مس 2^2 لا، ...، مس $2^{ن-1}$ لا میں سے ایک ایک، دو دو، تین تین، ...، ن ن، کے حاصل ضربوں کے مجموعے $م_1$، $م_2$، $م_3$، ...، $م_ن$ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$1 - م_2 + م_4 - م_6 + \cdots = 2^{ن}\,\text{جب لا جم}\,(2^{ن} - 1)\,\text{لا قم}\,2^{ن}\,\text{لا} ،$$

$$م_1 - م_3 + م_5 - \cdots = 2^{ن}\,\text{جب لا جب}\,(2^{ن} - 1)\,\text{لا قم}\,2^{ن}\,\text{لا}$$

۱۰ — اگر جم (بہ − جہ) + جم (جہ − عہ) + جم (عہ − بہ) = $-\frac{3}{2}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ن عہ} + \text{جم ن بہ} + \text{جم ن جہ}$$

صفر کے مساوی ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ن، ۳ کا ضعف ہو؛ اور اگر ن، ۳ کا ضعف ہے تو وہ ۳ جم $\frac{1}{3}$ ن (عہ + بہ + جہ) کے مساوی ہے۔

۱۱ — ثابت کرو کہ لا کی وہ قیمتیں جو مساوات

$$1 - \text{ن لا} + \frac{ن(ن-1)}{\lfloor 2}\,\text{لا}^2 - \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\lfloor 3}\,\text{لا}^3 + \cdots + (-1)^{\frac{1}{2}ن(ن+1)}\,\text{لا}^{ن} = 0$$

کو پورا کرتی ہیں یہ ہیں لا = مس $\frac{(۲ر+۱)\pi}{۴ن}$ جس میں ر کوئی صحیح عدد ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{ر=۱}^{ر=ن} (-۱)^{ر-۱} \frac{جب^۲ رعہ \; جم^{۲ن-۳} رعہ}{لا^۲ + مس^۲ رعہ} = \frac{(۲ن+۱) لا}{(۱+لا)^{۲ن+۱} - (۱-لا)^{۲ن+۱}}$$

جس میں عہ = $\frac{\pi}{۲ن+۱}$

۱۳۔ اگر ضِ‌س ر سے اُن حاصل ضربوں کا مجموعہ تعبیر ہو جو مقداروں

$$مس^۲ \pi \backslash (۲ن+۱)، مس^۲ ۲\pi \backslash (۲ن+۱)، \ldots، مس^۲ ن\pi \backslash (۲ن+۱)$$

میں سے س، س مقداروں کو لینے سے بنتے ہیں جبکہ مقدار مس^۲ ر$\pi \backslash (۲ن+۱)$ کو خارج کر دیا جائے اور اگر

$$ا_ر = (-۱)^{ر-۱} جب^۲ ر\pi \backslash (۲ن+۱) \times جم^{۲ن-۳} ر\pi \backslash (۲ن+۱)$$

تو ثابت کرو کہ $\sum ا_ر \times ضِ_س ر = ۰$ جہاں حاصل جمع ر کی ایک سے ن تک تمام قیمتوں کے لئے لیا گیا ہے اور س کی قیمت ایک سے ن تک کوئی بھی ہے۔

۱۴۔ ن ضلعوں والا ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ میں بنایا گیا ہے اور دائرہ کے محیط پر کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے راسوں تک وتر کھینچے گئے ہیں۔ اگر یہ وتر و$_۱$، و$_۲$، ....، و$_ن$ سے تعبیر ہوں (جس میں ابتدا اُس وتر سے کی گئی ہے جو قریب ترین راس تک کھینچا گیا ہے اور باقی دوسرے ترتیب وار لئے گئے ہیں) تو ثابت کرو کہ مقدار

$و_۱ و_۲ + و_۲ و_۳ + \cdots + و_{ن-۱} و_ن + و_ن و_۱$، اُس نقطہ کے محل پر منحصر نہیں ہے جس سے وتر کھینچے گئے ہیں۔

۱۵۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے راس جو ایک دائرہ میں کھینچا گیا ہے $ا_۱$، $ا_۲$، ... $ا_{۲ن+۱}$ ہیں اور $ا_۱$ اور $ا_{۲ن+۱}$ کے درمیان محیط پر کوئی نقطہ و ہے۔ ثابت کرو کہ طولوں $و ا_۱$، $و ا_۳$، ... $و ا_{۲ن+۱}$ کا مجموعہ طولوں $و ا_۲$، $و ا_۴$، ... $و ا_{۲ن}$ کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۱۶۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع کے مستوی میں پ کوئی نقطہ ہے اور اس نقطہ سے کثیر الاضلاع کے راسوں کے فاصلے $غ_۱$، $غ_۲$، ... $غ_ن$ ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{۱}^{ن} \frac{۱}{غ^۲} = \frac{ن}{ر^۲ - ا^۲} \times \frac{ر^{۲ن} - ا^{۲ن}}{ر^{۲ن} - ۲ ر^ن ا^ن \text{ جم } ن طہ + ا^{۲ن}}$$

جہاں ر دائرہ کا نصف قطر، ا نقطہ و سے مرکز کا فاصلہ ہے اور طہ وہ زاویہ ہے جو و پ، اُس نصف قطر کے ساتھ بناتا ہے جو کثیر الاضلاع کے کسی راس تک کھینچا گیا ہے۔

۱۷۔ خطوط مستقیم جن کے طول علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ... ن کے متناسب ہیں ایک مستقیم الاضلاع شکل بناتے ہیں جس کے خارجی زاویوں میں سے ہر ایک $\frac{۲\pi}{ن}$ کے مساوی ہے۔ اگر پہلے اور آخری خطوں کے سروں کو ملانے سے ایک کثیر الاضلاع بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ہے

$$\frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۲۴} \text{ جم } \frac{\pi}{ن} + \frac{۱۶}{ن} \text{ جم } \frac{\pi}{ن} \text{ قم}^۲ \frac{\pi}{ن}$$

۱۸۔ منتظم کثیر الاضلاع $ا_۱ ا_۲ \ldots ا_{۲م}$ کے ضلعوں کی تعداد ۲م ہے۔ اس کے

(295)

حائط دائرہ کے مرکز سے $ا_1 ا_2$، $ا_2 ا_3$، ...، $ا_م ا_1$ پر عمود کھینچے گئے ہیں۔
ثابت کرو کہ ان عمودوں کا حاصلِ ضرب $(\frac{1}{2} و)^{م-1} \text{ر} \overline{م}$ ہے۔

۱۹- اگر $ا_1 ا_2 ... ا_{2ن}$، $ب_1 ب_2 ... ب_{2ن}$ دو ہم مرکز اور متشابہاً واقع منتظم کثیر الاضلاع ہوں جن کے ضلعوں کی تعداد ۲ن ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{پ ا_1 \times پ ا_3 \times \cdots \times پ ا_{2ن-1}}{پ ا_2 \times پ ا_4 \times \cdots \times پ ا_{2ن}} = \frac{پ ب_1 \times پ ب_3 \times \cdots \times پ ب_{2ن-1}}{پ ب_2 \times پ ب_4 \times \cdots \times پ ب_{2ن}}$$

جہاں اس ہم مرکز دائرہ پر $پ$ کوئی نقطہ ہے جس کا نصف قطر کثیر الاضلاعوں کے حائط دائروں کے نصف قطروں کے درمیان وسط تناسب ہے۔

۲۰- نصف قطر ا کے ایک دائرہ کے اندر مرکز سے فاصلہ ب پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے اور نقطے $پ_1$، $پ_2$، ...، $پ_ن$ محیط پر لیے گئے ہیں ایسے کہ $پ_1 پ_2$، $پ_2 پ_3$، ...، $پ_ن پ_1$ کے محاذی مرکز و پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$وپ_1 + وپ_2 + \cdots + وپ_ن$$

$$= (ا^2 - ب^2)\left(\frac{1}{وپ_1} + \frac{1}{وپ_2} + \cdots + \frac{1}{وپ_ن}\right)$$

۲۱- ثابت کرو کہ اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو

$$\text{جم}\, ن ط = 1 + 2ن\, \text{جب} \frac{ط}{2}\, \text{جم} \frac{ط+\pi}{2} + 2^2 \frac{ن(ن-1)}{\underline{|2}}\, \text{جب}^2 \frac{ط}{2}\, \text{جم}\, \frac{2(ط+\pi)}{2}$$

$$+\ 2^3 \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{\underline{|3}}\, \text{جب}^3 \frac{ط}{2}\, \text{جم}\, \frac{3(ط+\pi)}{2} + \cdots$$

۲۲- ثابت کرو کہ ن ضلعوں والے الگ الگ منتظم کثیر الاضلاع جو

نصف قطر ر کے ایک دیے ہوئے دائرہ میں کھینچے جا سکتے ہیں ان کی تعداد م، جیسے عددوں کی اس تعداد کا نصف ہے جو ن سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں۔

نیز یہ دکھاؤ کہ ان کے ضلعوں کا حاصل ضرب $ر^{ن}$ [illegible] کے مساوی ہے اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت ہو اور ر کے مساوی ہے اگر ن ایک مفرد عدد کی قوت نہ ہو۔

---

(246)

چودھواں باب

لاانتہاہی سلسلوں کا نظریہ

۱۹۱ ——— ہم اس باب میں چند مسئلے بیان کرینگے جو لاانتہاہی سلسلوں کے استدقاق سے متعلق ہیں جبکہ ان کی ارقام حقیقی یا ملتف اعداد ہوں یا متغیرات ۔ ایسے سلسلوں کے نظریہ کی تکمل بحث اس کتاب کے حدود سے باہر ہے، اس لیے ہم اپنی توجہ صرف اُن چیزوں تک محدود رکھینگے جو مثالثی سلسلوں کی نوعیت اور ان کی خاصیتوں پر بحث کرنے کے لیے بالکل ضروری ہیں ۔

حقیقی سلسلوں کا استدقاق

۱۹۲ ——— فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا کوئی تواتر $ا_۱، ا_۲، \ldots،$ $ا_ن \ldots$ ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنتا ہے اور فرض کرو

$$س_ن = ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \ldots + ا_ن$$

اگر $س_ن$ کی ایک مُعین محدود انتہا س ہے جبکہ ن کو نامحدود طور پر بڑھایا جاتا ہے تو لاانتہاہی سلسلے $ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \ldots + ا_ن + \ldots$ کو مستدق کہا جاتا ہے اور س کو اس کا انتہائی مجموعہ یا صرف اس کا مجموعہ کہتے ہیں ۔

ہم اس باب میں $س_ن$ کی انتہا کو (جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے) ظاہر کرنے کے لیے ترقیم نہا $س_ن$ استعمال کرینگے جب کبھی یہ انتہا موجود ہو۔

وہ شرط کہ نہا $س_ن$ = س یہ ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد صہ کے تناظر، خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو، ن کی ایک قیمت $ن_صہ$ متعین ہو سکے ایسی کہ س - $س_ن$ کی مطلق قیمت، صہ سے کم ہو تو ن کی ہر قیمت کے لیے جو $ن_صہ$ سے بڑی یا اس کے مساوی ہو۔

جب سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_ن + \ldots$، س کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ $ا_{ن+۱} + ا_{ن+۲} + \ldots$ مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س - $س_ن$ ہے جس کو $ب_ن$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے۔ عدد $ب_ن$ کو مستدق سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_ن + \ldots$ کا ن رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں۔ باقی $ب_۱$، $ب_۲$، ...، $ب_ن$، .... عددوں کا ایک تواتر بناتے ہیں ایسا کہ نہا $ب_ن$ = ۰، یہ امر مشاہدہ طلب ہے کہ سلسلے کا استدقاق مان لینے کے بعد ہی باقی $ب_ن$ کا کوئی مفہوم ہو سکتا ہے۔

عدد $ا_{ن+۱} + ا_{ن+۲} + \ldots + ا_{ن+م}$ کو $ب_{ن،م}$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے اور عددوں $ب_{ن،۱}$، $ب_{ن،۲}$، $ب_{ن،۳}$، .... کو ہم ن رقموں کے بعد والے جزوی باقی کہینگے۔ یہ مشاہدہ طلب ہے کہ یہ جزوی باقی $ب_{ن،م}$، ن اور م کی تمام قیمتوں کے لیے متعین عددوں کے طور پر موجود ہو سکتے ہیں خواہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہو یا نہ ہو۔

کسی مستدق سلسلہ $ا_۱ + ا_۲ + \ldots + ا_ن + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ اکثر $\sum_{۱}^{\infty} ا$ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

(247)

۱۹۳ ——— سلسلہ $ل_1 + ل_2 + ل_3 + \dots + ل_ن + \dots$ ایسا ہو سکتا ہے کہ اعداد $س_ن$ کی کوئی مُعین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے ۔ حسب ذیل صورتیں پیدا ہو سکتی ہیں :—

(۱) یہ ہو سکتا ہے کہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد ک کے متناظر خواہ وہ کتنا ہی بڑا ہو ن کی ایک قیمت $ن_ی$ متعین ہو سکے ایسی کہ اعداد $س_{ن_ی}$ ، $س_{ن_ی+1}$ ، ... ، $س_{ن_ی+م}$ ، ... سب کے سب ہم علامت ہوں اور سب کے سب عدد ک سے بڑے ہوں ۔ اس صورت میں $س_ن$ ، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے خواہ مثبت سمت میں یا منفی سمت میں ؛ اس صورت میں سلسلہ کو متسع کہتے ہیں ۔ اس اتساع کے واقعہ کو بعض اوقات نہا $س_ن = \infty$ ، یا نہا $س_ن = -\infty$ سے تعبیر کرتے ہیں بموجب اس کے کہ $س_ن$ مثبت سمت میں بڑھے یا منفی سمت میں ۔

(۲) اگر $س_ن$ مطلق قیمت میں ن کے ساتھ غیر معین طور پر حسب سابق بڑھے مگر $ن_ی$ خواہ کتنا ہی بڑا کیوں نہ لیا جائے $س_{ن_ی}$ ، $س_{ن_ی+1}$ ، ... ، $س_{ن_ی+م}$ ، ... میں مثبت اور منفی دونوں رقمیں ہوں تو یہ کہہ سکتے ہیں کہ سلسلہ عدم تعین کے غیر مُعین حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے ۔ تاہم اس کو ایسی صورت میں بالعموم متسع کہتے ہیں اور اتساع کے اس واقعہ کو نہا $س_ن = \pm\infty$ سے تعبیر کرتے ہیں ۔

(۳) یہ ہو سکتا ہے کہ گو $س_ن$ کی کوئی معین انتہا نہ ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے مگر ن کی بڑھتی ہوئی قیمتوں سے ایک تواتر (فرض کرو $ن_۱$، $ن_۲$، ...، $ن_ر$، ....) کا انتخاب کرنا ممکن ہو ایسا کہ $س_ن$ ایک مُعین انتہا کی طرف مستدق ہو بشرطیکہ ن صرف وہ قیمتیں اختیار کرے جو اِس تواتر میں ہیں۔

اِس صورت میں سلسلہ کو اہتزازی سلسلہ کہتے ہیں، لیکن بعض اوقات اہتزازی سلسلے متسع کہلاتے ہیں۔ وہ اہتزازی سلسلہ جس میں $س_ن$، ن کی ہر قیمت کے لیے عدداً کسی مستقل مثبت عدد سے کم ہو عدم تعین کے محدود حدود کے درمیان اہتزاز کرنیوالا سلسلہ کہلاتا ہے۔

یہ آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے کہ اگر کسی سلسلہ کی رقمیں سب کی سب ایک ہی علامت کی ہوں تو سلسلہ صورت (۱) کے مطابق متسع ہے ورنہ مستدق۔

سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ... + ن + ...$

اور $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + ... + \frac{۱}{ن} + ...$

دونوں متسع ہیں کیونکہ ہر صورت میں $س_ن$، ن کے ساتھ غیر معین طور پر بڑھتا ہے اور مستقل علامت رکھتا ہے۔

سلسلہ $۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ....$ عدم تعین کے غیر معین حدود کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔ کیونکہ $س_ن = -\frac{۱}{۲}ن$ جبکہ ن جفت ہو اور $س_ن = \frac{۱}{۲}(ن + ۱)$ جبکہ ن طاق ہو۔ اس طرح جیسے ن بڑھتا ہے $س_ن$ عددی قیمت میں بڑھتا ہے اور نہا $س_ن = \pm \infty$

سلسلہ $۱ + ۱ - ۲ + ۱ + ۱ - ۲ + ۱ + ۱ - ۲ + ...$ عدم تعین کے

سب کے سب مطلق قیمت میں $\frac{1}{2}$ عا سے کم ہیں - اس سے اس واقعہ کا اظہار ہوتا ہے کہ نہا $\text{س}_{\text{ن}}$ = س جبکہ عا کی اختیاری قیمتیں حساب میں لیگئی ہوں -

اب $\text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+1} + \text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+2} + \dots + \text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+\text{م}} = (\text{س}-\text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}}) - (\text{س}-\text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}+\text{م}})$

اور پھر یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ $\text{س}-\text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}}$ ، $\text{س}-\text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}+\text{م}}$ دونوں عدداً ½ عا سے کم ہیں اس لیے $\text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+1} + \text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+2} + \dots + \text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+\text{م}}$ عدداً عا سے کم ہے؛

اور یہ م کی سب قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لیے درست ہے -

پھر یہ دکھانے کے لیے کہ اوپر کی شرط کافی ہے ہم ایک اصول کی طرف رجوع کرتے ہیں جو استدقاق کے عام اصول (240) کے طور پر مشہور ہے - اِس اصول کے مطابق اعداد کے ایک توالی س_1 ، س_2 ، ... ، $\text{س}_{\text{ن}}$ ، ... کی ایک معین انتہا ہوگی بشرطیکہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ہر مثبت عدد عا کے جواب میں ن کی ایک قیمت $\text{ن}_{\text{عا}}$ متعین ہو سکے ایسی کہ اعداد

$$\text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}+1} - \text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}} ، \text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}+2} - \text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}} ، \dots ، \text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}+\text{م}} - \text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}} \dots$$

سب کے سب مطلق قیمت میں عا سے کم ہوں - اپنی شرط کے کافی ہونے کے لیے ہمیں صرف یہ دیکھنا ہے کہ آیا $\text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}+\text{م}} - \text{س}_{\text{ن}_{\text{عا}}}$ ، جزوی باقی

$$\text{ب}_{\text{ن}_{\text{عا}}، \text{م}} \text{ یا } \text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+1} + \text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+2} + \dots + \text{ل}_{\text{ن}_{\text{عا}}+\text{م}}$$ کے مساوی ہے۔

اگر م = ا لیا جائے تو شرط میں یہ بات شامل ہے کہ ن کی

کافی بڑی قیمت لینے سے $ر_{ن+۱}$ اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں؛
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلے کے استدقاق کی ضروری شرط یہ ہے کہ
نہا $ر_{ن}$ ... ۔ لیکن یہ شرط بطور خود کافی نہیں ہے۔

مستدق سلسلے کے استدقاق کی تیزی ن کی اس کم سے کم
قیمت سے ناپی جا سکتی ہے جو صہ کی ایک دی ہوئی قیمت سے
متناظر ایسی ہو کہ سب کے سب جزوی باقی $ب_{ن,م}$ مطلق
قیمت میں صہ سے کم ہوں؛ یعنی رقموں کی اس تعداد سے جن کا
لینا ضروری ہے تاکہ جزوی باقی سب کے سب کسی مقررہ عدد سے
کم ہوں۔

ہندسی سلسلہ ۱ + لا + $لا^۲$ + ... کی صورت میں جو قیمت $\frac{۱}{۱ - لا}$
کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ لا عدداً ایک سے کم ہو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ر_{ن+۱} + ... + ر_{ن+م} = \frac{لا^{ن}(۱ - لا^{م})}{۱ - لا}$$

اور لا کو مثبت فرض کرنے سے یہ صہ سے کم ہوگا م کی تمام قیمتوں کے لیے اگر $\frac{لا^{ن}}{۱ - لا}$
< صہ؛ اس صورت میں ن کی مناسب قیمت وہ صحیح عدد ہے جو $\frac{لوک صہ + لوک (۱ - لا)}{لوک لا}$
سے عین بڑا ہے۔ ن کی قیمت بڑھتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے؛ اور اس لیے
اس سلسلہ کے استدقاق کی تیزی گھٹتی ہے جیسے لا بڑھتا ہے؛ لا جب ایک
پر پہنچتا ہے تو ن غیر معین طور پر بڑھتا ہے؛ اس طرح سلسلہ کا استدقاق
غیر معین طور پر سست ہو جاتا ہے۔ اگر لا = ۱ تو سلسلہ صریحاً متسع ہے۔

۱۹۴ — اب ہم مستدق سلسلہ $ر_۱ + ر_۲ + ... + ر_{ن} + ...$ کی
اس صورت پر غور کریں گے جس میں مثبت رقمیں غیر معین تعداد میں ہیں اور
نیز منفی رقمیں غیر معین تعداد میں۔ فرض کرو کہ $ر_{ن}$ ۱ سے $ر_{ن}$ کا عددی قیمت

تعبیر کی گئی ہے، اس طرح $|ا_ن|$، $ا_ن$ کے مساوی ہے یا $-ا_ن$ کے بموجب اس کے کہ $ا_ن$ مثبت ہے یا منفی - اب سلسلہ

$$|ا_۱| + |ا_۲| + |ا_۳| + \cdots + |ا_ن| + \cdots\cdots$$

پر غور کرو -

اگر یہ آخری سلسلہ مستدق ہے تو اصلی سلسلہ کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں لیکن اگر سلسلہ $\sum |ا_ن|$ متسع ہے تو سلسلہ $\sum ا_ن$ کو (2.30) نیم مستدق یا مشروطاً مستدق یا اتفاقاً مستدق کہتے ہیں -

سلسلہ $۱^{-۲} - ۲^{-۲} + ۳^{-۲} + \ldots$ مطلقاً مستدق ہے کیونکہ سلسلہ $۱^{-۲} + ۲^{-۲} + \ldots$ مستدق ہے؛ لیکن سلسلہ $۱^{-۱} - ۲^{-۱} + ۳^{-۱} - \ldots\ldots$ صرف مشروطاً مستدق ہے کیونکہ سلسلہ $۱^{-۱} + ۲^{-۱} + ۳^{-۱} + \ldots$ متسع ہے -

سلسلہ $ا_۱ - ا_۲ + ا_۳ - \ldots\ldots$ جس میں ارقام باری باری سے مثبت منفی ہیں ہمیشہ مستدق (مطلقاً یا مشروطاً) ہوگا اگر ہر رقم عدداً رقم مابعد سے بڑی ہو اور نیز $نہا\ ا_ن = ۰$ کیونکہ

$$(-۱)^ن ب_{ن،م} = (ا_{ن+۱} - ا_{ن+۲}) + (ا_{ن+۳} - ا_{ن+۴}) + \cdots\cdots$$

$$= ا_{ن+۱} - (ا_{ن+۲} - ا_{ن+۳}) - \cdots\cdots$$

اور اس لیے $(-۱)^ن ب_{ن،م}$ مثبت ہے اور $ا_{ن+۱}$ سے کم ہے یا اس کے مساوی - پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن منتخب ہو سکتا ہے اتنا بڑا کہ $|ب_{ن،م}| < صہ$ م کی تمام قیمتوں کے لیے خواہ صہ کتنا ہی چھوٹا ہو - اس لیے سلسلہ مستدق ہے -

۱۹۵ ــــ مشروطاً مستدق سلسلے میں رقموں کی ترتیب کو بدلا جائے

تو بالعموم مجموعہ بدل جائیگا۔ فرض کرو کہ پہلی ف مثبت رقموں کا مجموعہ
$س_{ف}$ ہے اور پہلی ق منفی رقموں کا مجموعہ جن کی علامتیں بدل دی گئی
ہیں $سَ_{ق}$ ہے تب اگر سلسلہ کو دوبارہ مرتب کیا جائے اس طور پر
کہ مثبت رقموں کا تواتر نہ بدلے اور نیز منفی رقموں کا تواتر نہ بدلے
اور سلسلہ کی پہلی ف + ق رقموں میں سے ف رقمیں مثبت ہوں اور
ق رقمیں منفی تو اس طور پر ترتیب یافتہ سلسلہ کا مجموعہ $س_{ف} - سَ_{ق}$
کی انتہا ہے جبکہ ف اور ق کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اب
چونکہ تواتر $س_{ف}$، $سَ_{ق}$ میں سے ہر ایک مثبت رقموں پر مشتمل ہے
اس لیے $س_{ف}$ کی اور $سَ_{ق}$ کی انتہائیں دونوں محدود اور معین ہیں یا
ورنہ لامتناہی۔ بموجب فرض دونوں محدود اور معین نہیں ہیں کیونکہ
دیا ہوا سلسلہ مطلقاً مستدق نہیں ہے، اس لیے $س_{ف}$، $سَ_{ق}$ کی
انتہاؤں میں سے کم از کم ایک لامتناہی ہے؛ اگر دونوں انتہائیں
لامتناہی ہیں تو نہا $(س_{ف} - سَ_{ق})$ کی قیمت، ف اور ق کی قیمتوں
کے دو تواتروں پر منحصر ہوگی۔ اگر $س_{ف}$، $سَ_{ق}$ کی انتہاؤں میں
سے صرف ایک لامتناہی ہے تو نہا $(س_{ف} - سَ_{ق})$ لامتناہی ہے
اور اس لیے اصلی سلسلہ مستدق نہیں تھا۔ اگر سلسلہ کی اصلی
ترتیب $ا_{۱} - ا_{۲} + ا_{۳} - ا_{۴} + ...$ میں علامتیں باری باری سے
مثبت اور منفی ہوں تو ف اور ق نسبتِ تساوی میں غیر معین طور پر
بڑے ہو جاتے ہیں، لیکن اگر بالفرض ہم سلسلہ کو ترتیب $ا_{۱} + ا_{۳}$
$- ا_{۲} + ا_{۵} + ا_{۷} - ا_{۴} + ...$ میں لکھیں تو ف اور ق نسبت
۲ : ۱ میں غیر معین طور پر بڑے ہو جاتے ہیں، اور $س_{۲ق} - سَ_{ق}$

اور $\text{س}_{\text{ق}}$ ۔ $\text{س}'_{\text{ق}}$ کی انتہائیں جبکہ ق کو غیر معیّن طور پر بڑھا دیا جائے بالعموم مساوی نہیں ہوتیں۔ مثلاً نیم مستدق سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ پر غور کرو۔ اس کے مجموعہ کو س سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{س}_{4\text{ن}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{4\text{ن}}$$

$$= \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{4\text{ن}-3} + \frac{1}{4\text{ن}-1} - \frac{1}{4\text{ن}-2} - \frac{1}{4\text{ن}} \right)$$

(251)

فرض کرو کہ سلسلہ س میں رقموں کی ترتیب کو بدلا گیا ہے اور اس طرح سلسلہ $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$ حاصل کیا گیا ہے۔ اس کے مجموعہ کو $\text{س}'$ سے تعبیر کرو تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{س}'_{3\text{ن}} = \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{4\text{ن}-3} + \frac{1}{4\text{ن}-1} - \frac{1}{2\text{ن}} \right)$$

پس

$$\text{س}'_{3\text{ن}} - \text{س}_{4\text{ن}} = \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{4\text{ن}-2} - \frac{1}{4\text{ن}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1}^{\text{ن}} \left(\frac{1}{2\text{ن}-1} - \frac{1}{2\text{ن}} \right) = \frac{1}{2} \text{س}_{2\text{ن}}$$

اس لیے جب ن لا انتہا بڑا ہو تو $\text{س}' = \frac{3}{2}\text{س}$۔ یہ مثال ڈرشلی (Dirichlet.) نے دی تھی جس نے سب سے اول یہ بتایا کہ نیم مستدق سلسلہ کا مجموعہ رقموں کی ترتیب پر منحصر ہوتا ہے۔

۱۹۶ ——— ریمن (Riemann) نے ثابت کیا ہے کہ نیم مستدق سلسلہ کی رقموں کو ایسی ترتیب میں مکرر مرتب کیا جا سکتا ہے کہ اس نئے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ کوئی دی ہوئی قیمت ع اختیار کر سکے۔

فرض کرو کہ ع مثبت ہے؛ اول ف مثبت رقمیں لو جہاں ف ایسا ہے کہ $\text{س}_{\text{ف}-1} < \text{ع}$ اور $\text{س}_{\text{ف}} > \text{ع}$؛ پھر ق منفی رقمیں لو

جہاں ق ایسا منتخب کیا جائے کہ $س_{ق} - سَ_{ق-۱} > عہ$ اور $س_{ق} - سَ_{ق} < عہ$،
ثانیاً ف مثبت رقمیں لو ایسی کہ $س_{ق+ف-۱} - سَ_{ق} < عہ$ اور $س_{ق+ف} - سَ_{ق} > عہ$،

پھر ق منفی رقمیں لو ایسی کہ $س_{ق+ف} - سَ_{ق+ق} < عہ$ اور $س_{ق+ف} - سَ_{ق+ق-۱} > عہ$،

اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس طریقہ پر عمل جاری رکھنے سے ہمیں ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے ایسا کہ اس کا مجموعہ، عہ سے اس قدر فرق رکھتا ہے جو اس سلسلہ کی آخری رقم سے کم ہے، پس اگر ہم اس سلسلہ کی رقموں کی تعداد کو لا انتہا بڑا کر دیں تو اس کا مجموعہ عہ کی طرف مستدق ہوگا۔
یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ رقموں کو ایسی تکرر ترتیب میں رکھا جا سکتا ہے کہ نیا سلسلہ متسع ہو یا یہ کہ وہ اہتزاز کرے۔

ملتف سلسلوں کا استدقاق

۱۹۷ —— فرض کرو کہ ملتف عددوں کا ایک تواتری $ی_{۱}$، $ی_{۲}$، ...، $ی_{ن}$، ... ہے جس میں $ی_{ن}$، $لا_{ن} + خ\ ما_{ن}$ کو تعبیر کرتا ہے جہاں $لا_{ن}$ اور $ما_{ن}$ حقیقی عدد ہیں۔ فرض کرو

$$س_{ن} = ی_{۱} - ی_{۲} + \dots + ی_{ن}،$$

$$س_{ن} = لا_{۱} + لا_{۲} + لا_{۳} + \dots + لا_{ن}،$$

$$سَ_{ن} = ما_{۱} + ما_{۲} + ما_{۳} + \dots + ما_{ن}$$

اس طرح $س_{ن} = س_{ن} + خ\ سَ_{ن}$

اگر $س$ کی ایک معین انتہا جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے $س$ ہو جو خود ایک ملتف یا حقیقی عدد ہے تو لامتناہی سلسلہ

$$ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + \dots + ی_ن + \dots$$

کو مستدق کہتے ہیں اور $س$ کو اس کا انتہائی مجموعہ یا مجموعہ۔

وہ شرط کہ $س = \text{نہا}\, س_ن$ یہ ہے کہ $|س - س_ن|$ صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اس طرح اگر

$$س - س_ن = غ_ن (\text{جم}\, ط_ن + \text{خ}\, \text{جب}\, ط_ن)$$

تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے $\text{نہا}\, غ_ن = ۰$۔ اگر $س = س + \text{خ}\, سَ$ جہاں س اور سَ حقیقی ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے $س - س_ن = غ_ن\, \text{جم}\, ط_ن$، $سَ - سَ_ن = غ_ن\, \text{جب}\, ط_ن$ تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $\text{نہا}\, غ_ن = ۰$ تو $\text{نہا}(س - س_ن) = ۰$، $\text{نہا}(سَ - سَ_ن) = ۰$، یعنی $س_ن$، $سَ_ن$ علی الترتیب س اور سَ کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ $ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + \dots + ی_ن + \dots$ کے مستدق ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو سلسلے $لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \dots$، اور $لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \dots$ دونوں مستدق ہونے چاہئیں۔ اس کے برعکس اگر یہ آخری دو سلسلے مستدق ہیں تو ملتف عددوں کا سلسلہ بھی مستدق ہے، کیونکہ

|(س + خ سَ) − (سن + خ سَن)| ≯ |س − سن| + |سَ − سَن|

اب اگر نہا سن = س، نہا سَن = سَ، تو ہم ن کی ایک قیمت نصہ منتخب کر سکتے ہیں اتنی بڑی کہ

|س − سن| < ½ صہ، |سَ − سَن| < ½ صہ بشرطیکہ ن ≥ نصہ۔ پس نتیجہ نکلتا ہے کہ

|(س + خ سَ) − (سن + خ سَن)| < صہ اگر ن ≥ نصہ؛ اور چونکہ صہ اختیاری ہے

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے نہا (سن + خ سَن) = س + خ سَ، اور اس طرح ملتف عددوں کا سلسلہ مستدق ہے۔ اگر مجموعوں ∑ لا، ∑ ما میں سے کسی کی انتہائی قیمت محدود نہ ہو یا ان میں سے کوئی سلسلہ اہتزاز کرے تو سلسلہ ∑ ی مستدق نہیں ہوگا۔

فرض کرو کہ ین = رن (جم طن + خ جب طن)۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ سلسلہ ∑ ی مستدق ہوگا اگر سلسلہ ∑ ر جس میں ہر رقم رن متناظر رقم ین کا مقیاس ہے مستدق ہو۔ دیا ہوا سلسلہ ∑ رن (جم طن + خ جب طن) مستدق ہے بشرطیکہ سلسلوں ∑ رن جم طن، ∑ رن جب طن میں سے ہر ایک مستدق ہو۔ اب اعداد رن جم طن، رن جب طن میں سے ہر ایک عددوں ± رن کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ نیز سلسلوں ∑ ر جم ط، ∑ ر جب ط میں سے ہر ایک کے لیے عدد سن+م − سن، سلسلہ ∑ ر کے متناظر جزوی باقی سے عدداً کم ہے پس اگر یہ آخری سلسلہ ∑ ر مستدق ہے تو سلسلوں ∑ ر جم ط، ∑ ر جب ط میں سے ہر ایک مستدق ہے، اور اس لیے سلسلہ ∑ ین مستدق ہے۔

اگر س کی ایک معین انتہا جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے س، ہو جو خود ایک ملتف یا حقیقی عدد ہے تو لامتناہی سلسلہ

$ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + \cdots + ی_ن + \cdots$

کو مستدق کہتے ہیں اور س کو اس کا انتہائی مجموعہ یا مجموعہ۔

وہ شرط کہ س = نہا $س_ن$ یہ ہے کہ |س - $س_ن$| صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو غیر معین طور پر بڑھا دیا جائے۔ اس طرح اگر

$س - س_ن = غ_ن (جم طن + خ جب طن)$

تو ہمیں حاصل ہونا چاہیے نہا $غ_ن$ = ۰ اگر س = س + خ سَ جہاں س اور سَ حقیقی ہیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے س - $س_ن$ = $غ_ن$ جم $ط_ن$، سَ - $سَ_ن$ = $غ_ن$ جب $ط_ن$، تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر نہا $غ_ن$ = ۰ تو نہا (س - $س_ن$) = ۰، نہا (سَ - $سَ_ن$) = ۰ یعنی $س_ن$، $سَ_ن$ علی الترتیب س اور سَ کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ $ی_۱ + ی_۲ + ی_۳ + \cdots + ی_ن + \cdots$ کے مستدق ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو سلسلے $لا_۱ + لا_۲ + لا_۳ + \cdots$، اور $ما_۱ + ما_۲ + ما_۳ + \cdots$ دونوں مستدق ہونے چاہئیں۔ اس کے برعکس اگر یہ آخری دو سلسلے مستدق ہیں تو ملتف عددوں کا سلسلہ بھی مستدق ہے، کیونکہ

$$\left|(\text{س} + \text{خ}\,\bar{\text{س}}) - (\text{س}_{\text{ن}} + \text{خ}\,\bar{\text{س}}_{\text{ن}})\right| \leqslant \left|\text{س} - \text{س}_{\text{ن}}\right| + \left|\bar{\text{س}} - \bar{\text{س}}_{\text{ن}}\right|$$

اب اگر نہا $\text{س}_{\text{ن}} = \text{س}$، نہا $\bar{\text{س}}_{\text{ن}} = \bar{\text{س}}$ تو ہم ن کی ایک قیمت $\text{ن}_{\text{صہ}}$ منتخب کرسکتے ہیں اتنی بڑی کہ

$\left|\text{س} - \text{س}_{\text{ن}}\right| < \frac{1}{2}\,\text{صہ}$، $\left|\bar{\text{س}} - \bar{\text{س}}_{\text{ن}}\right| < \frac{1}{2}\,\text{صہ}$ بشرطیکہ $\text{ن} \geqslant \text{ن}_{\text{صہ}}$۔ پس نتیجہ نکلتا ہے کہ

$\left|(\text{س} + \text{خ}\,\bar{\text{س}}) - (\text{س}_{\text{ن}} + \text{خ}\,\bar{\text{س}}_{\text{ن}})\right| < \text{صہ}$ اگر $\text{ن} \geqslant \text{ن}_{\text{صہ}}$؛ اور چونکہ صہ اختیاری ہے

اس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے نہا $(\text{س}_{\text{ن}} + \text{خ}\,\bar{\text{س}}_{\text{ن}}) = \text{س} + \text{خ}\,\bar{\text{س}}$، اور اس طرح ملتف عددوں کا سلسلہ مستدق ہے۔ اگر مجموعوں $\sum$ لا، $\sum$ ما میں سے کسی کی انتہائی قیمت محدود نہ ہو یا ان میں سے کوئی سلسلہ اہتزاز کرے تو سلسلہ $\sum$ ی مستدق نہیں ہوگا۔

فرض کرو کہ $\text{ی}_{\text{ن}} = \text{ر}_{\text{ن}}\,(\text{جم}\,\text{ط}_{\text{ن}} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ن}})$۔ اب ہم یہ ثابت کرینگے کہ سلسلہ $\sum$ ی مستدق ہوگا اگر سلسلہ $\sum$ ر جس میں ہر رقم $\text{ر}_{\text{ن}}$ متناظر رقم $\text{ی}_{\text{ن}}$ کا مقیاس ہے مستدق ہو۔ دیا ہوا سلسلہ $\sum \text{ر}_{\text{ن}}\,(\text{جم}\,\text{ط}_{\text{ن}} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ن}})$ مستدق ہے بشرطیکہ سلسلوں $\sum \text{ر}_{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ط}_{\text{ن}}$، $\sum \text{ر}_{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک مستدق ہو۔ اب اعداد $\text{ر}_{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ط}_{\text{ن}}$، $\text{ر}_{\text{ن}}\,\text{جب}\,\text{ط}_{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک عددوں $\pm\,\text{ر}_{\text{ن}}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے؛ نیز سلسلوں $\sum$ ر جم ط، $\sum$ ر جب ط میں سے ہر ایک کے لیے عدد $\text{س}_{\text{ن}+\text{م}} - \text{س}_{\text{ن}}$ سلسلہ $\sum$ ر کے متناظر جزوی باقی سے عدداً کم ہے پس اگر یہ آخری سلسلہ $\sum$ ر مستدق ہے تو سلسلوں $\sum$ ر جم ط، $\sum$ ر جب ط میں سے ہر ایک مستدق ہے، اور اس لیے سلسلہ $\sum \text{ی}_{\text{ن}}$ مستدق ہے۔

اس کا عکس ضروری نہیں کہ درست ہو، چنانچہ سلسلہ

ک ن (جم طن + خ جب طن)

مستدق ہوسکتا ہے اور معہذا سلسلہ ک ن متسع۔

اگر سلسلہ ک ن جو مقیاسوں کے مجموعہ سے بنا ہے مستدق ہو تو سلسلہ

ک ن (جم طن + خ جب طن)

کو **مطلقاً مستدق** کہتے ہیں۔

مثلاً وہ سلسلہ جس کی عام رقم ن^۲(جم ن ط + خ جب ن ط) ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ سلسلہ ک ن^۲ مستدق ہے؛ لیکن وہ مستدق سلسلہ جس کی عام رقم ن^۱(جم ن ط + خ جب ن ط) ہے (جہاں ۲ π > ط > ۰) مطلقاً مستدق نہیں ہے کیونکہ سلسلہ ک ن^۱ متسع ہے۔

(253)

مسلسل تفاعل

۱۹۸ ــــــ فرض کرو کہ مختلف عدد ی = لا + خ ما کا ایک **تفاعل** ف(ی) ہے جس کی ایک واحد محدود قیمت ہے ی کی ہر قیمت کے لئے جو کسی دیے ہوئے حدود کے درمیان واقع ہے۔ تب اس تفاعل کی ایک واحد قیمت ہوگی اس شکل کے ہر نقطہ کے لیے جو ایک خاص رقبہ کے اندر واقع ہوتی ہے۔ یہ رقبہ، ی کو تعبیر کرنیوالے مستوی کا کوئی محدود حصہ ہوسکتا ہے یا اس مستوی کا پورا حصہ۔

کوئی تفاعل نقطہ ی = ی، پر **مسلسل** کہلاتا ہے اگر ایک مثبت عدد ع ا ہمیشہ معلوم کیا جاسکے ایسا کہ ف(ی)۔ف(ی،) کا

مقیاس کسی مقررہ مثبت عدد صہ سے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو کم ہوئی کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے ی - ی، کا مقیاس عا سے کم ہے۔ صہ کی ہر قیمت کے لیے عا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہیے۔

کوئی تفاعل جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر ہر نقطہ پر اِس شرط کو پورا کرے اِس رقبہ کے اندر مسلسل کہلاتا ہے۔ رقبہ کا احاطہ ممکن ہے شامل ہو یا ممکن ہے شامل نہ ہو۔

یکساں استدقاق

۱۹۹ـــــ فرض کرو کہ ی یا لا + خ ما کا ایک تفاعل فن (ی) ہے جو کسی رقبہ میں مسلسل ہے۔ تب اگر

سلسلہ $ف_۱(ی) + ف_۲(ی) + ف_۳(ی) + \dots + ف_ن(ی) + \dots$

مستدق ہو تو ہم اس کے انتہائی مجموعہ کو فا (ی) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مجموعہ

$$ف_۱(ی) + ف_۲(ی) + \dots + ف_ن(ی)$$

جہاں ن کوئی مستقل عدد ہے $س_ن(ی)$ کے مساوی ہے، تب

$ف_{ن+۱}(ی) + ف_{ن+۲}(ی) + \dots$ کے انتہائی مجموعہ کو ن رقموں کے بعد والا باقی کہتے ہیں اور اس کو $ب_ن(ی)$ سے تعبیر کر سکتے ہیں۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$فا(ی) = س_ن(ی) + ب_ن(ی)$$

اب فرض کرو کہ کسی دیے ہوئے مثبت عدد صہ کے جواب میں خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو ن کی ایک قیمت ی پر غیر منحصر معلوم کی جاسکتی ہے ایسی کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو کسی دیے ہوئے رقبہ کے اندر موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں سب کا مقیاس صہ سے کم ہے جہاں م ≥ ن تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے ی کی اُن تمام قیمتوں کے لیے جو اُس رقبہ میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں۔ صحیح عدد ن قیمت میں صہ پر منحصر ہوگا۔

لیکن اگر ی رقبہ کے اندر کسی ثابت قیمت ی کے لا انتہا قریب آئے اور تمام باقیوں ب (ی) کے مقیاس کو صہ سے کم کرنے کے لیے ن کو غیر معین طور پر بڑھتا ہوا فرض کرنا ضروری ہو تو نقطہ ی کے قرب میں سلسلہ یکساں طور پر مستدق نہیں ہوتا اور ہم کہتے ہیں کہ وہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔ (254)

نقطہ ی کو جس کے لیے صہ منتخب ہوسکے ایسا کہ صورت مذکورۂ بالا واقع ہو وہ نقطہ کہتے ہیں جس کے قرب میں استدقاق غیر یکساں ہے یا بعض اوقات اس کو صرف غیر یکساں استدقاق کا نقطہ کہتے ہیں اگر سلسلہ خود اس نقطہ پر مستدق ہو۔ ایسے نقطہ کا احاطہ کرنے والے کسی رقبہ کے لیے یہ ناممکن ہے کہ ن کی کوئی مستقل قیمت مقرر کیجا سکے ایسی کہ اس رقبہ کے اندر ی کی تمام قیمتوں کے لیے ب م کے مقیاس کافی طور پر چھوٹی مثبت مقدار صہ سے کم ہوں؛ اور اس لیے یہ سلسلہ یکساں طور پر اِس کل رقبہ میں مستدق نہیں ہوتا اگر ی = ی تو سلسلہ یا مستدق ہوسکتا ہے یا متسع۔

ہم اِس امر کو یوں بیان کر سکتے ہیں:—

فرض کرو کہ جیسے ی کسی ثابت قیمت ی کے نزدیک آتا ہے

ایک مثبت عدد صہ مقرر ہو سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ ف۱ (ی) + ف۲ (ی) + ف۳ (ی) + ... کی رقموں کی وہ تعداد ن جن کا لینا ضروری ہے تاکہ |ب م (ی)| < صہ جہاں م ≥ ن، ی - ی۱ کے مقیاس پر منحصر ہو اس طور پر کہ ن مسلسل بڑھتا ہے جیسے مق |(ی - ی۱)| گھٹتا ہے اور لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے جبکہ مق (ی - ی۱) لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے۔ تو ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ ی۱ کے قرب میں غیر یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

ایسے کسی نقطہ کے قرب میں سلسلہ کے استدقاق کی شرح لا انتہا تیزی سے متغیر ہوتی ہے اور جب مق |ی - ی۱| کو لا انتہا گھٹایا جاتا ہے تو سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کوئی مستدق عددی سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق نہیں ہو سکتا؛ مثلاً جب ی = ی۱ تو سلسلہ ف۱ (ی۱) + ف۲ (ی۱) + ... کا استدقاق، اگر سلسلہ مستدق ہے تو، لا انتہا سست نہیں ہے؛ صرف اس صورت میں جبکہ ی متغیر ہو اس طور پر کہ مق |(ی - ی۱)| لا انتہا گھٹے سلسلہ

ف۱ (ی) + ف۲ (ی) + ...

لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے۔ پس یہ کہنے کی بجائے کہ کوئی سلسلہ ایک نقطہ پر غیر یکساں طور پر مستدق ہے یہ کہنا زیادہ صحیح ہے کہ سلسلہ اس نقطہ کے قریب غیر یکساں طور پر مستدق ہے۔ رقموں کی وہ تعداد ن جن کا لینا ضروری ہے تاکہ باقی ب م (ی) کے مقیاس کافی طور پر چھوٹے عدد صہ سے کم ہو سکیں بڑھتی ہے جیسے ی قیمت ی۱ کے نزدیک آتا ہے اور لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے جب مق |ی - ی۱| مسلسل

گھٹتا جاتا ہے، اور پھر اگر سلسلہ نقطہ ی پر مستدق ہے تو رُوں کی تعداد ایک ایک محدود قیمت اختیار کر لیتی ہے۔ پس یہ عدد ن خود ایسے نقطے کے قرب میں غیر مسلسل ہے۔

اگر کسی رقبہ ا میں اس کے ہر نقطہ پر ہمیں حاصل ہو (205)

$$|ف_1(ی)| \leq ا_1 ، |ف_2(ی)| \leq ا_2 ، \ldots ، |ف_ن(ی)| \leq ا_ن \ldots$$

جہاں $ا_1، ا_2، \ldots، ا_ن \ldots$ مستقل مثبت عدد ہیں ایسے کہ سلسلہ $ا_1 + ا_2 + ا_3 + \ldots ا_ن + \ldots$ مستدق ہے تو سلسلہ

$$ف_1(ی) + ف_2(ی) + \ldots$$

رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ اس مسئلہ سے یکساں استدقاق کی ایک جانچ ملتی ہے جو خاص خاص صورتوں پر استعمال کرنے میں بڑے کام آتی ہے۔ اس کو ویرسٹراس کی جانچ کہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $ا_{ن+1} + ا_{ن+2} + \ldots + ا_{ن+م}$ م کی ہر قیمت کے لیے صہ سے کم ہو جہاں ن ≥ ن۱۔ نیز ی کی ہر قیمت کے لیے

$$|ف_{ن+1}(ی) + ف_{ن+2}(ی) + \ldots + ف_{ن+م}(ی)|$$

کا مقیاس، $ا_{ن+1} + ا_{ن+2} + \ldots + ا_{ن+م}$ سے بڑا نہیں ہے اور اس لیے صہ سے کم ہے۔ چونکہ م کی ہر قیمت کے لیے یہ درست ہے ہم دیکھتے ہیں کہ ملتف سلسلہ مستدق ہے اور ی کی ہر قیمت کے لیے $|ب_ن(ی)| < صہ$

بشرطیکہ ن ≥ ن۱ ۔ اس لیے سلسلہ رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے ۔

نوٹ :۔ بعض مصنفین سلسلہ کو ایک دیے ہوئے رقبہ میں یکساں مستدق اُس وقت کہتے ہیں جبکہ ایک عدد ن معلوم ہو سکے ایسا کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے باقی ب ن کا مقیاس صہ سے کم ہو ۔ لیکن ہماری تعریف جو اس کتاب میں دی گئی ہے اِس تعریف سے زیادہ سخت ہے؛ ایسے سلسلوں کا بنانا ممکن ہے جو ہماری تعریف کی بموجب یکساں طور پر مستدق نہ ہوتے ہوں لیکن اُس تعریف کی بموجب ہوں جو دیگر مصنفین بیان کرتے ہیں ۔

۲۰۰ ـــــــ اگر تفاعلات ف۱ (ی)، ف۲ (ی)، . . . مسلسل ہوں ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو ایک دیے ہوئے رقبہ ا میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں تو تفاعل فا (ی) جو مستدق سلسلہ ∑ ف (ی) کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے ایک مسلسل تفاعل ہے ی کی تمام قیمتوں کے لیے جو اِس رقبہ ا میں موقوعہ نقطوں سے تعبیر ہوتی ہیں بشرطیکہ سلسلہ ∑ ف (ی) پورے رقبہ ا میں یکساں طور پر مستدق ہو ۔

کیونکہ ہمیں حاصل ہوتا ہے فا (ی) = س ن + ب ن جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے ایسا کہ ی کی زیر بحث تمام قیمتوں کے لیے ب ن کا مقیاس صہ سے کم ہے ۔ فرض کرو کہ ی میں مف ی کا اضافہ کر دیا گیا ہے اور فرض کرو کہ اِس اضافہ کے متناظر فا (ی)، س ن اور ب ن میں اضافے علی الترتیب مف فا (ی)، مف س ن، مف ب ن ہیں ۔ تب چونکہ بموجب فرض ب ن اور ب ن + مف ب ن کے مقیاس دونوں صہ سے کم ہیں اس لیے مف ب ن کا مقیاس ۲ صہ سے کم ہے ۔

نیز چونکہ سن، ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے اس لیے اگر مف ی کا مقیاس کافی چھوٹا ہو تو مف سن کا مقیاس صہ سے کم ہوگا؛ پس اگر مق مف ی ایک خاص قیمت سے کم ہو تو مف سن + مف بن کا یا مف فا (ی) کا مقیاس ۳ صہ سے کم ہے کیونکہ مف سن + مف بن کا مقیاس مف سن اور مف بن کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑا نہیں ہے۔ اب ۳ صہ کو ہم اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں جتنا چاہیں؛ اس لیے مف ی کو کافی چھوٹا لینے سے مق مف فا (ی) کو اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں؛ اس کے وہی معنے ہیں کہ تفاعل فا (ی) مسلسل ہے۔ (256)

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس ثبوت کے لیے یکساں استدقاق کی وہ کم سخت تعریف کافی ہے جو دفعہ ۱۹۹ کے نوٹ میں دی گئی ہے۔

۲۰۱ ——— اگر ی کی قیمت ی۱ کے لیے اس کے قرب میں سلسلہ کا استدقاق غیر یکساں ہو تو یہ ضروری نہیں ہے کہ سلسلہ کا مجموعہ مسلسل ہو؛ اس صورت میں دفعہ ماسبق کا استدلال ناکام رہتا ہے۔ تفاعل فن (ی) کی انتہائی قیمت جبکہ ی = ی۱، فن (ی۱) ہے لیکن اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ جیسے ی، ی۱ کی طرف مستدق ہوتا ہے $\sum_{1}^{\infty}$ {فن (ی) - فن (ی۱)} صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ ہم مجموعہ $\sum_{1}^{\infty}$ {فن (ی) - فن (ی۱)} کو فا (ن، ی - ی۱) سے تعبیر کر سکتے ہیں جو ن اور ی - ی۱ کا تفاعل ہے۔ اب جبکہ ی کو پہلے ی۱ کے مساوی بنایا جاتا ہے اور پھر ن کو لاتناہی بنایا جاتا ہے تو فا (ن، ی - ی۱) کی انتہائی قیمت صفر ہے، لیکن اگر ن کو پہلے لاتناہی بنایا جائے اور بعد میں ی - ی۱ کو صفر تو فا (ن، ی - ی۱) کی انتہائی قیمت کا

صفر ہونا ضروری نہیں ہے۔

اِس واقعہ کی تمثیل کے لیے اسٹوکس (Stokes) حقیقی سلسلہ

$$\frac{\text{۱} + \text{۵}\,\text{لا}}{\text{۲}(\text{۱} + \text{لا})} + \cdots + \frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{۲})\,\text{ن}^{\text{۲}} + \text{لا}(\text{۴}-\text{لا})\,\text{ن} + \text{۱} - \text{لا}}{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})\{(\text{ن}-\text{۱})\,\text{لا}+\text{۱}\}(\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱})} + \cdots$$

پر غور کرتا ہے۔ اگر لا = ۰ تو یہ سلسلہ ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱}\times\text{۲}} + \cdots + \frac{\text{۱}}{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})} + \cdots$$

اب سلسلہ بالا کی عام رقم ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})} + \frac{\text{۲}\,\text{لا}}{\{(\text{ن}-\text{۱})\,\text{لا}+\text{۱}\}(\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱})}$$

یا

$$\left\{\frac{\text{۱}}{\text{ن}} + \frac{\text{۲}}{(\text{ن}-\text{۱})\,\text{لا}+\text{۱}}\right\} - \left\{\frac{\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}} + \frac{\text{۲}}{\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱}}\right\}$$

اس لیے سلسلہ کا مجموعہ ۳ ہے خواہ لا کوئی قیمت سوائے صفر کے اختیار کرے۔
سلسلہ $\frac{\text{۱}}{\text{۱}\times\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}\times\text{۳}} + \ldots$ کا مجموعہ ایک ہے اور اس لیے دیے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ، لا کی قیمت صفر کے قریب میں غیر مسلسل ہے۔

ن رقموں کے بعد باقی $\frac{\text{۱}}{\text{ن}+\text{۱}} + \frac{\text{۲}}{\text{ن}\,\text{لا}+\text{۱}}$ ہے؛ اِس کو صہ کے مساوی رکھنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ن} = \frac{\{\text{لا}+\text{۲}-\text{صہ}(\text{لا}+\text{۱})\} + \sqrt{\{\text{صہ}(\text{لا}+\text{۱})-(\text{لا}+\text{۲})\}^{\text{۲}} - \text{۴}\,\text{صہ}\,\text{لا}(\text{صہ}-\text{۳})}}{\text{۲}\,\text{صہ}\,\text{لا}}$$

جو لا انتہا بڑھتا ہے جیسے لا، لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اس لیے دیا ہوا سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مندفق ہوتا ہے جبکہ لا، لا انتہا چھوٹا ہو۔ سلسلہ کے مجموعہ میں عدم تسلسل کی یہی وجہ ہے۔

سلسلوں کے یکساں اور غیر یکساں استدقاق کے درمیان امتیاز کا انکشاف بالعموم سیڈیل (Siedel) {257}

سے منسوب کیا جاتا ہے جس نے اپنا مضمون "Note über eine Eigenschaft"
بیویرین اکاڈمی کے "Transactions" بابتہ ۱۸۴۸ء میں شایع کیا تھا؛ لیکن یہ
نظریہ اس سے قبل اسٹوکس نے ایک مقالہ[1] "On the Critical Values of the sums"
میں شایع کیا تھا جس کو اُس نے کیمبرج فلاسفیکل سوسائٹی کے روبرو ۶ دسمبر ۱۸۴۷ء کو پڑھا تھا۔
اگرچہ اس نظریہ کو سیڈیل نے اسٹوکس کی بہ نسبت بعض باتوں میں زیادہ مکمل طور پر بیان
کیا ہے تاہم اسٹوکس کو اس امر میں سبقت حاصل ہے کہ اُس نے اُن تفاعلوں
کے عدم تسلسل کی اصلی وجہ دریافت کی جو لا تناہی سلسلوں سے تعبیر ہوتے
ہیں[2]۔ اس مضمون میں حال میں جو ترقی ہوئی ہے اُس میں یکساں اور غیر یکساں
استدقاق کے درمیانی امتیاز کو بہت اہمیت حاصل ہے۔

سیڈیل نے اس امر کو حسب ذیل مسئلہ میں مختصر کر دیا ہے :- اگر ایک
مستدق سلسلہ دیا جائے جس کی واحد ارقام متغیری کے مسلسل تفاعل ہیں اور
جو ی کے ایک غیر مسلسل تفاعل کو تعبیر کرتا ہے تو ایک نقطہ کے عین قرب
میں جہاں تفاعل غیر مسلسل ہے ی کی قیمتیں مقرر کی جا سکتی ہیں ایسی کہ
ان کے لیے سلسلہ اتنی سست رفتار سے مستدق ہو جتنی ہم چاہیں۔

سلسلہ ہندسیہ

۲۰۴ ـــ سلسلہ ہندسیہ $\text{۱} + \text{ی} + \text{ی}^{\text{۲}} + \dots + \text{ی}^{\text{ن}-\text{۱}}$ پر غور کرو جہاں
$\text{ی} = \text{لا} + \text{خ ما} = \text{ر} (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})$ ۔ اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{\text{۱} - \text{ی}^{\text{ن}}}{\text{۱} - \text{ی}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{۱} - \text{ر}^{\text{ن}} (\text{جم ن طہ} + \text{خ جب ن طہ})}{\text{۱} - \text{ر} (\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})}$$

رکھو　$\text{۱} - \text{ر جم طہ} = \text{غہ جم فہ}$ ، $\text{ر جب طہ} = \text{غہ جب فہ}$

---

[1] دیکھو Stoke's "Collected Works" Vol.I.

[2] اس انکشاف کی تاریخ کے لیے دیکھو "Reiff s "Geschichte . . . .

تو $غ = +\sqrt{1 - 2 ر جم ط + ر^2}$

پس مجموعہ ہو جاتا ہے

$\frac{1}{غ}(جم فہ + خ جب فہ) - \frac{ر^ن}{غ}\{جم (ن ط + فہ) + خ جب (ن ط + فہ)\}$ ؛

اور ن کو جب لا انتہا بڑا کر دیا جاتا ہے تو اس مجموعہ کی دوسری رقم کا مقیاس لا انتہا چھوٹا ہو جاتا ہے اگر ر < ۱ ؛ لیکن اگر ر > ۱ تو یہ لاتناہی ہو جاتا ہے۔ پس یہ لاتناہی سلسلہ

$1 + ی + ی^2 + \dots + ی^{ن-1} + \dots$

مستدق ہوتا ہے اگر ی کا مقیاس ایک سے کم ہو اور تب اس کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{غ}(جم فہ + خ جب فہ) = \frac{1 - ر جم ط + خ ر جب ط}{1 - 2 ر جم ط + ر^2}$$

اگر ی کا مقیاس ایک سے بڑا ہو تو سلسلہ متبعد ہوگا ؛ اور اگر مق ی ایک ہو تو بھی سلسلہ مستدق نہیں ہوگا کیونکہ دو سلسلوں کے جمع ن ط اور کے جب ن ط کے مجموعے جو دفعہ ۲۷ میں معلوم کیے جا چکے ہیں ایک معین انتہا پر نہیں پہنچتے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا کر دیا جاتا ہے۔

سلسلہ اور اس کے مجموعہ کے حقیقی اور خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1 - ر جم ط}{1 - 2 ر جم ط + ر^2} = 1 + ر جم ط + ر^2 جم 2 ط + \dots + ر^ن جم ن ط + \dots ،$$

$$\frac{ر جب ط}{1 - 2 ر جم ط + ر^2} = ر جب ط + ر^2 جب 2 ط + \dots + ر^ن جب ن ط + \dots ؛$$

یہ سلسلے ر کی تمام قیمتوں کے لیے جو ±۱ کے درمیان واقع ہوں درست ہیں سوائے ر = ۱ اور ر = -۱ کے جن کے لیے یہ سلسلے مستدق نہیں ہیں۔ اس کا مشاہدہ کرنے کے لیے ابتدائی سلسلہ میں صرف ی کی بجائے -ی

(258)

رکھنے کی ضرورت ہے۔

سلسلہ ہندسیہ، ی کی تمام قیمتوں کے لیے یکساں طور پر مستدق ہے اگر ی کا مقیاس $\leqslant$ ۱۔ضہ سے جہاں ضہ کوئی مستقل مثبت عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ کیونکہ پہلی ن رقموں کے بعد باقی $\frac{ی^ن}{۱-ی}$ ہے اور اس کا مقیاس $\frac{(۱-ضہ)^ن}{ضہ}$ سے کم ہے؛ تب سلسلہ ایسا ہوگا کہ ی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس $\leqslant$ ۱۔ضہ سے

$$|ب_ن(ی)| \leqslant صہ$$

اگر $\frac{(۱-ضہ)^ن}{ضہ} < صہ$، یا اگر ن $> \frac{لوک\ ضہ + لوک\ صہ}{لوک\ (۱-ضہ)}$

پس چونکہ ن کا منتخب کرنا ممکن ہے اس طرح کہ ی کی تمام قیمتوں کے لیے (جن کے مقیاس $\leqslant$ ۱۔ضہ سے) ن رقموں کے بعد والے باقی صہ سے کم ہوں اور چونکہ ن کی اس سے تمام بڑی قیمتوں کے لیے یہ درست ہے اس لیے ایسی تمام قیمتوں کے لیے سلسلہ یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ سلسلہ ہندسیہ کسی ایسے دائرہ سے محدود رقبہ میں یکساں طور پر مستدق ہے جو اکائی نصف قطر والے (مرکز مبدا پر) دائرہ کے اندر واقع ہو اور اس کا ہم مرکز ہو۔

صعودی صحیح قوتوں کے سلسلے

۲۰۳ــــــ اب ہم اس عام قوتی سلسلہ

$$ا_. + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \cdots + ا_ن ی^ن + \cdots$$

پر غور کرینگے جہاں ا، ا، ا ... مختلف عدد ہیں جو مختلف متغیری پر منحصر نہیں ہیں۔ فرض کرو کہ ی کا مقیاس ر سے تعبیر ہوتا ہے اور ا، ا، ا ... کے مقیاس عہ، عہ، عہ ... ہیں، مقیاسوں کا سلسلہ ہے

عہ + عم ر + عہ ر^{2} + ... + عہ ر^{ن} + ...

(256) اگر یہ سلسلہ مستدق ہو تو ی کا مندرجہ بالا سلسلہ مطلقاً مستدق ہوگا۔ اگر مقیاسوں کا سلسلہ ر کی کسی قیمت کے لیے مستدق ہوتا ہو تو ر کی اس سے چھوٹی قیمتوں کے لیے وہ مستدق ہوگا؛ اور اگر وہ ر کی کسی قیمت کے لیے متسع ہو تو ر کی اس سے بڑی قیمتوں کے لیے بھی وہ متسع ہوگا۔ سلسلہ عہ + عہ ر + عہ ر^{2} + ... سے متعلق تین صورتیں پیدا ہوسکتی ہیں:—

(۱) یہ سلسلہ، صفر سے مختلف ر کی بعض قیمتوں کے لیے مستدق ہوسکتا ہے اور باقی دوسری قیمتوں کے لیے متسع؛ تب ایک مثبت عدد غہ موجود ہوتا ہے ایسا کہ یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ ر < غہ اور متسع ہوتا ہے جبکہ ر > غہ۔ جب، ر = غہ تو سلسلہ مستدق ہوسکتا ہے یا متسع۔

(۲) یہ سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوسکتا ہے؛ اس امر کو غہ = ∞ سے ظاہر کرنا سہولت بخش ہے۔

(۳) یہ سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ر = ۰ کے متسع ہوسکتا ہے؛ اس کو غہ = ۰ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

کسی دی ہوئی صورت میں عدد غہ معلوم کرنے کے لیے ہم عہ$^{\frac{1}{ن}}$ کی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔ یہ ہوسکتا ہے کہ عہ$^{\frac{1}{ن}}$ ایک معین انتہا ا کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے؛ ایسی صورت میں اگر صہ کوئی اختیاری طور پر منتخب کردہ مثبت عدد ہو اتنا چھوٹا جتنا ہم چاہیں تو عہ$^{\frac{1}{ن}}$، ن کی تمام قیمتوں کے لیے (مع ایسی قیمتوں کی ایک محدود تعداد کے

اِستثنا کے) ا + صہ اور ا ـ صہ کے درمیان واقع ہوتا ہے ـ زیادہ عام صورت میں یہ ہو سکتا ہے کہ ایک ثبت عدد ا موجود ہو ایسا کہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے (سوائے ایک محدود جٹ کے) عن^(۱/ن)، ا + صہ سے کم ہو اور نیز ایسا ہو کہ ن کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے ا + صہ اور ا ـ صہ کے درمیان واقع ہو ـ ہر صورت میں عدد غہ = ۱/ا ـ اِس کو دیکھنے کے لیے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے اگر ر < ۱/ا اور متسع ہوتا ہے اگر ر > ۱/ا ـ کیونکہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ایک محدود جُٹ کے عن رن < (ا + صہ)^ن رن جہاں صہ اختیاری ہے؛

اگر ر < ۱/ا تو ہم صہ کو منتخب کر سکتے ہیں ایسا کہ (ا + صہ) ر < ۱ ـ تب سلسلہ کی تمام رقمیں (سوائے اِن کے ایک محدود جٹ کے) اُس سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقموں سے کم ہونگی جس کی نسبت مشترک (ا + صہ) ر ایک سے کم ہے؛ اس لیے سلسلہ مستدق ہے ـ اگر ر > ۱/ا تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ (ا ـ صہ) ر > ۱، اور اس طرح ن کی قیمتوں کی لاتناہی تعداد کے لیے

عن رن > (ا ـ صہ)^ن رن > ۱؛ اس لیے سلسلہ متسع ہے ـ

اگر عن^(۱/ن) کی انتہا صفر کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو ر کی ہر قیمت کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے ـ کیونکہ اس صورت میں عن رن < صہ^ن رن جہاں صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ صہ ر < ۱، اور یہ ن کی ہر قیمت کے لئے (سوائے ایسی قیمتوں کے ایک محدود جٹ کے) درست ہے ـ پس سلسلہ کی ہر رقم سوائے اِن کی ایک محدود تعداد کے ایک مستدق سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقم سے کم ہے اور اس لیے سلسلہ مستدق

ہے۔ اس صورت میں غ = ∞۔

اگر $ع_ن^{\frac{1}{ن}}$ غیر معین طور پر بڑی قیمتیں رکھے یعنی اگر کوئی ایسا عدد موجود نہ ہو جو تمام عددوں $ع_ن^{\frac{1}{ن}}$ سے بڑا ہو تو سلسلہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے الّا ر = ۰ متسع ہوتا ہے۔ اس صورت میں غ = ۰ کیونکہ اگر ر کو کوئی قیمت سوائے صفر کے دی جائے تو سلسلہ کی اُن رقموں کی تعداد لا انتہا ہوتی ہے جن میں سے ہر ایک اکائی سے بڑی ہے اور اس لیے سلسلہ متسع ہے۔

۴۰۴ ـــــــ دفعہ ماسبق میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ایک عدد غ موجود ہوتا ہے (جو ممکن ہے صفر ہو یا غیر واجب قیمت ∞ اختیار کرے) ایسا کہ سلسلہ $ع_۰ + ع_۱ ر + ع_۲ ر^۲ + ...$ مستدق ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے چھوٹی ہو، اور متسع ہوتا ہے ر کی ہر قیمت کے لیے جو غ سے بڑی ہو۔

نقطہ ی = ۰ کو مرکز مانکر اس کے گرد نصف قطر غ کا ایک دائرہ کھینچو۔ اِس دائرہ کو سلسلہ $ل_۰ + ل_۱ ی + ل_۲ ی^۲ + ...$ کے **استدقاق کا دائرہ** کہتے ہیں اور اس کے نصف قطر کو سلسلہ کے **استدقاق کا نصف قطر** کہتے ہیں۔

استدقاق کا نصف قطر محدود ہو سکتا ہے یا صفر یا لامتناہی۔

یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ $ل_۰ + ل_۱ ی + ل_۲ ی^۲ + ...$ کسی نقطہ ی کیلئے جو استدقاق کے دائرہ کے اندر واقع ہو مطلقاً مستدق ہوتا ہے؛ اور کسی نقطہ ی کے لیے جو اس دائرہ کے باہر واقع ہو متسع ہوتا ہے۔ لیکن کسی ایسے

نقطہ کے لیے جو استدقاق کے دائرہ کے محیط پر واقع ہو سلسلہ کے استدقاق سے متعلق کوئی ٹھیک عام بیان نہیں دیا جا سکتا۔

اب یہ امر کہ سلسلہ مطلقاً مستدق ہے اگر مق ی < غہ اس واقعہ سے منتج ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں مقیاسوں کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔ اور یہ امر کہ سلسلہ متبع ہے اگر مق ی کی قیمت ر > غہ اس واقعہ سے منتج ہوتا ہے کہ استدقاق کی ضروری شرط نہا $\left|\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ی}^{\text{ن}}\right| = 0$ پوری نہیں ہوتی۔ کیونکہ

$\left|\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ی}^{\text{ن}}\right| = \left(\frac{\text{ر}}{\text{غہ}}\right)^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ن}}\,\text{غہ}^{\text{ن}}$، اور ن کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لیے

$\text{ع}_{\text{ن}}\,\text{غہ}^{\text{ن}} > (1 - \text{غہ صہ})^{\text{ن}}$؛ اس لئے اگر صہ منتخب کیا جائے ایسا کہ

$$\text{ر}\left(\frac{1}{\text{غہ}} - \text{صہ}\right) > 1$$

تو ہم دیکھتے ہیں کہ $\left|\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ی}^{\text{ن}}\right| > 1$، ن کی قیمتوں کی لامتناہی تعداد کے لئے۔

(261

۲۰۵ —— اب یہ دکھایا جائیگا کہ سلسلہ $\text{ا}_0 + \text{ا}_1\text{ی} + \text{ا}_2\text{ی}^2 + \dots$ کسی دائرہ میں جس کا نصف قطر استدقاق کے نصف قطر سے کم ہو اور جس کا مرکز ی = ۰ ہو یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر غہ - ک ہے اور فرض کرو کہ غہ_1 ایک ثابت عدد ہے غہ اور غہ - ک کے درمیان۔ فرض کرو غہ - ک = غہ_1 - صہ۔

باقی $\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ی}^{\text{ن}} + \text{ا}_{\text{ن}+1}\,\text{ی}^{\text{ن}+1} + \dots$ کے انتہائی مجموعہ کا مقیاس سلسلہ

$$\text{عہ}_{\text{ن}}\,\text{ر}^{\text{ن}} + \text{عہ}_{\text{ن}+1}\,\text{ر}^{\text{ن}+1} + \dots$$

یا $$\text{ع}_{\text{ن}}\,\text{غہ}_1^{\text{ن}}\left(\frac{\text{ر}}{\text{غہ}_1}\right)^{\text{ن}} + \text{ع}_{\text{ن}+1}\,\text{غہ}_1^{\text{ن}+1}\left(\frac{\text{ر}}{\text{غہ}_1}\right)^{\text{ن}+1} + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے متجاوز نہیں ہوتا۔ لیکن اعداد $ع_ن غ_۱^ن$، $ع_{ن+۱} غ_۱^{ن+۱}$،
.... سب کے سب کسی ثابت عدد ک سے کم ہیں کیونکہ سلسلہ مستدق ہے جبکہ
$ر = غ_۱$؛ اس لیے سلسلہ کا مجموعہ $ک \{(\frac{ر}{غ_۱})^ن + (\frac{ر}{غ_۱})^{ن+۱} + ...\}$ سے یا
$ک (\frac{ر}{غ_۱})^ن (۱ - \frac{ر}{غ_۱})^{-۱}$ سے کم ہے، اور یہ $ک (۱ - \frac{ص}{غ_۱})^ن \frac{غ_۱}{ص}$ سے
کم ہے۔ اگر صہ اختیاری طور پر منتخب کردہ ایک مثبت عدد ہو تو ن کی ایک
قیمت $ن_۱$ متعین ہوسکتی ہے ایسی کہ $ن \geqslant ن_۱$ کے لیے $ک (۱ - \frac{ص}{غ_۱})^ن \frac{غ_۱}{ص} < صہ$۔
اس لیے سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + ...$ کے باقی $ب_ن (ی)$ کا مقیاس صہ سے کم ہے
$ن \geqslant ن_۱$ کے لیے اور ی کی تمام قیمتوں کے لیے ایسی کہ $مق\ ی \leqslant غ - ک$؛
اس لیے سلسلہ کا استدقاق نصف قطر غ ـ ک کے دائرہ میں یکساں ہے۔
یہ درست ہے خواہ کتنا ہی چھوٹا عدد ک (> ۰) لیا جائے، لیکن یہ دعویٰ کرنا
غیر صحیح ہوگا کہ استدقاق کے دائرہ میں استدقاق بالضرور یکساں ہوتا ہے۔

سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + ...$ کے مجموعہ کو ی کی اُن قیمتوں کے لیے
جن کے مقیاس استدقاق کے نصف قطر سے کم ہیں فا (ی) سے تعبیر کریں
تو دفعہ ۲۰۰ کی رو سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فا (ی)، استدقاق کے دائرہ کے
اندر موقوعہ تمام نقطوں کے لیے ی کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر استدقاق کا
نصف قطر لامتناہی ہو تو مستوی کے تمام محدود نقطوں کے لیے فا (ی)
مسلسل ہوتا ہے۔

سلسلوں $۱ + ی + ی^۲ + ی^۳ + \dots$

اور $۱ + \frac{ی}{۱} + \frac{ی^۲}{۲} + \frac{ی^۳}{۳} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ ان کے مجموعوں کے تفاعل فا(ی) اکائی نصف قطر کے دائرہ کے اندر ی کے مسلسل تفاعل ہیں۔

سلسلہ $۱ + \frac{ی}{\lfloor ۱} + \frac{ی^۲}{\lfloor ۲} + \frac{ی^۳}{\lfloor ۳} + \dots + \frac{ی^ن}{\lfloor ن} + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر لا متناہی ہے؛ مجموعہ کا تفاعل فا(ی)، ی کی تمام محدود قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

سلسلہ $۱ + \lfloor ۱ \, ی + \lfloor ۲ \, ی^۲ + \dots + \lfloor ن \, ی^ن + \dots$

کے استدقاق کا نصف قطر صفر ہے۔

(262) ۲۰۶ — استدقاق کے دائرہ کے محیط پر سلسلہ کا استدقاق اب تک زیر بحث نہیں آیا ہے۔ مسئلہ کے عام ہونے پر اثر نہیں پڑیگا اگر ہم استدقاق کے نصف قطر کو ایک فرض کر لیں۔

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots$ جبکہ تمام سر حقیقی ہوں استدقاق کے دائرہ پر کے نقطوں کے لیے مستدق ہوتا ہے سوائے نقطہ ی = ۱ کے اگر سر سب کے سب مثبت ہوں اور سوائے نقطہ ی = -۱ کے اگر سر باری باری سے مثبت اور منفی ہوں بشرطیکہ ہر دو صورتوں میں سر $ا_۰$، $ا_۱$، $ا_۲$ ... مطلق مقدار کے لحاظ سے نزولی ترتیب میں ہوں اور بشرطیکہ $ا_ن$ کی انتہا جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جائے صفر ہو۔

فرض کرو کہ $س_ن = ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots + ا_{ن-۱} ی^{ن-۱}$

اور فرض کرو کہ سر سب کے سب مثبت ہیں، تب

$$\text{س}_{\text{ن}}(1-\text{ی}) = \text{ا}_0 - \text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{ی}^{\text{ن}} - \text{ی}\{(\text{ا}_0-\text{ا}_1)+(\text{ا}_1-\text{ا}_2)\text{ی}+(\text{ا}_2-\text{ا}_3)\text{ی}^2+\dots$$

$$+(\text{ا}_{\text{ن}-2}-\text{ا}_{\text{ن}-1})\,\text{ی}^{\text{ن}-2}\}\text{؛}$$

اب چونکہ سلسلہ $(\text{ا}_0-\text{ا}_1)+(\text{ا}_1-\text{ا}_2)+(\text{ا}_2-\text{ا}_3)+\dots$

مستدق ہے (دیکھو دفعہ ۱۹۴، نوٹ) اس لیے یہ دو سلسلے

$$(\text{ا}_0-\text{ا}_1)+(\text{ا}_1-\text{ا}_2)\,\text{جم}\,\text{ط}+(\text{ا}_2-\text{ا}_3)\,\text{جم}\,2\text{ط}+\dots$$

$$(\text{ا}_0-\text{ا}_1)+(\text{ا}_1-\text{ا}_2)\,\text{جب}\,\text{ط}+(\text{ا}_2-\text{ا}_3)\,\text{جب}\,2\text{ط}+\dots$$

بھی مستدق ہیں کیونکہ یہ سب جیوب اور جیوب التمام ± 1 کے درمیان واقع ہوتی ہیں، پس

سلسلہ $(\text{ا}_0-\text{ا}_1)+(\text{ا}_1-\text{ا}_2)\text{ی}+(\text{ا}_2-\text{ا}_3)\text{ی}^2+\dots$

مستدق ہے اگر مق ی = ۱ - چونکہ $|\text{ا}_{\text{ن}-1}\,\text{ی}^{\text{ن}}|$ کی انتہا صفر ہے جبکہ ن لاتناہی ہو اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ نہا $\text{س}_{\text{ن}}(1-\text{ی})$ محدود ہے جبکہ مق ی = ۱،

پس نہا $\text{س}_{\text{ن}}$ محدود ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ ی = ۱ ـ

اگر سلسلہ کی رقمیں متبادلاً مثبت اور منفی ہیں تو ی کو - ی میں بدلنے سے یہ صورت متذکرہ صدر صورت میں تحویل ہو جاتی ہے ـ

لیکن جبکہ ی = ۱ یا متبادلہ علامتوں کے سروں کی صورت میں

جبکہ ی = ۱ سلسلہ کا مستدق ہونا متعین نہیں ہوا، اس کا انحصار سلسلہ کی نوعیت پر ہوتا ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ سلسلہ استدقاق کے دائرہ پر صرف نیم مستدق ہو۔

اگر سلسلہ کے سر ملتف ہوں تو ہم ایسے سلسلہ کو دو سلسلوں میں توڑ سکتے ہیں جن میں سے ایک میں سر حقیقی ہوں اور دوسرے میں خیالی۔ پھر ان دو سلسلوں پر الگ الگ غور کیا جا سکتا ہے۔

(263)

$$\text{سلسلہ} \quad 1 + \frac{ی}{1} + \frac{ی^2}{2} + \frac{ی^3}{3} + \dots$$

مستدق ہے جبکہ مق ی = ۱ سوائے اُس صورت کے جبکہ ی = ۱؛ پس یہ دو سلسلے

$\sum \frac{1}{ن}$ جم ن ط، $\sum \frac{1}{ن}$ جب ن ط دونوں مستدق ہیں سوائے اس کے کہ پہلا سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ ط صفر ہو یا π کا جفت ضعف۔

۲۰۷ —— فرض کرو کہ فا (لا)، لا کا وہ مسلسل تفاعل ہے جو سلسلہ $ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + \dots$ کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جس کے سر حقیقی ہیں اور جو لا کی ایک سے چھوٹی حقیقی قیمتوں کے لئے مستدق ہے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ لا > ۱ لیکن یہ کہ سلسلہ $ا_0 + ا_1 + ا_2 + \dots$ جو لا = ۱ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہے۔

اب ہم یہ بتائیں گے کہ سلسلہ $ا_0 + ا_1 + ا_2 + \dots$ کا مجموعہ فا (لا) کی انتہا ہے جبکہ لا ایک سے چھوٹی قیمتوں سے بڑھ کر انتہائی قیمت ایک تک پہنچتا ہے۔ پس مسلسل تفاعل فا (لا) جو لا = ۱ کے لیے فا(۱) = $\text{تہا}_{لا=1}$ فا(لا) سے تعبیر ہوتا ہے سلسلہ $ا_0 + ا_1 + ا_2 لا^2 + \dots$ کے مجموعہ کو

تعبیر کرتا ہے جبکہ لا = ۱ـ یہ مسئلہ آبیل[1] نے بیان کیا تھا۔

فرض کرو کہ $س_ن = ا_0 + ا_1 + ا_2 + \dots ا_ن$ تو $س_ن = ا$ اور اُس مسئلہ کی بموجب جو دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کیا جائیگا چونکہ سلسلے

$$ا_0 + ا_1 لا + ا_2 لا^2 + \dots + ا_ن لا^ن + \dots،$$

$$1 + لا + لا^2 + \dots + لا^ن + \dots$$

دونوں مطلقاً مستدق ہیں جبکہ لا > ۱، اس لیے ان کا حاصل ضرب

$$س_0 + س_1 لا + س_2 لا^2 + \dots + س_ن لا^ن + \dots$$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $فا (لا) \backslash (1 - لا)$ ہے جو اوپر کے دو سلسلوں کے انتہائی مجموعوں کا حاصلِ ضرب ہے۔ لہٰذا $س_ن$ کو س سے تعبیر کرو تو عدد ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $س_ن$، $س_{ن+1}$، $س_{ن+2}$ .... سب کے سب س + صہ اور س ـ صہ کے درمیان واقع ہوں جہاں صہ اختیاری طور پر منتخبہ مثبت عدد ہے۔

ن کی ایسی کسی قیمت کے لیے $س_ن لا^ن + س_{ن+1} لا^{ن+1} + \dots$ کا مجموعہ

$$(س + صہ) لا^ن \backslash (1 - لا) \quad \text{اور} \quad (س - صہ) لا^ن \backslash (1 - لا)$$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ اس لیے فا (لا)

$$(س + صہ) لا^ن + (1 - لا) (س_0 + س_1 لا + \dots + س_{ن-1} لا^{ن-1})$$

[1] دیکھو Crelle's journal, Vol; I

اور $(س - صہ) لا^ن + (۱ - لا) (س_۰ + س_۱ لا + ... + س_{ن-۱} لا^{ن-۱})$

کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$|فا(لا) - س| < صہ + |س| (۱ - لا^ن) + (۱ - لا) (|س_۰| + |س_۱| + ... + |س_{ن-۱}|)$$

صہ کے جواب میں عدد ن مقرر ہو جانے کے بعد ہم لا کی ایک قیمت (فرض کرو لا₁) منتخب کر سکتے ہیں ایسی کہ $|فا(لا) - س|$ عدداً ۲ صہ سے چھوٹا ہو کیونکہ $۱ > لا ≥ لا_۱$ اور ۱ - لا اور ۱ - $لا^ن$ اتنے چھوٹے لیے جا سکتے ہیں جتنے ہم چاہیں اگر لا کا مناسب انتخاب کیا جائے۔ اب چونکہ ۲ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فا (لا) کی انتہا لا = ۱ کے لئے س ہے۔

اگر $ا_۰، ا_۱، ا_۲ ....$ ملتف عدد ہوں تو ہم سلسلہ کو دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں ایک حقیقی اور دوسرا خیالی۔ تب مسئلہ کا اطلاق ہر حصہ پر الگ الگ ہوتا ہے اور اس لیے وہ پورے سلسلہ کے لیے درست ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ فا (ی) وہ مسلسل تفاعل ہے جو سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + ...$ کے مجموعہ کو جبکہ مق ی < ۱ تعبیر کرتا ہے جہاں ملتف عدد ر (جم طہ + خ جب طہ) ہے۔ یہ سلسلہ ان دو حصوں

$$ا_۰ + ا_۱ ر جم طہ + ا_۲ ر^۲ جم ۲ طہ + ... ،$$

$$خ (ا_۱ ر جب طہ + ا_۲ ر^۲ جب ۲ طہ + ...) ،$$

(264)

میں تقسیم ہو سکتا ہے اور مسئلہ بالا اِن دو سلسلوں میں سے ہر ایک کے لیے درست ہے۔
اس لیے اگر سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots$ مستدق ہو جبکہ ی = جم ط + خ جب ط
تو اس کا مجموعہ، ر = ۱ کے لیے فا (ی) کی انتہا ہے جبکہ ط کی قیمت کو
مستقل رکھا جائے۔ تب وہ تفاعل جو اِس سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے
استدقاق کے دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ پر مسلسل ہے بلحاظ ان نقاط
کے جو اِس نقطہ میں سے گذرنیوالے استدقاق کے دائرہ کے نصف قطر
پر ہیں۔

اِس دفعہ کی تحقیق کی ضرورت واضح کرنے کے لیے ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر سلسلہ

$$ا_۰ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + \dots$$

کی رقموں کی ترتیب کو بدل دیا جائے تو اوپر کا مسئلہ نئے سلسلہ کے لیے درست نہ ہوگا۔
مثلاً اِن دو حقیقی سلسلوں

$$لا - \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۳} لا^۳ - \frac{۱}{۴} لا^۴ + \dots،\ \text{اور}\ لا + \frac{۱}{۳} لا^۳ - \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۱}{۵} لا^۵ + \frac{۱}{۷} لا^۷ - \frac{۱}{۴} لا^۴ + \dots$$

پر غور کرو۔ جب تک کہ لا ایک سے چھوٹا رہتا ہے یہ سلسلے مطلقاً مستدق ہوتے ہیں اور اِن کا مجموعہ ایک ہی ہوتا ہے، لیکن جب، لا = ۱ تو اِن سلسلوں کے مجموعے مساوی نہیں ہوتے جیسا کہ دفعہ ۱۹۵ میں دکھایا جاچکا ہے۔ پہلے سلسلہ کا مجموعہ لا کی قیمت لا = ۱ پر مسلسل ہے لیکن دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایسا نہیں ہے۔

۲۰۸ —— ی کی قوتوں کے دو الگ الگ سلسلے

$$ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots ،$$

$$ب_۰ + ب_۱ ی + ب_۲ ی^۲ + \dots$$

نہیں ہو سکتے ایسے کہ دونوں، نصف قطر ک (> ۰) کے دائرہ میں موقوعہ تمام نقطوں کے لیے ایک ہی قیمت فا (ی) کی طرف مستدق ہوں - چونکہ وہ ی = ۰ کے لیے ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں اس لیے ہمیں حاصل ہونا چاہیئے ا = ب، اور اس طرح یہ سلسلے ا ی + ا ی^۲ + ...، ب ی + ب ی^۲ +... ایک ہی قیمت کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ مق ی ≯ ک - یہ ناممکن ہے تاوقتیکہ یہ دو سلسلے

ا + ا ی + ا ی^۲ + ...، ب + ب ی + ب ی^۲ + ...

دونوں مستدق نہ ہوں اور مق ی ≯ ک کے لیے ان کے انتہائی مجموعے ایک ہی نہ ہوں - اِن دو سلسلوں کے استدقاق کے نصف قطروں میں سے ہر ایک ≮ ک اور ان کے مجموعہ تفاعل (Sum functions) دونوں ان کے استدقاق کے دائروں کے اندر مسلسل ہیں - چونکہ اِن کے مجموعہ تفاعل نصف قطر ک کے دائرہ کے اندر ی کی ہر قیمت کے لیے سوائے ی = ۰ کے مماثل ہیں اس لیے اِن تفاعلوں کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ مماثل ہیں جبکہ ی = ۰ اور اس لیے ا = ب - اِسی طرح عمل کو جاری رکھنے سے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اِن دو سلسلوں کے تناظر سر سب کے سب مساوی ہیں اور اس لیے یہ سلسلے مماثل ہیں - (265)

دو سلسلوں کے حاصل ضرب کا استدقاق

۲۰۹ —— فرض کرو کہ دو مطلقاً مستدق سلسلوں

$$ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + \cdots + ا_ن + \cdots\cdots ،$$

$$ب_۱ + ب_۲ + ب_۳ + \cdots + ب_ن + \cdots\cdots$$

کے انتہائی مجموعے س ، سَ سے تعبیر ہوتے ہیں۔ تب یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ

$$ا_۱ب_۱ + (ا_۱ب_۲ + ا_۲ب_۱) + \cdots\cdots + (ا_۱ب_ن + ا_۲ب_{ن-۱} + \cdots + ا_نب_۱) + \cdots$$

جو دیے ہوئے سلسلوں کو باہم ضرب دینے سے حاصل ہوا ہے مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س سَ ہے۔

اس حاصل ضربی سلسلے کی ن رقموں کے مجموعہ کو $س_ن$ سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ ا اور ب کے مقیاس علی الترتیب عہ اور بہ ہیں۔

اب چونکہ سلسلے س ، سَ مطلقاً مستدق ہیں، اس لیے مقیاسوں کے سلسلے مستدق ہیں؛ ان کے مجموعوں کو م ، مَ سے تعبیر کرو اور فرض کرو

$$ش_ن = عہ_۱بہ_۱ + (عہ_۱بہ_۲ + عہ_۲بہ_۱) + \cdots + (عہ_۱بہ_ن + عہ_۲بہ_{ن-۱} + \cdots\cdots + عہ_نبہ_۱)$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $س_ن سَ_ن - س_ن = ا_۲ب_ن + ا_۳ب_{ن-۱} + \cdots + ا_نب_ن$

اس لیے $\text{مق}(س_ن سَ_ن - س_ن) \leqslant عہ_۲بہ_ن + عہ_۳بہ_{ن-۱} + \cdots عہ_نبہ_ن$

$$\leqslant م_ن مَ_ن - ش_ن$$

اب $ش_ن < م_ن مَ_ن < ش_{۲ن}$ کیونکہ $ش_{۲ن}$ میں حاصل ضرب $م_ن مَ_ن$ کی بہ نسبت زیادہ رقمیں ہیں اور $ش_ن$ میں م مَ کی بہ نسبت کم رقمیں ہیں؛ پس $ش_ن$ کی انتہا جبکہ ن کو لاانتہا بڑھایا جاتا ہے محدود ہے، اور چونکہ $ش_ن$ ، $ش_{۲ن}$ کی

انتہائیں ایک ہی ہونی چاہئیں اس لیے ان میں سے ہر ایک ھ ھَ کے مساوی ہے؛ اس طرح مق (س ن سَ ن - س ن) کی انتہا صفر ہے یا س = س سَ -

زیادہ عام طور پر یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اس مسئلہ کی صحت کے لیے یہ کافی ہے کہ سلسلوں $ا_۱$ + $ا_۲$ + ...، $ب_۱$ + $ب_۲$ + ... میں سے صرف ایک مطلقاً مستدق ہو اور دوسرا مشروطاً مستدق - اگر یہ دو سلسلے صرف مشروطاً مستدق ہوں تو حاصل ضربی سلسلہ $ا_۱ب_۱$ + ($ا_۱ب_۲$ + $ا_۲ب_۱$) + ... کا مستدق ہونا ضروری نہیں ہے لیکن اس کے مستدق ہونے کی صورت میں یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اس کا مجموعہ دیے ہوئے دو سلسلوں کے مجموعوں کا حاصل ضرب ہے[1] -

دوہرے سلسلوں کا استدقاق

(266)

۲۱۰ ——— فرض کرو کہ مثبت حقیقی عددوں $ع_{ر،س}$ کے ایک دوہرے تواتر

$ع_{۱،۱}$، $ع_{۱،۲}$، $ع_{۱،۳}$، ...، $ع_{۱،س}$ ....

$ع_{۲،۱}$، $ع_{۲،۲}$، $ع_{۲،۳}$، ....، $ع_{۲،س}$ ....

. . . .

$ع_{ر،۱}$، $ع_{ر،۲}$، $ع_{ر،۳}$، ....، $ع_{ر،س}$ ....

. . . .

پر ہم غور کرتے ہیں -

[1] ان نتیجوں کے ثبوت کے لیے دیکھو مصنف کی کتاب Theory of functions of a real variable صفحات ۵۰۰، ۵۰۱ -

مان لو کہ جب ہر صف کے عددوں کو باہم جمع کیا جاتا ہے تو ان کے مجموعہ کی ایک معین انتہا ہے؛ فرض کرو کہ پہلی، دوسری، ... ر ویں، ... صفوں کے لیے اس انتہائی مجموعہ کی قیمتیں $س_{1}$، $س_{2}$، ...، $س_{ر}$، ... ہیں۔ نیز یہ مان لو کہ سلسلہ $س_{1} + س_{2} + \cdots + س_{ر} + \cdots$ مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س ہے۔ یہ ثابت کیا جائیگا کہ سلسلہ

$$ع_{1,س} + ع_{2,س} + \cdots + ع_{ر,س} + \cdots\cdots$$

جو کسی ایک ستون کے عددوں کو جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستدق ہے اور اگر اس کا انتہائی مجموعہ $م_{س}$ سے تعبیر ہو تو سلسلہ

$$م_{1} + م_{2} + م_{3} + \cdots\cdots$$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ س ہے۔

یہ بات کہ $ع_{1,س} + ع_{2,س} + \cdots + ع_{ر,س} + \cdots\cdots$

مستدق ہے اس واقعہ سے نتیج ہوتی ہے کہ اس سلسلہ کی ہر رقم مستدق سلسلے $س_{1} + س_{2} + \cdots\cdots + س_{ر} + \cdots$ کی تناظر رقم سے چھوٹی ہے۔ ایک مثبت عدد پ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر اعداد

$$م_{1} - \sum_{ن=1}^{ن=پ} ع_{ن,1}،\ م_{2} - \sum_{ن=1}^{ن=پ} ع_{ن,2}،\ \cdots،\ م_{ر} - \sum_{ن=1}^{ن=پ} ع_{ن,ر}$$

سب کے سب $\frac{صہ}{ر}$ سے چھوٹے ہوں۔ اس لیے

$$م_{1} + م_{2} + \cdots + م_{ر} < صہ + س_{1} + س_{2} + \cdots + س_{پ}\ \text{یا} < صہ + س$$

اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے سلسلہ $م_{1} + م_{2} + \cdots\cdots$

مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ $\leqslant$ س، کیونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے۔ نیز عدد صحیح ق منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر اعداد

$$س_۱ - \sum_{ن=۱}^{ن=ق} عہ_{۱،ن}،\quad س_۲ - \sum_{ن=۱}^{ن=ق} عہ_{۲،ن}،\ \ldots،\quad س_ر - \sum_{ن=۱}^{ن=ق} عہ_{ر،ن}$$

سب کے سب $\frac{صہ}{ر}$ سے چھوٹے ہوں۔ اِس لیے سلسلہ $م_۱ + م_۲ + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ، $س_۱ + س_۲ + \ldots + س_ر$ ـ صہ سے بڑا ہے؛ اور چونکہ یہ ر کی ہر قیمت کے لیے درست ہے اس لیے یہ انتہائی مجموعہ $\geqslant$ س ـ صہ ـ اب چونکہ صہ اختیاری چھوٹا عدد ہے اسلیے سلسلہ $م_۱ + م_۲ + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ $\geqslant$ س، لیکن یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ یہ انتہائی مجموعہ $\leqslant$ س ـ پس یہ انتہائی مجموعہ س کے مساوی ہے۔

اگر مثبت اعداد $عہ_{ر،س}$ ایسے ہوں کہ سلسلوں $عہ_{ر،۱} + عہ_{ر،۲} + \ldots$ میں سے ہر سلسلہ ایک عدد $س_ر$ کی طرف مستدق ہو اور اس طور پر کہ سلسلہ $س_۱ + س_۲ + \ldots$ مستدق ہو تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد $عہ_{ر،س}$ مثبت عددوں کے ایک مستدق دوہرے سلسلہ کی رقمیں ہیں اور اس سلسلہ کا مجموعہ س ہے۔ اِس ثابت شدہ مسئلہ کی بموجب اِس دوہرے سلسلہ کا انتہائی مجموعہ وہی ہوگا خواہ عمل جمع پہلے س کے لحاظ سے اور پھر ر کے لحاظ سے ہو یا اِس ترتیب کے بالعکس ـ اس طرح

$$\sum_{ر=۱}^{ر=\infty} \sum_{س=۱}^{س=\infty} عہ_{ر،س} = \sum_{س=۱}^{س=\infty} \sum_{ر=۱}^{ر=\infty} عہ_{ر،س} = س$$

(267)

اگر عددوں $عہ_{ر،س}$ پر ایک ہی علامت کے ہونے کی قید نہ ہو اور اگر اعداد

$|ع_{ر،س}|$ ایک مستدق دوہرے سلسلے کی رقمیں ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ اعداد $ع_{ر،س}$ **ایک مطلقاً مستدق** دوہرے سلسلے کی رقمیں ہیں۔

اگر وہ دوہرا سلسلہ جس کی رقمیں $ع_{ر،س}$ ہیں مطلقاً مستدق ہو تو

$$\sum_{ر=1}^{ر=\infty} \sum_{س=1}^{س=\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=1}^{س=\infty} \sum_{ر=1}^{ر=\infty} ع_{ر،س}$$

کیونکہ فرض کرو $ع_{ر،س} = ب_{ر،س} - ج_{ر،س}$ جہاں $ج_{ر،س} = 0$ جبکہ $ع_{ر،س}$ مثبت ہوتا ہے اور $ب_{ر،س} = 0$ جبکہ $ع_{ر،س}$ منفی ہوتا ہے۔ پس دیئے ہوئے سلسلہ کو دو سلسلوں کا فرق خیال کر سکتے ہیں جن کی رقمیں مثبت اعداد $ب_{ر،س}$ اور $ج_{ر،س}$ ہیں۔ اب چونکہ وہ سلسلہ جس کی عام رقم $ب_{ر،س} + ج_{ر،س}$ ہے مستدق ہے اسلئے وہ دو سلسلے جنکی عام رقمیں $ب_{ر،س}$ اور $ج_{ر،س}$ ہیں دونوں مستدق ہیں اور ان کے مجموعے کسی ایک ترتیب میں لئے جا سکتے ہیں۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ جسکی عام رقم $ع_{ر،س}$ ہے کسی ایک ترتیب میں حاصل جمع کو متاثر کئے بغیر لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ $\sum_{ر=1}^{ر=\infty} \sum_{س=1}^{س=\infty} ع_{ر،س} = \sum_{س=1}^{س=\infty} \sum_{ر=1}^{ر=\infty} ع_{ر،س}$

اس وقت بھی درست ہے جبکہ اعداد $ع_{ر،س}$ ملتف ہوں اگر مقیاسوں $|ع_{ر،س}|$ کا سلسلہ مطلقاً مستدق ہو۔ کیونکہ اگر $ع_{ر،س} = ج_{ر،س} + خ ض_{ر،س}$ تو وہ سلسلے

جن کی عام رقمیں $ج_{ر، س}$، $ض_{ر، س}$ ہیں دونوں مطلقاً مستدق ہیں اور اس لیے مطلوبہ نتیجہ بر آمد ہوتا ہے۔

اِس عام مسئلہ کو شکل ذیل میں بھی بیان کیا جا سکتا ہے :-

اگر $ا_۱ + ا_۲ + ا_۳ + ا_۴ + \dots$ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک مستدق سلسلہ ہو اور اگر ہر رقم $ا_ر$ کو ایک مطلقاً مستدق سلسلہ

$$ا_{ر، ۱} + ا_{ر، ۲} + ا_{ر، ۳} + \dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے بیان کیا جائے تو دیے ہوئے سلسلہ کی بجائے، اس کے انتہائی مجموعہ کو بدلے بغیر، سلسلہ

$$\sum_{پ=۱}^{پ=\infty} ا_{پ، ۱} + \sum_{پ=۱}^{پ=\infty} ا_{پ، ۲} + \dots$$

رکھا جا سکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ

$$س_۱ + س_۲ + س_۳ + \dots$$

مستدق ہو جہاں $س_ر$ سے

$$|ا_{ر، ۱}| + |ا_{ر، ۲}| + |ا_{ر، ۳}| + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

اس مسئلہ کی ایک اہم صورت جس سے ہم بعد میں استفادہ کرینگے حسب ذیل ہے :-

اگر $ا_۰ + ا_۱ ی + ا_۲ ی^۲ + \dots$ ایک مستدق سلسلہ ہو جس کا انتہائی مجموعہ فا(ی)

(268)

ہے اور اگر $ا_۰'$، $ا_۱'$، $ا_۲'$ . . . حسب ذیل مطلقاً مستدق سلسلوں

$$ب_{۰،۰} + ب_{۰،۱} ما + ب_{۰،۲} ما^۲ + ب_{۰،۳} ما^۳ + \ldots$$

$$ب_{۱،۰} + ب_{۱،۱} ما + ب_{۱،۲} ما^۲ + ب_{۱،۳} ما^۳ + \ldots$$

$$ب_{۲،۰} + ب_{۲،۱} ما + ب_{۲،۲} ما^۲ + ب_{۲،۳} ما^۳ + \ldots$$

— — — — — — — — — — — — —

کے انتہائی مجموعے ہوں تب اگر سلسلہ $ا_۰ + ا_۱ (ی) + ا_۲ (ی)^۲ + \ldots$ مستدق ہو جہاں $ا_۰$ سے سلسلہ $|ب_{۰،۰}| + |ب_{۰،۱} ما| + |ب_{۰،۲} ما^۲| + \ldots$ کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے تو سلسلہ

$$(ب_{۰،۰} + ب_{۱،۰} ی + ب_{۲،۰} ی^۲ + \ldots) + (ب_{۰،۱} + ب_{۱،۱} ی + ب_{۲،۱} ی^۲ + \ldots) ما$$

$$+ (ب_{۰،۲} + ب_{۱،۲} ی + ب_{۲،۲} ی^۲ + \ldots) ما^۲ + \ldots$$

جو دیے ہوئے سلسلہ میں $ا_۰'$، $ا_۱'$، $ا_۲'$ . . . . کی بجائے اندراج کرنے سے حاصل ہوتا ہے اور جس کی رقموں کو ما کی قوتوں کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے مستدق ہے اور اس کا انتہائی مجموعہ فا (ما، ی) ہے جو وہی ہے جو دیے ہوئے سلسلہ کا ہے۔

مسئلہ ثنائی

۲۱۱ —— سلسلہ

$$۱ + م ی + \frac{م (م - ۱)}{\underline{|۲}} ی^۲ + \frac{م (م - ۱) (م - ۲)}{\underline{|۳}} ی^۳ + \ldots$$

جس میں ی کی قوتیں صحیح اعداد ہیں اور جس کو ی کی صعودی قوتوں میں

ترتیب دیا گیا ہے ایک بہت اہم سلسلہ ہے۔

اُس خاص صورت میں جبکہ م مثبت صحیح عدد ہو یہ سلسلہ محدود ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ $(\text{۱} + \text{ی})^{\text{م}}$ ہوتا ہے۔ اس کا ثبوت جو بالعموم دیا جاتا ہے ی کی ملتف قیمت پر بھی اطلاق پذیر ہے۔

ہم فرض کرینگے کہ ی ایک ملتف عدد ہے لیکن اپنی توجہ صرف اُس صورت تک محدود رکھینگے جس میں م حقیقی ہو۔ اس صورت میں $\frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{ن}+\text{۱}}} = \frac{\text{ن}+\text{۱}}{\text{ن}-\text{م}}$ جس کی انتہائی قیمت ایک ہے۔ اس لیے اس سلسلے کے استدقاق کا نصف قطر ایک ہے۔ اکائی نصف قطر کے اِس دائرہ کے اندر کسی نقطہ ی پر یہ سلسلہ مطلقاً مستدق ہے اور اکائی سے کم نصف قطر والے کسی دائرہ میں یکساں طور پر مستدق ہے۔ (269)

سلسلہ کے انتہائی مجموعہ کو ف (م) سے تعبیر کرنے اور دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کرنے سے استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ نقطوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}}) \times \text{ف}(\text{م}_{\text{۲}}) = \text{ف}(\text{م}_{\text{۱}} + \text{م}_{\text{۲}})$$

اور اس لیے $\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}})\,\text{ف}(\text{م}_{\text{۲}})\,\text{ف}(\text{م}_{\text{۳}}) \ldots \text{ف}(\text{م}_{\text{ق}}) = \text{ف}(\text{م}_{\text{۱}} + \text{م}_{\text{۲}} + \cdots + \text{م}_{\text{ق}})$

اول فرض کرو کہ م مختصر ترین شکل میں ایک مثبت کسر $\frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ ہے۔

رکھو $\text{م}_{\text{۱}} = \text{م}_{\text{۲}} = \cdots = \text{م}_{\text{ق}} = \frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ تو

$$\left[\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)\right]^{\text{ق}} = \text{ف}(\text{پ})$$

اس لیے ف$(\frac{\text{پ}}{\text{ق}})$، ف(پ) کا ق واں جذر ہے یعنی $(\text{۱}+\text{ی})^{\text{پ}}$ کا۔

فرض کرو کہ

$$\text{۱} + \text{ر جم طہ} = \text{ا جم فہ}،\quad \text{ر جب طہ} = \text{ا جب فہ}$$

تب

$$(\text{۱}+\text{ی})^{\text{پ}} = \text{ا}^{\text{پ}}\,(\text{جم پ فہ} + \text{خ جب پ فہ})$$

اور اس کے ق ویں جذروں کی قیمتیں ہیں

$$\text{ا}^{\frac{\text{پ}}{\text{ق}}}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{پ فہ} + \text{۲ س}\,\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{پ فہ} + \text{۲ س}\,\pi}{\text{ق}}\right\}$$

جہاں س کی قیمتیں ۰، ۱، ۲، ...، ق-۱ ہیں۔ نیز

$$\text{ا} = +\sqrt{\text{۱} + \text{۲ ر جم طہ} + \text{ر}^{\text{۲}}}$$

اور ہم فہ کو $\text{مماس}^{-\text{۱}}\,\frac{\text{ر جب طہ}}{\text{۱} + \text{ر جم طہ}}$ کی وہ قیمت فرض کر سکتے ہیں جو حادہ ہے (مثبت یا منفی)؛ ایسی قیمت موجود ہوتی ہے کیونکہ جم فہ استدقاق کے دائرہ کے اندر موقوعہ تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے۔

پس ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{ا}^{\frac{\text{پ}}{\text{ق}}}\left\{\text{جم}\,\frac{\text{پ فہ} + \text{۲ س}\,\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{پ فہ} + \text{۲ س}\,\pi}{\text{ق}}\right\}$ کی ایک قیمت ف$(\frac{\text{پ}}{\text{ق}})$ ہے اور س کی ہمیشہ وہی قیمت ہونی چاہئے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ استدقاق کے دائرہ کے اندر تمام نقطوں کے لیے ف$(\frac{\text{پ}}{\text{ق}})$ ایک مسلسل تفاعل ہے۔

س کی یہ قیمت معلوم کرنے کے لیے رکھو فہ = ۰، تب ف$(\frac{\text{پ}}{\text{ق}})$ حقیقی ہے

اور اس لیے

$$\sqrt[\text{ق}]{\text{ر}^{\text{پ}}}\left\{\text{جم}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ق}}+\text{خ جب}\,\frac{۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ق}}\right\}$$

کی ایک حقیقی قیمت کے مساوی ہونا چاہیے اور اس لیے س = ۰ یا س = $\frac{۱}{۲}$ ق اگر ق جفت ہے۔ اگر ر کافی طور پر چھوٹا ہے تو ف $\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)$ یقیناً مثبت ہے؛ اس لیے س، $\frac{۱}{۲}$ ق کے مساوی نہیں ہو سکتا اور اس لیے صفر ہونا چاہیے۔

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ سلسلہ کا مجموعہ جبکہ م ایک مثبت منطق عدد $\frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ ہو $(۱+\text{ی})^{\frac{\text{پ}}{\text{ق}}}$ کی خاص قیمت ہے یعنی

$$(۱+۲\,\text{ر جم ط}+\text{ر}^{۲})^{\frac{\text{پ}}{۲\text{ق}}}\left(\text{جم}\,\frac{\text{پ فہ}}{\text{ق}}+\text{خ جب}\,\frac{\text{پ فہ}}{\text{ق}}\right)$$

(270) جس میں جملہ $(۱+۲\,\text{ر جم ط}+\text{ر}^{۲})^{\frac{\text{پ}}{۲\text{ق}}}$ اپنی حقیقی قیمت رکھتا ہے اور فہ، مس$^{-۱}\frac{\text{ر جب ط}}{۱+\text{ر جم ط}}$ کی عددی طور پر کم سے کم قیمت ہے جہاں ی = ر(جم ط + خ جب ط)۔

ثانیاً فرض کرو کہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہے؛ ہم اس کو مثبت منطق عددوں $\text{م}_۱$، $\text{م}_۲$، ... $\text{م}_\text{ر}$، ... کے ایک تواتر کی انتہا سمجھینگے۔ تب یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ف (م)، تواتر ف ($\text{م}_۱$)، ف ($\text{م}_۲$)، ... ف ($\text{م}_\text{ر}$)، ... کی انتہا ہے، یا ف (م) = نہا ف ($\text{م}_\text{ر}$)۔ استدقاق کے دائرہ کے اندر کسی نقطہ ی کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$ف(م_ر) = ۱ + م_ر ی + \frac{م_ر(م_ر - ۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \ldots + \frac{م_ر(م_ر-۱)\ldots(م_ر - ن + ۲)}{\lfloor ن-۱} ی^{ن-۱} + ب_ن(ی)$$

جہاں $|ب_ن(ی)|$ مستدق سلسلہ

$$\frac{ن(ن+۱)\ldots(ن+ن-۱)}{\lfloor ن} |ی|^ن + \frac{ن(ن+۱)\ldots(ن+ن)}{\lfloor ن+۱} |ی|^{ن+۱} + \ldots$$

کے انتہائی مجموعہ سے کم ہے جس میں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے جو $م_۱$، $م_۲$، ...، $م_ر$، .... میں سے ہر ایک سے بڑا ہے۔ ن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے $|ب_ن(ی)| < صہ$، تمام اعداد $م_ر$ کے لیے جہاں صہ اختیاری مثبت عدد ہے۔ یہ واضح ہے کہ محدود سلسلہ

$$۱ + م_ر ی + \frac{م_ر(م_ر-۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \ldots + \frac{م_ر(م_ر-۱)\ldots(م_ر-ن+۲)}{\lfloor ن-۱} ی^{ن-۱}$$

کے مجموعہ کی انتہا جبکہ $م_ر$، م کی طرف مستدق ہو یہ ہے

$$۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \ldots + \frac{م(م-۱)\ldots(م-ن+۲)}{\lfloor ن-۱} ی^{ن-۱}$$

اور اس لیے یہ $ف(م_ر) - ب_ن(ی)$ کی انتہا ہے۔ غیر منطق قوت کی تعریف جو دفعہ ۱۸۶ میں دی گئی ہے اس کی بموجب $(۱+ی)^{م_ر}$ کی خاص قیمت کی انتہا $(۱+ی)^م$ ہے۔ چونکہ $|ب_ن(ی)| < صہ$ تمام اعداد $م_۱$، $م_۲$، ...، $م_ر$، ... کے لئے اسلئے انتہا $|ب_ن(ی)|$ جسکی

ایک مُعیّن قیمت ہونی چاہیے ⩽ صہ ہے۔
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \dots + \frac{م(م-۱)\dots(م-ن+۲)}{\lfloor ن-۱} ی^{ن-۱}$$

$(۱+ی)^م$ کی خاص قیمت سے بقدر ایک ایسے عدد کے مختلف ہے جس کا مقیاس ن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لیے صہ سے بڑا نہیں ہے۔ اس لیے ثابت ہوا کہ ثنائی سلسلہ م کی ثبت غیر منطق قیمت کے لیے مستدق ہے اور $(۱+ی)^م$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے۔

(271)

آخر میں فرض کرو کہ م ایک منفی عدد $-م_۱$ ہے۔ تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $ف(م)\,ف(م_۱) = ف(۰) = ۱$، اس لیے $ف(م) = \frac{۱}{ف(م_۱)}$، یا $ف(م)$، $(۱+ی)^{م_۱}$ کی صدر قیمت کا مقلوب ہے یا $(۱+ی)^م$ کی صدر قیمت ہے۔

ہم اس پورے نتیجہ کو اِس طرح بیان کرسکتے ہیں:—

سلسلہ $$۱ + م ی + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} ی^۲ + \dots + \frac{م(م-۱)\dots(م-ن+۱)}{\lfloor ن} ی^ن$$

کا مجموعہ ی کی ان تمام قیمتوں کے لیے جن کا مقیاس ایک سے کم ہے، $(۱+ی)^م$ کی صدر قیمت کے مساوی ہے جو یہ ہے

$$(۱ + ۲ ر جم طہ + ر^۲)^{\frac{۱}{۲} م} (جم م فہ + خ جب م فہ)$$

جبکہ م کوئی حقیقی عدد ہو۔ جملہ بالا میں ی کا مقیاس ر ہے اور

اس کی دلیل طہ ہے، اور فہ ہس ا $\frac{\text{ر جب طہ}}{\text{ا + ر جم طہ}}$ کی وہ قیمت ہے جو $\pm \frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

یہ نتیجہ کوشی نے حاصل کیا تھا اور اسکی کتاب "Analyse Algébrique" میں ملیگا۔

۲۱۴ ——— اب صرف اُس صورت پر غور کرنا باقی رہگیا ہے جب کہ ہق ی = ا،

سلسلہ $۱ + م + \frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲} + \frac{م(م-۱)(م-۲)}{\lfloor ۳} + \cdots$

کی رقموں کو $ل_۰$، $ل_۱$، $ل_۲$ ... سے تعبیر کریں تو $\frac{ل_{ن+۱}}{ل_ن} = (م-ن) \backslash (ن+۱)$،

اگر ن > م تو یہ نسبت منفی ہے اور اس لیے ایک خاص رقم کے بعد اِس سلسلہ کی رقمیں باری باری سے مثبت اور منفی ہیں۔ یہ سلسلہ دفعہ ۱۹۴ کی رو سے مستدق ہے اگر بلحاظ مقدار اس کی رقمیں گھٹتی جائیں اور آخرالامر لاانتہا چھوٹی ہو جائیں۔ یہ بات اُس وقت ہو گی جبکہ ن - م < ن + ۱ یعنے جبکہ م > -۱، پس سلسلہ نیم مستدق ہوتا ہے اگر م > -۱؛ لیکن اگر م < -۱ تو وہ قسع ہوتا ہے کیونکہ رقموں کی مطلق مقداریں غیر معین طور پر بڑھتی ہیں۔

یہ ثابت کرنے کے لیے کہ جب، م > -۱ تو $ل_ن$ کی مطلق مقدار غیر معین طور پر گھٹتی ہے جیسے ن غیر معین طور پر بڑھتا ہے مثبت عدد م + ۱ کی بجائے س لکھو اور $|ل_ن|$ کے لیے جو جملہ ہے اُس میں اجزائے ضربی کی کسی خاص تعداد کے حاصل ضرب کو ک سے تعبیر کرو۔ تب اگر

س سے عین بڑا صحیح عدد ر ہو تو حاصل ہوتا ہے

$$|\text{ا}_{\text{ن}}| = \text{ک}\left(۱-\frac{\text{س}}{\text{ر}}\right)\left(-\frac{\text{س}}{\text{ر}+۱}\right)\cdots\left(۱-\frac{\text{س}}{\text{ن}}\right)$$

$$< \text{ک}\left[\left(۱+\frac{\text{س}}{\text{ر}}\right)\left(۱+\frac{\text{س}}{\text{ر}+۱}\right)\cdots\left(۱+\frac{\text{س}}{\text{ن}}\right)\right]^{-۱}$$

$$< \text{ک}\left[۱+\text{س}\left(\frac{۱}{\text{ر}}+\frac{۱}{\text{ر}+۱}+\cdots+\frac{۱}{\text{ن}}\right)\right]^{-۱}$$

سلسلہ $\frac{۱}{\text{ر}}+\frac{۱}{\text{ر}+۱}+\frac{۱}{\text{ر}+۲}+\cdots$ کی پہلی ر رقموں کا مجموعہ $> \frac{۱}{۲}$ اور ان کے بعد ۲ ر رقموں کا مجموعہ بھی $> \frac{۱}{۲}$، اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے ن کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں سلسلہ کا مجموعہ $\frac{۱}{۲}$ کے کسی مقررہ ضعف سے بڑا ہوتا ہے اور اس لئے سلسلہ کا مجموعہ ن کے ساتھ لاانتہا بڑھتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $|\text{ا}_{\text{ن}}|$ لاانتہا گھٹتا ہے جیسے ن لاانتہا بڑھتا ہے۔ جب م = ۱- تو ثنائی سلسلہ کی رقمیں متبادلاً ۱+ اور ۱- ہیں اور اس لئے سلسلہ مستدق نہیں ہوتا۔

دفعہ ۲۰۶ کے مسئلہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ سلسلہ

$$۱+\text{م}\,\text{ی}+\frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲}\,\text{ی}^{۲}+\cdots$$

مستدق ہوتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ م > ۱- اور ی ≠ ۱-

جب ی = ۱- تو سلسلہ کی تمام رقمیں ایک خاص رقم کے بعد ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں؛ پس معلومہ جانچ

$$\text{نہا}_{\text{ن}}\left(۱+\frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_{\text{ن}-۱}}\right) > ۱$$

لگانے سے سلسلہ مستدق ہوگا اگر

$$\text{نہا}_{\text{ن}}\left\{۱-(\text{ن}-\text{م}-۱)\big/\text{ن}\right\} > ۱،$$

(272)

یا اگر $م > ۰$

دفعہ ۲۰۷ میں مذکورہ مسئلہ کی بموجب جب سلسلہ

$$۱ + م\,ی + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} ی^۲ + \dots$$

استدقاق کے دائرہ پر مستدق ہوتا ہو تو اس کا مجموعہ جملہ

$$(۱ + ۲\,ر\,\text{جتم}\,\text{ط} + ر^۲)^{\frac{۱}{۲}م} (\text{جتم}\,م\,\text{ف} + \text{خ}\,\text{جیب}\,م\,\text{ف})$$

کی قیمت ہے اس نقطہ پر۔ ہم پورے نتیجہ کو اس طرح بیان کر سکتے ہیں:-

سلسلہ $۱ + م\,ی + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} ی^۲ + \dots + \frac{م(م-۱)\dots(م-ن+۱)}{\underline{|ن}} ی^ن + \dots$

ی کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ م مثبت ہو؛ نیز مستدق ہوتا ہے اگر م صفر اور -۱ کے درمیان ہو ی کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے ی = -۱ کے اور اس صورت میں ی کی دلیل π ہے۔ یہ سلسلہ متسع ہوتا ہے جبکہ م = -۱ اور جبکہ م < -۱ ی کی تمام قیمتوں کے لیے جن کے لیے سلسلہ مستدق ہوتا ہے اس کا مجموعہ $(۲ + ۲\,\text{جتم}\,\text{ط})^{\frac{۱}{۲}م} (\text{جتم}\,\frac{۱}{۲}م\,\text{ط} + \text{خ}\,\text{جیب}\,\frac{۱}{۲}م\,\text{ط})$ ہے جہاں ط کی قیمت $\pm\pi$ کے درمیان واقع ہے۔

ابیل (Abel) نے ایک مقالہ میں جو (Crelle's journal v d.i) میں شایع ہوا تھا م کی مختلف قیمتوں کے لیے مسئلہ ثنائی کی عام صورت پر بحث کی ہے۔

ضعفی زاویوں کے دائری تفاعل

۲۱۳ ـــــ عام شکل میں مسئلہ ثنائی کا ایک اہم اطلاق $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\text{م}}$ کا پھیلاؤ ہے جس کی خاص قیمت ڈیموائر کے مسئلہ کی رو سے جم م ط + خ جب م ط ہے اگر ط $\pm \pi$ کے درمیان واقع ہو۔ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\text{م}}$ کو شکل $\text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط} \times (\text{۱} + \text{خ مس ط})^{\text{م}}$ میں لکھنے سے

$$\text{جم م ط} + \text{خ جب م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط}\left[\left\{\text{۱} - \frac{\text{م(م} - \text{۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{مس}^{\text{۲}}\,\text{ط} + \dots\right\}\right.$$

$$\left. + \text{خ}\left\{\text{م مس ط} - \frac{\text{م(م} - \text{۱)(م} - \text{۲)}}{\underline{|\text{۳}}}\,\text{مس}^{\text{۳}}\,\text{ط} + \dots\right\}\right]$$

بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو؛ یہ شرط پوری ہوگی اگر ط حدود $\pm \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$ کے درمیان واقع ہو خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو، اور نیز یہ شرط پوری ہوگی اگر ط $= \pm \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$ بشرطیکہ م $> -\text{۱}$،

(273)

(۱) فرض کرو کہ م مثبت ہے، تب

$$\text{جم م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط}\left\{\text{۱} - \frac{\text{م(م} - \text{۱)}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{مس}^{\text{۲}}\,\text{ط}\right.$$

$$\left. + \frac{\text{م(م} - \text{۱)(م} - \text{۲)(م} - \text{۳)}}{\underline{|\text{۴}}}\,\text{مس}^{\text{۴}}\,\text{ط} - \dots\right\} \qquad \dots\dots(\text{۱})$$

$$\text{جب م ط} = \text{جم}^{\text{م}}\,\text{ط}\left\{\text{م مس ط} - \frac{\text{م(م} - \text{۱)(م} - \text{۲)}}{\underline{|\text{۳}}}\,\text{مس}^{\text{۳}}\,\text{ط} + \dots\right\} \qquad \dots\dots(\text{۲})$$

م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ط، $\pm \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$ کے درمیان واقع ہو، اور نیز یہ سلسلے درست ہیں ط $= \pm \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$ کے لیے بھی ـــ دفعہ ۱۵ میں

جو ضابطے حاصل کئے گئے تھے وہ مثبت صحیح عدد م کی صورت کے لیے تھے اور اِس صورت میں استدقاق کی شرط نہیں ہے۔ مندرجہ بالا نتیجے اِن ضابطوں کی توسیعات ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ م منفی ہے، تب م کو ـم میں بدلنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم م ط جم}^{\text{م}}\text{ط} = 1 - \frac{\text{م(م}+1)}{\lfloor 2}\,\text{مس}^2\text{ط} + \frac{\text{م(م}+1)(\text{م}+2)(\text{م}+3)}{\lfloor 4}\,\text{مس}^4\text{ط} + \dots \quad (3)$$

$$\text{جب م ط جم}^{\text{م}}\text{ط} = \text{م مس ط} - \frac{\text{م(م}+1)(\text{م}+2)}{\lfloor 3}\,\text{مس}^3\text{ط} + \dots \quad (4)$$

جو م کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہیں بشرطیکہ ط، $\pm \frac{1}{4}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔ یہ نتیجے ط $= \pm \frac{1}{4}\pi$ کے لیے صرف اُس صورت میں درست ہیں جبکہ م، ۱ اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

۲۱۴ ــــــ دفعہ ماسبق کے ضابطے (۱) اور (۲) اُس صورت میں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو ساتویں باب میں جم م فہ اور جب م فہ کے جملوں کو جب فہ کی صعودی قوتوں کے سلسلوں میں حاصل کرنے میں استعمال ہو چکے ہیں۔ اب ہم اسی طرح کے جملے معلوم کرینگے جبکہ م مثبت صحیح عدد نہ ہو۔

ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب، م ایک جفت مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جم م فہ} = 1 - \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\,\text{جب}^2\text{فہ} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)}{\lfloor 4}\,\text{جب}^4\text{فہ}$$

$$- \frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)(\text{م}^2-4^2)}{\lfloor 6}\,\text{جب}^6\text{فہ} + \dots \quad (5)$$

اور جب م ایک طاق مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{جب م فہ} = \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^2-1)}{\underline{|3}}\,\text{جب}^3\text{ فہ}$$

$$+\frac{\text{م}(\text{م}^2-1)(\text{م}^2-3^2)}{\underline{|5}}\,\text{جب}^5\text{ فہ} - \ldots\text{،}\ \ldots(6)$$

(274) یہ جملے اِس طرح حاصل کیے گئے تھے کہ جم م فہ اور جب م فہ کے لیے جو جملے جم فہ اور جب فہ کی قوتوں میں تھے ان میں جم فہ کی قوتوں کی بجائے ۱ - جب^2 فہ کی قوتیں درج کی گئی تھیں اور پھر اِن قوتوں کو (جو مثبت صحیح عدد تھے) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا کر نتیجہ کو جب فہ کی قوتوں میں ترتیب دیا گیا تھا - یہی سلسلے حاصل ہونگے جبکہ م کوئی مثبت صحیح عدد ہو بلا لحاظ جفت یا طاق ہونے کے بشرطیکہ جم فہ مثبت ہو اور یہ اس وقت مثبت ہوگا جبکہ فہ، $\pm\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو - اب ۱ - جم^2 فہ کی قوتیں ضرور نہیں کہ صحیح اعداد ہی ہوں لیکن مسئلہ ثنائی بر بنہم اطلاق پذیر ہوگا کیونکہ تمام سلسلے مستدق ہو نگے - چونکہ جب^2 فہ کی قوتوں کے تمام سلسلے مستدق ہوتے ہیں اور چونکہ جم م فہ، جب م فہ کے اصلی جملوں میں سے ہر جملہ میں رقموں کی صرف ایک محدود تعداد شامل ہوتی ہے اس لیے پھیلاؤں کے نتیجے کو جب^2 فہ کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں مرتب کیا جا سکتا ہے - اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر م کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو سلسلوں (۵) اور (۶) میں سے ہر ایک درست ہے بشرطیکہ فہ، $\pm\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہو؛ پہلا سلسلہ رقموں کی محدود تعداد پر مشتمل نہیں ہوتا جب تک کہ م جفت نہ ہو، اور دوسرا سلسلہ جب تک کہ م طاق نہ ہو۔

فرض کرو کہ سلسلہ

$$1+\text{م}(\text{خ جب فہ})+\frac{\text{م}^2}{\underline{|2}}(\text{خ جب فہ})^2+\frac{\text{م}(\text{م}^2-1)}{\underline{|3}}(\text{خ جب فہ})^3+\ldots$$

کا انتہائی مجموعہ ف (م) سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ، سلسلہ (۶) کو خ سے ضرب دیکر سلسلہ (۵) میں جمع کرنے سے حاصل ہوا ہے۔
جب، م ثبت صحیح عدد ہو تو ف (م) = جم م فہ + خ جب م فہ
اگر فہ، $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔ اب جبکہ م_1، م_2 صحیح اعداد ہوں تو

$$\text{ف}(\text{م}_1)\times\text{ف}(\text{م}_2) = (\text{جم م}_1\text{ فہ} + \text{خ جب م}_1\text{ فہ})(\text{جم م}_2\text{ فہ} + \text{خ جب م}_2\text{ فہ})$$

$$= \text{جم}(\text{م}_1+\text{م}_2)\text{ فہ} + \text{خ جب}(\text{م}_1+\text{م}_2)\text{ فہ}$$

$$= \text{ف}(\text{م}_1+\text{م}_2)$$

ان دو سلسلوں ف (م_1)، ف (م_2) کا حاصل ضرب ایک ہی شکل کا ہوگا خواہ م_1، م_2 کچھ ہی ہوں۔ پس دفعہ ۲۰۹ کا مسئلہ استعمال کر کے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ مساوات

$$\text{ف}(\text{م}_1)\times\text{ف}(\text{م}_2) = \text{ف}(\text{م}_1+\text{م}_2)$$

م_1 اور م_2 کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے کیونکہ سلسلے مطلقاً متدق ہیں۔ لہٰذا

$$\text{ف}(\text{م}_1)\text{ف}(\text{م}_2)\text{ف}(\text{م}_3)\dots\text{ف}(\text{م}_\text{ق}) = \text{ف}(\text{م}_1+\text{م}_2+\dots+\text{م}_\text{ق})$$

اب فرض کرو کہ $\text{م}_1 = \text{م}_2 = \dots = \text{م}_\text{ق} = \frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ جہاں پ اور ق ثبت صحیح عدد ہیں تب

$$\left\{\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)\right\}^{\text{ق}} = \text{ف}(\text{پ})$$

پس $\{\text{ف}(\text{پ})\}^{\frac{1}{\text{ق}}}$ کی ایک قیمت ف $\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)$ ہے اور اس لیے اس کی شکل ہے

$$\text{جم}\,\frac{\text{پ فہ} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{پ فہ} + ۲\,\text{س}\,\pi}{\text{ق}}$$

جہاں س کوئی صحیح عدد ہے ۔ اب جبکہ فہ = ۰ تو $\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right) = ۱$،
اس لیے چونکہ مجموعہ $\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)$ مسلسل بدلتا ہے جیسے فہ، $-\frac{1}{2}\pi$ سے
$+\frac{1}{2}\pi$ تک بڑھتا ہے ہمیں حاصل ہونا چاہئے س = ۰ ۔ اگر فہ اِن حدود کے
درمیان واقع ہے ۔ پس اس صورت میں

$$\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right) = \text{جم}\,\frac{\text{پ فہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{پ فہ}}{\text{ق}}$$

ثانیاً فرض کرو کہ م ایک مثبت غیر منطق عدد ہے جو منطق اعداد م_1، م_2، م_3 ... کے ایک تواتر کی انتہا ہے ۔ تب

$$\text{ف}(\text{م}_\text{س}) = ۱ + \text{م}_\text{س}\,(\text{خ جب فہ}) + \frac{\text{م}_\text{س}^2}{\underline{|۲}}(\text{خ جب فہ})^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\text{م}_\text{س}(\text{م}_\text{س}^2 - ۱^2)\cdots(\text{م}_\text{س}^2 - \overline{۲\text{ر} - ۳}^{\,2})}{\underline{|۲\text{ر} - ۱}}(\text{خ جب فہ})^{۲\text{ر}-۱}$$

$$+ \frac{\text{م}_\text{س}^2(\text{م}_\text{س}^2 - ۲^2)\cdots(\text{م}_\text{س}^2 - \overline{۲\text{ر} - ۲}^{\,2})}{\underline{|۲\text{ر}}}(\text{خ جب فہ})^{۲\text{ر}} + \text{ب}$$

جہاں $|\text{ب}|$، اِس مستدق سلسلہ

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}^2 + ۱^2)\cdots(\text{ن}^2 + \overline{۲\text{ر} - ۱}^{\,2})}{\underline{|۲\text{ر} + ۱}}\,|\text{جب فہ}|^{۲\text{ر}+۱}$$

$$+ \frac{\text{ن}(\text{ن}^2 + ۲^2)\cdots(\text{ن}^2 + \overline{۲\text{ر}}^{\,2})}{\underline{|۲\text{ر} + ۲}}\,|\text{جب فہ}|^{۲\text{ر}+۲} + \cdots$$

کے انتہائی مجموعہ کے مقیاس سے کم ہے۔ ن ایک مثبت عدد ہے جو تمام اعداد م، م۲، ... سے بڑا ہے۔ فہ کی ہر مقررہ قیمت کے جواب میں ر منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $|\text{ب}| <$ صہ، مس کی تمام قیمتوں م، م۱، م۲، ... کے لیے جہاں صہ کوئی اختیاری مثبت عدد ہے۔

ف(مس) کی انتہا یعنی جم مس فہ + خر جب مس فہ کی انتہا جبکہ مس کو لاانتہا بڑھا دیا جائے، جم م فہ + خر جب م فہ ہے تب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{۱} + \text{م}\,(\text{خر جب فہ}) + \frac{\text{م}^{\text{۲}}}{\underline{|\text{۲}}}(\text{خر جب فہ})^{\text{۲}} + \dots$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}^{\text{۲}} - \text{۱}^{\text{۲}})\dots(\text{م}^{\text{۲}} - \overline{\text{۲ر} - \text{۳}}^{\,\text{۲}})}{\underline{|\text{۲ر} - \text{۱}}}(\text{خر جب فہ})^{\text{۲ر} - \text{۱}}$$

$$+ \frac{\text{م}^{\text{۲}}(\text{م}^{\text{۲}} - \text{۲}^{\text{۲}})\dots(\text{م}^{\text{۲}} - \overline{\text{۲ر} - \text{۲}}^{\,\text{۲}})}{\underline{|\text{۲ر}}}(\text{خر جب فہ})^{\text{۲ر}}$$

اور جم م فہ + خر جب م فہ میں بقدر اُس عدد کے فرق ہے جس کا مقیاس صہ سے تجاوز نہیں کرتا۔ اب چونکہ صہ اختیاری ہے یہ (276) ثابت ہو چکا کہ $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان فہ کی ہر قیمت کے لیے لامتناہی سلسلہ، جم م فہ + خر جب م فہ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

آخرالامر فرض کرو کہ م منطق یا غیر منطق منفی عدد $-\text{م}_{\text{۱}}$ ہے۔

تب چونکہ $\text{ف}(\text{م})\,\text{ف}(\text{م}_{\text{۱}}) = \text{ف}(\text{۰}) = \text{۱}$، اس لیے

$$\text{ف}(\text{م}) = \frac{1}{\text{جم م فہ} + \text{خ جب م فہ}} = \text{جم م فہ} + \text{خ جب م فہ}$$

پس اس طرح یہ ثابت ہو چکا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جم م فہ} = 1 - \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2 - 2^2)}{\lfloor 4}\,\text{جب}^4\,\text{فہ} - \ldots ،\ \ldots \quad (5)$$

$$\text{جب م فہ} = \text{م جب فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^2 - 1^2)}{\lfloor 3}\,\text{جب}^3\,\text{فہ}$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}^2 - 1^2)(\text{م}^2 - 3^2)}{\lfloor 5}\,\text{جب}^5\,\text{فہ} - \ldots ،\ \ldots \quad (6)$$

درست ہیں فہ کی تمام قیمتوں کے لیے جو $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان واقع ہوں خواہ م کوئی حقیقی عدد ہو۔

یہ دو سلسلے مطلقاً مستدق ہوتے ہیں جبکہ فہ $= \pm \frac{1}{2}\pi$ کیونکہ ان میں سے پہلے سلسلہ کی عام رقم کی مطلق قیمت کو $\text{ل}_\text{ر}$ سے تعبیر کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ل}_\text{ر}}{\text{ل}_{\text{ر}+1}} = \frac{(2\text{ر}+1)(2\text{ر}+2)}{(2\text{ر})^2 - \text{م}^2} = \left(1 + \frac{3}{2\text{ر}} + \frac{1}{2\text{ر}^2}\right)\left(1 - \frac{\text{م}^2}{4\text{ر}^2}\right)^{-1}$$

اس لیے

$$\text{نہا}_\text{ر}\left(\frac{\text{ل}_\text{ر}}{\text{ل}_{\text{ر}+1}} - 1\right) = \frac{3}{2}$$

اور اس طرح معلومہ جانچ کی بموجب سلسلہ مستدق ہے۔ اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ (۶) مستدق ہے۔ دفعہ ۲۰۷ میں بیان کردہ آبیل کے مسئلہ کی بموجب سلسلے (۵) اور (۶)، قیمتوں جم $\frac{1}{2}$ م π، $\pm$ جب $\frac{1}{2}$ م π کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ فہ $= \pm \frac{1}{2}\pi$۔

اسی طرح کے ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ دو سلسلے

$$\text{جم م فہ} \backslash \text{جم فہ} = ۱ - \frac{م^۲ - ۱^۲}{\underline{|۲}} \text{جب}^۲ \text{فہ} + \frac{(م^۲ - ۱^۲)(م^۲ - ۳^۲)}{\underline{|۴}} \text{جب}^۴ \text{فہ} - \ldots\ldots \quad (۷)$$

$$\text{جب م فہ} \backslash \text{جم فہ} = م \text{ جب فہ} - \frac{م(م^۲ - ۲^۲)}{\underline{|۳}} \text{جب}^۳ \text{فہ}$$

$$+ \frac{م(م^۲ - ۲^۲)(م^۲ - ۴^۲)}{\underline{|۵}} \text{جب}^۵ \text{فہ} - \ldots\ldots \quad (۸)$$

درست ہیں م کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے بشرطیکہ فہ، $\pm \frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع رہو۔

سلسلے (۷) اور (۸) درست نہیں جبکہ فہ $= \pm \frac{۱}{۲}\pi$ ۔

سلسلہ (۷) صرف اس وقت مختتم ہوتا ہے جبکہ م ایک طاق صحیح عدد ہو اور سلسلہ (۸) صرف اس وقت جبکہ م ایک جفت صحیح عدد ہو۔

۲۱۵ ـــــــ اگر ہم جم م فہ + خ جب م فہ کے لیے وہ صاف ایسی جو (۵) اور (۶) سے حاصل ہوتا ہے اور ی = خ جب فہ رکھیں تو ہم کو ملتا ہے (جم فہ + خ جب فہ)^م = $(\sqrt{۱ + ی^۲} + ی)^م$ ہمیں یہ پھیلانا ہے

$$(\sqrt{۱ + ی^۲} + ی)^م = ۱ + م ی + \frac{م^۲}{\underline{|۲}} ی^۲ + \frac{م(م^۲ - ۱^۲)}{\underline{|۳}} ی^۳ + \frac{م^۲(م^۲ - ۲^۲)}{\underline{|۴}} ی^۴$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{م(م^۲ - ۱^۲)\ldots\ldots(م^۲ - \overline{۲س - ۳}^۲)}{\underline{|۲س - ۱}} ی^{۲س - ۱}$$

$$+ \frac{م^۲(م^۲ - ۲^۲)\ldots\ldots(م^۲ - \overline{۲س - ۲}^۲)}{\underline{|۲س}} ی^{۲س} + \ldots\ldots$$

اسی طرح (۷) اور (۸) سے

$$\frac{(\sqrt{\text{۱}+\text{ی}^{\text{۲}}}+\text{ی})^{\text{م}}}{\sqrt{\text{۱}+\text{ی}^{\text{۲}}}} = \text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}}\,\text{ی}^{\text{۲}} + \frac{\text{م}(\text{م}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})}{\lfloor\text{۳}}\,\text{ی}^{\text{۳}} + \dots$$

$$+ \frac{\text{م}(\text{م}^{\text{۲}}-\text{۲}^{\text{۲}})\dots(\text{م}^{\text{۲}}-\overline{\text{۲س}-\text{۲}}^{\,\text{۲}})}{\lfloor\text{۲س}-\text{۱}}\,\text{ی}^{\text{۲س}-\text{۱}}$$

$$+ \frac{(\text{م}^{\text{۲}}-\text{۱}^{\text{۲}})(\text{م}^{\text{۲}}-\text{۳}^{\text{۲}})\dots(\text{م}^{\text{۲}}-\overline{\text{۲س}-\text{۱}}^{\,\text{۲}})}{\lfloor\text{۲س}}\,\text{ی}^{\text{۲س}} + \dots$$

یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ یہ پھیلاؤ درست ہیں م کی تمام قیمتوں کے لیے بشرطیکہ ی کا مقیاس ایک سے کم ہو۔ بعض مصنفین اِن پھیلاؤں کو بلا واسطہ راست حاصل کرتے ہیں اور پھر سلسلوں (۵)، (۶)، (۷)، اور (۸) کو اخذ کرتے ہیں۔ لیکن اِن سلسلوں کو ابتدائی طریقوں سے دریافت کرنا آسان نہیں ہے الاّ آنکہ ی / $\sqrt{\text{۱}+\text{ی}^{\text{۲}}}$ کا مقیاس ایک سے کم ہو، ہمیں اس قید کے ساتھ جم م فہ، جب م فہ کے لیے یہ سلسلے حاصل ہونگے صرف اس وقت جبکہ فہ، $\pm\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\pi$ کے درمیان واقع ہو اور یہی قید سلسلوں (۱) اور (۲) کے لیے لازم ہے۔ تاہم تسلسل کے اصول کو استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اوپر کے پھیلاؤ، اِن سلسلوں کے استدقاق کی وسعت $|\text{ی}| < \text{۱}$ میں درست ہیں۔

۲۱۶ —— اگر سلسلوں (۵) اور (۶) میں فہ کی بجائے $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi$ - فہ

رکھا جائے تو ہمیں ذیل کے سلسلے حاصل ہوتے ہیں جو فہ کی صفر اور π کے درمیان قیمتوں کے لیے درست ہیں :-

$$\text{جم}\ \text{م}\left(\frac{\pi}{2}-\text{فہ}\right)=1-\frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\ \text{جم}^2\ \text{فہ}+\frac{\text{م}^2(\text{م}^2-2^2)}{\lfloor 4}\ \text{جم}^4\ \text{فہ}-\ldots \quad (9)$$

$$\text{جب}\ \text{م}\left(\frac{\pi}{2}-\text{فہ}\right)=\text{م}\ \text{جم}\ \text{فہ}-\frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)}{\lfloor 3}\ \text{جم}^3\ \text{فہ}+\ldots,\ldots \quad (10)$$

اب ہم جم م فہ اور جب م فہ کے لیے سلسلے معلوم کر سکتے ہیں جبکہ فہ کی کوئی قیمت ہو۔ اگر فہ = ر π + فہ؛ یہاں فہ؛ $\pm \frac{1}{2}\pi$ کے درمیان ہے اور ر ایک صحیح عدد ہے تو

$$\text{جم}\ \text{م}\ \text{فہ}=\text{جم}\ \text{م}\ \text{ر}\ \pi\ \text{جم}\ \text{م}\ \text{فہ}-\text{جب}\ \text{م}\ \text{ر}\ \pi\ \text{جب}\ \text{م}\ \text{فہ}$$

نیز جب فہ = $(-1)^{\text{ر}}$ جب فہ ۔ پس اگر فہ؛ $\left(\text{ر}\pm\frac{1}{2}\right)\pi$ کے درمیان واقع ہو

تو

$$\text{جم}\ \text{م}\ \text{فہ}=\text{جم}\ \text{م}\ \text{ر}\ \pi\left(1-\frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\ \text{جب}^2\ \text{فہ}+\ldots\right)$$

$$-\text{جب}\ (\text{م}-1)\ \text{ر}\ \pi\left\{\text{م}\ \text{جب}\ \text{فہ}-\frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)}{\lfloor 3}\ \text{جب}^3\ \text{فہ}+\ldots\right\}$$

$$\ldots \quad (11)$$

اسی طرح

$$\text{جب}\ \text{م}\ \text{فہ}=\text{جب}\ \text{م}\ \text{ر}\ \pi\left(1-\frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\ \text{جب}^2\ \text{فہ}+\ldots\right)$$

$$+\text{جم}\ (\text{م}-1)\ \text{ر}\ \pi\left\{\text{م}\ \text{جب}\ \text{فہ}-\frac{\text{م}(\text{م}^2-1^2)}{\lfloor 3}\ \text{جب}^3\ \text{فہ}+\ldots\right\}\ldots (12)$$

(278)

ضابطوں (۱۱)، (۱۲)، (۱۳)، (۱۴) کو ڈی ۔ ایف ۔ گریگوری نے Cambridge Mathematical Journal vol. IV میں شائع کیا تھا۔

اسی طریقہ پر (۹) اور (۱۰) سے حسب ذیل سلسلے حاصل ہونگے :-

$$\text{جم}\,\text{م}\,\text{فہ} = \text{جم}\,\text{م}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\pi}{۲}\left\{۱ - \frac{\text{م}^۲}{\lfloor ۲}\,\text{جم}^۲\,\text{فہ} + \ldots\right\}$$

$$+\,\text{جم}\,(\text{م}-۱)(۲\text{ر}+۱)\frac{\pi}{۲}\left\{\text{م}\,\text{جم}\,\text{فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^۲-۱^۲)}{\lfloor ۳}\,\text{جم}^۳\,\text{فہ} + \ldots\right\} \quad (۱۳)$$

$$\text{جب}\,\text{م}\,\text{فہ} = \text{جب}\,\text{م}\,(۲\text{ر}+۱)\frac{\pi}{۲}\left\{۱ - \frac{\text{م}^۲}{\lfloor ۲}\,\text{جم}^۲\,\text{فہ} + \ldots\right\}$$

$$+\,\text{جب}\,(\text{م}-۱)(۲\text{ر}+۱)\frac{\pi}{۲}\left\{\text{م}\,\text{جم}\,\text{فہ} - \frac{\text{م}(\text{م}^۲-۱^۲)}{\lfloor ۳}\,\text{جم}^۳\,\text{فہ} + \ldots\right\} \quad (۱۴)$$

جہاں فہ، ر π اور (ر + ۱) π کے درمیان واقع ہے۔

۲۱۷ — کچھ مفید سلسلے، (۵) اور (۶)، (۷) اور (۸) سے م کو مخصوص قیمتیں دینے سے اخذ کیے جاسکتے ہیں[1]۔ فرض کرو فہ = $\frac{۱}{۲}\pi$ تب (۵) اور (۶) میں م کی بجائے لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم}\,\frac{۱}{۲}\pi\,\text{لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^۲(\text{لا}^۲-۲^۲)}{\lfloor ۴} - \ldots, \ldots \quad (۱۵)$$

$$\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\pi\,\text{لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}(\text{لا}^۲-۱^۲)}{\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}(\text{لا}^۲-۱^۲)(\text{لا}^۲-۳^۲)}{\lfloor ۵} - \ldots, \ldots \quad (۱۶)$$

نیز (۵) اور (۸) میں م = ۲ لا، فہ = $\frac{۱}{۴}\pi$ فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

[1] اس دفعہ کے سلسلے شیل باک (Shellbach) نے حاصل کیے تھے، دیکھو "Crelle's Journal vol. XLVIII" ان پر گلیشر (Glaisher) نے بھی Messenger of Mathematics, vols. II & vII میں بحث کی ہے (۱۳) اور (۱۴) کے مماثل سلسلے ایم۔ ڈیوڈ نے "Bulletin de la Soc. Math. de France, vol.xi" میں دیے ہیں۔

$$\text{جم}\,\tfrac{1}{3}\pi\,\text{لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1^2)}{\lfloor 4} - \frac{\text{لا}^2(\text{لا}^2-1^2)(\text{لا}^2-2^2)}{\lfloor 6} + \ldots \quad (17)$$

$$\text{جب}\,\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left\{\text{لا} - \frac{\text{لا}(\text{لا}^2-1^2)}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}(\text{لا}^2-1^2)(\text{لا}^2-2^2)}{\lfloor 5} - \ldots\right\} \quad (18)$$

(279) π کی قوتوں کے لیے مختلف سلسلے حاصل کیے جا سکتے ہیں) اس کے لیے $\text{جم}\,\tfrac{1}{2}\pi\,\text{لا}$، $\text{جب}\,\tfrac{1}{2}\pi\,\text{لا}$، ... کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جائے اور لا کی قوتوں کے سروں کو اوپر کے سلسلوں سے متناظر قوت کے سروں کے مساوی رکھا جائے؛ مثلاً (۱۶) سے لا^3 کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\times\frac{1\times3}{2\times4}\left(1+\frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{7}\times\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)$$
$$+ \ldots\ldots$$

کسی زاویہ کے دائری ناپ کا پھیلاؤ اس کی جیب کی قوتوں میں

۲۱۸ ـــــ اگر پھیلاؤں (۵) اور (۶) میں جو جم م فہ، جب م فہ کے لیے جب فہ کی قوتوں میں ہیں ہم اِن سلسلوں کو م کی صعودی قوتوں کے سلسلوں کے طور پر مرتب کریں جو ہم دفعہ ۲۱۰ کی رو سے کر سکتے ہیں کیونکہ سلسلے

$$1 + \frac{\text{م}^2}{\lfloor 2}\,\text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{\text{م}^2(\text{م}^2+2^2)}{\lfloor 4}\,\text{جب}^4\,\text{فہ} + \ldots\ldots,$$

$$\text{م}\,\text{جب}\,\text{فہ} + \frac{\text{م}(\text{م}^2+1^2)}{\lfloor 3}\,\text{جب}^3\,\text{فہ} + \ldots\ldots$$

مستدق ہیں تو ہم م کی مختلف قوتوں کے سروں کو بحکم م فہ کے پھیلاؤں کے (جو فہ کی قوتوں میں ہوں) تناظر سروں کے مساوی رکھ سکتے ہیں؛ مثلاً (۷) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ} = \text{جب فہ} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{جب}^3\,\text{فہ}}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\times\frac{\text{جب}^5\,\text{فہ}}{5} + \cdots$$

$$+ \frac{1\times 3\times 5\cdots(2\text{ر}-1)}{2\times 4\times 6\cdots 2\text{ر}}\,\frac{\text{جب}^{2\text{ر}+1}\,\text{فہ}}{2\text{ر}+1} + \cdots\,\cdots \quad (19)$$

اور (۵) سے

$$\text{فہ}^2 = \text{جب}^2\,\text{فہ} + \frac{2}{3}\,\frac{\text{جب}^4\,\text{فہ}}{2} + \frac{2\times 4}{3\times 5}\,\frac{\text{جب}^6\,\text{فہ}}{3} + \cdots$$

$$+ \frac{2\times 4\cdots(2\text{ر}-2)}{3\times 5\cdots(2\text{ر}-1)}\,\frac{\text{جب}^{2\text{ر}}\,\text{فہ}}{\text{ر}} + \cdots\,\cdots \quad (20)$$

یہ درست ہیں $\pm\frac{1}{2}\pi$ کے درمیان فہ کی قیمتوں کے لیے یا جبکہ فہ $= \pm\frac{1}{2}\pi$ ۔ ہم اِن کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں

$$\text{جب}^{-1}\,\text{لا} = \text{لا} + \frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\,\frac{\text{لا}^5}{5} + \cdots\,\cdots \quad (19)$$

$$(\text{جب}^{-1}\,\text{لا})^2 = \text{لا}^2 + \frac{2}{3}\,\frac{\text{لا}^4}{2} + \frac{2\times 4}{3\times 5}\,\frac{\text{لا}^6}{3} + \cdots\,\cdots \quad (20)$$

جہاں جب^{-1} لا دونوں مساواتوں میں وہ مثبت یا منفی عادہ زاویہ ہے جس کی جیب لا کے مساوی ہے۔
سلسلہ (۱۹) کو نیوٹن نے دریافت کیا تھا؛ طریقِ ثبوت کوشی کا ہے۔

(280)

۲۱۹ ـــــ سلسلہ (۲۰) میں لا کو لا + ھ میں بدلنے اور مساوات کی جانبین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے (یہ عمل لا کے لحاظ سے تفرق کرنے کے مماثل ہے جو دفعات ۲۱۰ اور ۲۰۸ کے مسئلوں کو استعمال کرنے سے جائز قرار دیا جا سکتا ہے) سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب}^{-۱}\,\text{لا}}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}} = \text{لا} + \frac{۲}{۳}\text{لا}^{۳} + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\text{لا}^{۵} + \dots ، \dots \quad (۲۱)$$

یا لا کی بجائے جب فہ رکھنے سے

$$\frac{\text{فہ}}{\text{جب فہ جم فہ}} = ۱ + \frac{۲}{۳}\text{جب}^{۲}\text{فہ} + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\text{جب}^{۴}\text{فہ} + \dots ، \dots \quad (۲۲)$$

یا ۲ فہ = طہ لکھنے سے

$$\frac{\text{طہ}}{\text{جب طہ}} = ۱ + \frac{۱}{۳}(۱-\text{جم طہ}) + \frac{۲\times۱}{۵\times۳}(۱-\text{جم طہ})^{۲} + \dots$$

جس کو لکھ سکتے ہیں

$$\text{طہ قم طہ} = ۱ + \frac{۱}{۳}\text{سہم طہ} + \frac{۲\times۱}{۵\times۳}\text{سہم}^{۲}\text{طہ} + \dots ، \dots \quad (۲۳)$$

نیز (۲۲) میں مس فہ = ما رکھنے سے سلسلہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{مس}^{-۱}\,\text{ما} = \frac{\text{ما}}{\text{ما}^{۲}+۱}\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\,\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ما}^{۲}+۱} + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\,\frac{\text{ما}^{۴}}{(\text{ما}^{۲}+۱)^{۲}} + \dots\right\} \quad (۲۴)$$

جیوب اور جیوب التمام کی قوتوں کو متعدد زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام میں بیان کرنا

۲۴۰ —— اب ہم یہ دکھائینگے کہ شکل $\text{جتا}^{م}\,\text{طہ}\;\text{جب}^{ن}\,\text{طہ}$ کے بدلے کس طرح آسانی کے ساتھ طہ کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام میں بیان کیے جا سکتے ہیں۔ ہم اول تو اُس صورت کو ملحوظ رکھینگے جس میں م اور ن مثبت صحیح اعداد ہوں۔ فرض کرو کہ ی = جم طہ + خر جب طہ، تب $ی^{-1}$ = جم طہ − خر جب طہ؛ پس ۲ جم طہ = ی + $ی^{-1}$ اور ۲ خر جب طہ = ی − $ی^{-1}$، اور

$$(\text{۲ جم طہ})^{م}\;(\text{۲ خر جب طہ})^{ن} = (ی + ی^{-1})^{م}\;(ی - ی^{-1})^{ن}$$

اگر ہم بائیں طرف کے جملہ کو ی اور $ی^{-1}$ کی قوتوں میں پھیلائیں تو نتیجہ کو ایک ایسے سلسلہ میں مرتب کیا جا سکتا ہے جس کی رقمیں ان دو شکلوں ک $(ی^{ر} + ی^{-ر})$، ک $(ی^{ر} - ی^{-ر})$ میں سے ایک کے مانند ہونگی جہاں ک ایک مضارب ہے جو م، ن اور ر پر منحصر ہے۔ اب $ی^{ر}$ = جم ر طہ + خر جب ر طہ اور $ی^{-ر}$ = جم ر طہ − خر جب ر طہ بموجب مسئلہ ڈی موائر۔ اس لیے

$$ک\,(ی^{ر} + ی^{-ر}) = \text{۲ ک جم ر طہ}،$$

$$ک\,(ی^{ر} - ی^{-ر}) = \text{۲ خر ک جب ر طہ}$$

اس طرح ہمیں جم^ا ط جب^{۱۰} طہ کے لیے مطلوبہ جملہ، طہ کے ضعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں حاصل ہوچکا۔

(281)

مثال

جب^۵ طہ جم^۶ طہ کو طہ کے ضعفوں کے سلسلہ میں بیان کرو۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$(۲\ خ\ جب\ طہ)^{۵}\ (۲\ جم\ طہ)^{۶} = (ی - ی̄)^{۵}\ (ی + ی̄)^{۶} = (ی^{۲} - ی̄^{۲})^{۵}\ (ی + ی̄^{۱})$

یا $= (ی^{۱۰} - ۵ی^{۶} + ۱۰ی^{۲} - ۱۰ی̄^{۲} + ۵ی̄^{۶} - ی̄^{۱۰})\ (ی + ی̄^{۱})$

یا $= ی^{۱۱} + ی^{۹} - ۵ی^{۷} - ۵ی^{۵} + ۱۰ی^{۳} + ۱۰ی - ۱۰ی̄^{۱} - ۱۰ی̄^{۳}$
$+ ۵ی̄^{۵} + ۵ی̄^{۷} - ی̄^{۹} - ی̄^{۱۱}$

جو ۲ خ (جب ۱۱ طہ + جب ۹ طہ − ۵ جب ۷ طہ − ۵ جب ۵ طہ + ۱۰ جب ۳ طہ + ۱۰ جب طہ) کے مساوی ہے

∴ جب^۵ طہ جم^۶ طہ = $\frac{۱}{۲^{۱۰}}$ (جب ۱۱ طہ + جب ۹ طہ − ۵ جب ۷ طہ − ۵ جب ۵ طہ + ۱۰ جب ۳ طہ
+ ۱۰ جب طہ)

اس عمل کو اس طرح بھی مرتب کرسکتے ہیں:—

(۲ جم طہ)^۶ = ۱ + ۶ + ۱۵ + ۲۰ + ۱۵ + ۶ + ۱

(۲ خ جب طہ) (۲ جم طہ)^۶ = ۱ + ۵ + ۹ + ۵ − ۵ − ۹ − ۵ − ۱

(۲ خ جب طہ)^۲ (۲ جم طہ)^۶ = ۱ + ۴ + ۴ − ۴ − ۱۰ − ۴ + ۴ + ۴ + ۱

$(\text{۲ خ جب ط})^{۳} (\text{۲ جم ط})^{۶} = ۱ + ۳ + ۰ - ۸ - ۶ + ۶ + ۸ - ۰ - ۳ - ۱$

$(\text{۲ خ جب ط})^{۴} (\text{۲ جم ط})^{۶} = ۱ + ۲ - ۳ - ۸ + ۲ + ۱۲ + ۲ - ۸ - ۳ + ۲ + ۱$

$(\text{۲ خ جب ط})^{۵} (\text{۲ جم ط})^{۶} = ۱ + ۱ - ۵ - ۵ + ۱۰ + ۱۰ - ۱۰ - ۱۰ + ۵ + ۵ - ۱ - ۱$

جہاں بائیں جانب ی کی قوتیں ترک کر دی گئی ہیں اور کسی سطر کا کوئی عدد اس کے اوپر کی سطر میں جو عدد اِس کے عین سر پر ہے اِس کو اس سے ماقبل کے عدد میں سے تفریق کرنے سے حاصل ہوا ہے۔

عددی اعمال حساب کو انجام دینے کا یہ سہولت بخش طریقہ ڈی مارگن[1] نے اپنی کتاب (Double Algebra and Trig.) میں دیا ہے۔

۲۴۱ ——— ہم ط کے ضِعفوں کی جیوب یا جیوب التمام کی رقوم میں $(\text{۲ جم ط})^{م}$ اور $(\text{۲ جب ط})^{م}$ کے لیے ضابطے دفعہ ماسبق میں مستعملہ طریقہ کے ذریعہ حاصل کر سکتے ہیں جبکہ م ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ چنانچہ

$$(\text{۲ جم ط})^{م} = (ی + \bar{ی})^{م} = ی^{م} + م\, ی^{م-۲} + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}}\, ی^{م-۴} + \dots + \bar{ی}^{م} ،$$

اس لیے $۲^{م-۱} \text{ جم}^{م} \text{ط} = \text{جم م ط} + م \text{ جم} (م-۲)\text{ط} + \frac{م(م-۱)}{\underline{|۲}} \text{ جم} (م-۴)\text{ط} + \dots$

جہاں آخری رقم ہے

$$\frac{۱}{۲} \frac{\underline{|م}}{\underline{|\tfrac{۱}{۲}م}\ \underline{|\tfrac{۱}{۲}م}} \text{ ، یا } \frac{\underline{|م}}{\underline{|\tfrac{۱}{۲}م - ۱}\ \underline{|\tfrac{۱}{۲}م + ۱}} \text{ جم ط}$$

[1] De Morgan.

بموجب اس کے کہ م جفت ہے یا طاق۔

اسی طرح

$$(2\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{طہ})^{\text{م}} = (\text{ی} - \text{ی}^{-1})^{\text{م}} = \text{ی}^{\text{م}} - \text{م}\,\text{ی}^{\text{م}-2} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\underline{|2}}\,\text{ی}^{\text{م}-4} - \dots + (-1)^{\text{م}}\,\text{ی}^{-\text{م}}$$

سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$2^{\text{م}-1}(-1)^{\frac{\text{م}}{2}}\,\text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ} = \text{جم}\,\text{م}\,\text{طہ} - \text{م}\,\text{جم}(\text{م}-2)\,\text{طہ} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\underline{|2}}\,\text{جم}(\text{م}-4)\,\text{طہ} - \dots + (-1)^{\frac{\text{م}}{2}}\frac{\underline{|\text{م}}}{2\,\underline{|\tfrac{1}{2}\text{م}}\,\underline{|\tfrac{1}{2}\text{م}}}$$

جبکہ م جفت ہو، یا

$$2^{\text{م}-1}(-1)^{\frac{\text{م}-1}{2}}\,\text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ} = \text{جب}\,\text{م}\,\text{طہ} - \text{م}\,\text{جب}(\text{م}-2)\,\text{طہ} + \frac{\text{م}(\text{م}-1)}{\underline{|2}}\,\text{جب}(\text{م}-4)\,\text{طہ} - \dots + (-1)^{\frac{\text{م}-1}{2}}\frac{\underline{|\text{م}}}{\underline{|\tfrac{1}{2}(\text{م}-1)}\,\underline{|\tfrac{1}{2}(\text{م}-1)}} \quad (282)$$

جبکہ م طاق ہو۔

یہ ضابطے ساتویں باب میں حاصل کیے جا چکے ہیں۔

۲۲۲ ——— اب ہم طہ کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کی رقوم میں جم^م طہ، جب^م طہ کے اُن پھیلاؤں پر غور کرینگے جبکہ مَ – ۱ سے بڑا کوئی حقیقی عدد ہو۔

دفعہ ۲۱۲ کی رو سے

۲^م (± جم ½ فہ)^م جم م (½ فہ ـ ک π)

= ۱ + م جم فہ + (م (م ـ ۱))/(۲!) جم ۲ فہ + (م (م ـ ۱) (م ـ ۲))/(۳!) جم ۳ فہ + ...،

۲^م (± جم ½ فہ)^م جب م (½ فہ ـ ک π)

= م جب فہ + (م (م ـ ۱))/(۲!) جب ۲ فہ + (م (م ـ ۱) (م ـ ۲))/(۳!) جب ۳ فہ + ...

جہاں فہ، (۲ک ـ ۱) π اور (۲ک + ۱) π کے درمیان واقع ہے سلسلہ اول کو جم عہ سے اور سلسلہ دوم کو جب عہ سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

۲^م (± جم ½ فہ)^م جم (عہ ـ ½ م فہ + م ک π) = جم عہ + م جم (عہ ـ فہ)

+ (م (م ـ ۱))/(۲!) جم (عہ ـ ۲ فہ) + (م (م ـ ۱) (م ـ ۲))/(۳!) جم (عہ ـ ۳ فہ) + ...

جہاں فہ، (۲ک ـ ۱) π اور (۲ک + ۱) π کے درمیان واقع ہے۔ فرض کرو کہ فہ = ۲ طہ

تب اگر ک جفت (= ۲ س) ہو تو

۲^م. جم^م طہ. جم (عہ ـ م طہ + ۲ م س π)

= جم عہ + م. جم (عہ ـ ۲ طہ) + (م (م ـ ۱))/(۲!). جم (عہ ـ ۴ طہ) + ...

جہاں طہ، ۲ س π ـ ½ π اور ۲ س π + ½ π کے درمیان واقع ہے؛

لیکن اگر ک طاق (= ۲ س + ۱) ہو تو

$$۲^{\text{م}}(-\text{جم طہ})^{\text{م}}\ \text{جم}\,(\text{عہ} - \text{م طہ} + \text{م}\ \overline{۲\text{س}+۱}\ \pi)$$

$$= \text{جم عہ} + \text{م جم}\,(\text{عہ} - ۲\,\text{طہ}) + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲}\ \text{جم}\,(\text{عہ} - ۴\,\text{طہ}) + \cdots$$

جہاں طہ، $۲\text{س}\,\pi + \frac{۱}{۲}\pi$ اور $۲\text{س}\,\pi + \frac{۳}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔

ان نتیجوں میں رکھو عہ = م طہ تو

$$۲^{\text{م}}\,\text{جم}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}\ ۲\,\text{م}\,\text{س}\,\pi$$

$$= \text{جم م طہ} + \text{م جم}\,(\text{م}-۲)\,\text{طہ} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲}\ \text{جم}\,(\text{م}-۴)\,\text{طہ} + \cdots \quad (۲۵)$$

(283) جہاں طہ، $۲\text{س}\,\pi - \frac{۱}{۲}\pi$ اور $۲\text{س}\,\pi + \frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہے، نیز

$$۲^{\text{م}}(-\text{جم طہ})^{\text{م}}\ \text{جم}\,(۲\text{س}+۱)\,\text{م}\,\pi$$

$$= \text{جم م طہ} + \text{م جم}\,(\text{م}-۲)\,\text{طہ} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲}\ \text{جم}\,(\text{م}-۴)\,\text{طہ} + \cdots \quad (۲۶)$$

جہاں طہ، $۲\text{س}\,\pi + \frac{۱}{۲}\pi$ اور $۲\text{س}\,\pi + \frac{۳}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔

پھر، رکھو عہ = م طہ + $\frac{۱}{۲}\pi$ تو

$$۲^{\text{م}}\,\text{جم}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جب}\ ۲\,\text{م}\,\text{س}\,\pi$$

$$= \text{جب م طہ} + \text{م جب}\,(\text{م}-۲)\,\text{طہ} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲}\ \text{جب}\,(\text{م}-۴)\,\text{طہ} + \cdots \quad (۲۷)$$

جہاں طہ، $۲\text{س}\,\pi - \frac{۱}{۲}\pi$ اور $۲\text{س}\,\pi + \frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہے، نیز

$$۲^{\text{م}}(-\text{جم طہ})^{\text{م}}\ \text{جب}\,(۲\text{س}+۱)\,\text{م}\,\pi$$

$$= \text{جب م طہ} + \text{م جب}\,(\text{م}-۲)\,\text{طہ} + \frac{\text{م}(\text{م}-۱)}{\lfloor ۲}\ \text{جب}\,(\text{م}-۴)\,\text{طہ} + \cdots \quad (۲۸)$$

جہاں طہ، $۲\text{س}\,\pi + \frac{۱}{۲}\pi$ اور $۲\text{س}\,\pi + \frac{۳}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔

پھر طہ کو طہ − $\frac{۱}{۲}\pi$ میں بدلو اور رکھو عہ = م طہ تو

$$۲^{\text{م}}\,\text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}\ \text{م}\,(۲\text{س} + \tfrac{۱}{۲})\,\pi$$

= جم م طہ − م جم (م − ۲) طہ + م(م − ۱)/[۲ جم (م − ۴) طہ − ......، ...... (۲۹)

جہاں طہ، ۲ س π اور (۲ س + ۱) π کے درمیان واقع ہے، نیز

۲^م (− جب طہ)^م جم م (۲ س + ۱/۲) π

= جم م طہ − م جم (م − ۲) طہ + م(م − ۱)/[۲ جم (م − ۴) طہ − ......، ...... (۳۰)

جہاں طہ، (۲ س + ۱) π اور (۲ س + ۲) π کے درمیان واقع ہے۔

بالآخر یکھو عدد = م طہ، ۱/۲ π اور طہ کو طہ − ۱/۲ π سے بدل دیں تو

۲^م جب^م طہ جب م (۲ س + ۱/۲) π

= جب م طہ − م جب (م − ۲) طہ + م(م − ۱)/[۲ جب (م − ۴) طہ − ......، ...... (۳۱)

جہاں طہ، ۲ س π اور (۲ س + ۱) π کے درمیان واقع ہے، نیز

(− ۲ جب طہ)^م جب م (۲ س + ۳/۲) π

= جب م طہ − م جب (م − ۲) طہ + م(م − ۱)/[۲ جب (م − ۴) طہ ......، ...... (۳۲)

جہاں طہ، (۲ س + ۱) π اور (۲ س + ۲) π کے درمیان واقع ہے۔
یہ سلسلے طہ کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہیں اگر م مثبت ہو۔ اگر م صفر اور − ۱ کے درمیان واقع ہے تو طہ کی انتہائی قیمتیں ۲ س π ± ۱/۲ π یا ۲ س π، (۲ س + ۱) π خارج کرنی چاہئیں کیونکہ طہ کی ان قیمتوں کے لئے سلسلے مستدق نہیں ہوتے۔

آبیل نے تنہائی مسئلہ پر اپنے مقالہ میں اس دفعہ کے آٹھ ضابطوں کو بیان کیا تھا لیکن معلوم ہوتا ہے کہ بعد کے مصنفین نے ان پر نظر نہیں ڈالی۔

———(※)———

(284)

پندرھواں باب

قوت نمائی تفاعل۔ لوکارثم

قوت نمائی سلسلہ

۲۲۳ — لامتناہی سلسلہ

$$۱ + ی + \frac{ی^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{ی^{۳}}{\lfloor ۳} + \cdots + \frac{ی^{ن}}{\lfloor ن} + \cdots$$

پر غور کرو جسکا انتہائی مجموعہ ہم ق (ی) سے تعبیر کرینگے جہاں ی ملتف عدد لا + خ ما ہے۔ اگر ی کا مقیاس ر ہو تو سلسلہ

$$۱ + ر + \frac{ر^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots\cdots$$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے مستدق ہے کیونکہ (ن + ۱) ویں رقم کی نسبت ن ویں رقم کے ساتھ $\frac{ر}{ن}$ ہے جو مسلسل گھٹتی ہے جیسے ن بڑھتا ہے۔ پس ابتدائی سلسلہ ی کی تمام قیمتوں کے لئے مطلقاً مستدق ہے۔ اس سلسلہ کو قوت نمائی سلسلہ کہتے ہیں اور یہ کسی دائرہ میں جسکا مرکز ی = ۰ ہو یکساں طور پر مستدق ہوتا ہے۔

۲۲۴ — $ی_{۱}$ اور $ی_{۲}$ کے جواب ہیں جو دو قوت نمائی سلسلے ہیں انکو

باہم ضرب دیا جائے تو $ی_1$ اور $ی_2$ میں م ویں درجے کی رقم ہے

$$\frac{ی_1^{م}}{\lfloor م} + \frac{ی_1^{م-1}}{\lfloor م-1} \cdot \frac{ی_2}{\lfloor 1} + \frac{ی_1^{م-2}}{\lfloor م-2} \cdot \frac{ی_2^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{ی_2^{م}}{\lfloor م}$$

جو مسئلہ ثنائی کی رو سے $\frac{1}{\lfloor م}(ی_1 + ی_2)^{م}$ کے مساوی ہے کیونکہ م مثبت صحیح عدد ہے۔ اس لئے متذکرۂ صدر دو سلسلوں کے حاصل ضرب کے لئے یہ سلسلہ

$$1 + (ی_1 + ی_2) + \frac{(ی_1 + ی_2)^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{(ی_1 + ی_2)^{م}}{\lfloor م} + \cdots\cdots$$

حاصل ہوتا ہے جو ق $(ی_1 + ی_2)$ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اب دفعہ ۲۰۹ میں ثابت کردہ مسئلہ سے چونکہ یہ قوت کا فی سلسلے دونوں مطلقاً مستدق ہیں انکے مجموعوں کا حاصل ضرب ... بالا حاصل ضربی سلسلہ کے مجموعہ کے مساوی ہے، اس لئے

$$ق(ی_1) \times ق(ی_2) = ق(ی_1 + ی_2) \cdots\cdots\cdots (1)$$

اس بنیادی مساوات سے ہم فوراً اخذ کرتے ہیں

(285)

$$ق(ی_1) \times ق(ی_2) \times \cdots \times ق(ی_ن) = ق(ی_1 + ی_2 + \cdots + ی_ن)$$

اور اسلئے $\{ق(ی)\}^{ن} = ق(ن ی) \cdots\cdots\cdots (2)$

جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے[1]۔

۲۲۵ — اگر مساوات (۲) میں ی = ۱ رکھا جائے تو

$$ق(ن) = \{ق(1)\}^{ن}$$

---

[1] یہ تحقیق کوشی سے منسوب ہے، دیکھو اسکی Analyse Algebrique -

جہاں ق (۱) سے سلسلہ

$$1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\ldots\ldots\ldots$$

کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ آگے چلکر یہ دکھایا جائیگا کہ عدد ق (۱) ایک غیر منطق عدد ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹..... ہے، اِسکو بالعموم فو سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہو تو ق (ن) = فوⁿ

پھر (۲) میں فرض کرو کہ ی = ف/ق جہاں ف اور ق ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں، اور فرض کرو کہ ن = ق تو {ق (ف/ق)}^ق = ق (ف)،

اسلئے ق (ف/ق)، ق (ف) یا فو^ف کا ق واں جذر ہونا چاہیے۔

چونکہ ق (ف/ق) حقیقی اور مثبت ہے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ ق (ف/ق)، ق√فو^ف کی حقیقی مثبت قیمت ہے، اسکو ہم فو^(ف/ق) کی صدر قیمت کہینگے۔

قوت نمائی سلسلہ دفعات ۲۰۳ تا ۲۰۸ میں غور کردہ قوتی سلسلہ کی ایک خاص صورت ہے۔ اس کے استدقاق کا نصف قطر لاانتناہی ہے اور اس لئے کسی ثابت دائرہ میں جسکا مرکز ی = ۰ پر ہو یہ سلسلہ یکساں طور پر ستدق ہوتا ہے۔ مزید براں دفعہ ۲۰۰ میں ثابت کردہ مسئلہ کی رو سے تفاعل ق (ی) کسی نقطہ ی پر مسلسل ہے۔ اگر لا کوئی دیا ہوا غیر منطق مثبت حقیقی عدد ہو تو اسکی تعریف مثبت منطق عددوں لا₁، لا₂، ..... لام ..... کے ایک تواتر کی انتہا سے ہو سکتی ہے۔ دفعہ ۱۸۶ میں بیان کردہ تعریف کی رو سے فو^لا کی صدر قیمت

$و^{لا_م}$ کی انتہا ہے جبکہ صحیح عدد م لاانتہا بڑھا دیا جائے! یہ معلوم ہے کہ یہ انتہا موجود ہوتی ہے اور اسکی قیمت منطق عددوں کے کسی مخصوص تواتر پر جو دئے ہوئے غیر منطق عدد لا کی تعریف کے لئے استعمال ہوا ہو منحصر نہیں ہوتی۔ چونکہ ق (لا) ایک مسلسل تفاعل ہے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ق (لا) ، ق (لام) کی انتہا ہے جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جائے۔ پس چونکہ $و^{لا_م} =$ ق (لام) م کی ہر قیمت کے لئے، اسلئے

$و^{لا} =$ ق (لا) جبکہ $و^{لا}$ اپنی صدر قیمت اختیار کرے۔

ثانیاً اگر لا کوئی منفی حقیقی عدد ہو تو چونکہ

$$ق (لا) ق (-لا) = ق (٠) = ١$$

اسلئے ق (لا) $= \frac{١}{و^{-لا}} = و^{لا}$ جہاں $و^{لا}$، $و^{-لا}$ اپنی صدر قیمتیں رکھتے ہیں

اس طرح ہم نے ثابت کر دیا کہ کسی حقیقی عدد لا کیلئے سلسلہ (286)

$$١ + لا + \frac{لا^٢}{\underline{|٢}} + \dots$$

کا انتہائی مجموعہ، $و^{لا}$ کی صدر قیمت ہے جہاں و کی تعریف ق (١) = و سے ہوئی ہے۔ یہ قوت نمائی مسئلہ ایک حقیقی قوت نما کے لئے ہے۔

۲۲۶ - اب ہم بتائینگے کہ خواہ ی کوئی ملتف عدد ہو عدد ق (ی) جو ی کی قوتوں میں قوت نمائی سلسلہ کا انتہائی مجموعہ ہے $(١ + \frac{ی}{م})^م$ کی انتہائی قیمت کے مساوی ہے جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جائے

جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\left(۱+\frac{ی}{م}\right)^{م}=۱+م\frac{ی}{م}+\frac{م(م-۱)}{\lfloor ۲}\cdot\frac{ی^{۲}}{م^{۲}}+\cdots+\frac{م(م-۱)\cdots(م-س+۱)}{\lfloor س}\cdot\frac{ی^{س}}{م^{س}}$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$=۱+ی+\left(۱-\frac{۱}{م}\right)\frac{ی^{۲}}{\lfloor ۲}+\cdots+\left(۱-\frac{۱}{م}\right)\left(۱-\frac{۲}{م}\right)\cdots\left(۱-\frac{س-۱}{م}\right)\frac{ی^{س}}{\lfloor س}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

اب اگر ا، ب، ج، .... کوئی مثبت حقیقی عدد ہوں ایک سے کم تو

$$(۱-ا)(۱-ب)>۱-(ا+ب)$$

$$(۱-ا)(۱-ب)(۱-ج)>(۱-ا-ب)(۱-ج)$$
$$>۱-(ا+ب+ج)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

پس $(۱-ا)(۱-ب)(۱-ج)\cdots<۱$ اور $>۱-(ا+ب+ج+\cdots)$

اور (فرض کرو) $=۱-ط(ا+ب+ج+\cdots\cdots)$

جہاں ط، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔ پس

$$\left(۱-\frac{۱}{م}\right)\left(۱-\frac{۲}{م}\right)\cdots\left(۱-\frac{س}{م}\right)=۱-ط_{س}\left(\frac{۱}{م}+\frac{۲}{م}+\cdots+\frac{س}{م}\right)$$

$$=۱-ط_{س}\frac{س(س+۱)}{۲م}$$

جہاں طس، صفر اور ایک کے درمیان کوئی عدد ہے۔

اب

$$\left(1+\frac{ی}{م}\right)^{م} = 1 + ی + \frac{ی^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + \frac{ی^{س}}{\lfloor س} + \cdots + \frac{ی^{م}}{\lfloor م} + ب'$$

جہاں ب'

$$= \frac{ی^{2}}{2م}\left\{1 + ط_{2} \times \frac{ی}{1} + ط_{3} \times \frac{ی^{2}}{\lfloor 2} + \cdots + ط_{س+1} \times \frac{ی^{س}}{\lfloor س} + \cdots + ط_{م-1} \times \frac{ی^{م-2}}{\lfloor م-2}\right\}$$

کو تعبیر کرتا ہے۔

خطوط وحدانی کے اندرونی سلسلہ کے مجموعے کا مقیاس مستدق سلسلہ

$$1 + \frac{|ی|}{1} + \frac{|ی|^{2}}{2} + \cdots\cdots\cdots$$

(287) کے انتہائی مجموعے سے کم ہے؛ اور جب م کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو $\frac{ی^{2}}{2م}$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اسلئے $\left(1+\frac{ی}{م}\right)^{م}$ کی انتہائی قیمت جبکہ م کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تفاعل ق(ی) ہے۔ عدد ھ، $\left(1+\frac{1}{م}\right)^{م}$ کی انتہائی قیمت ہے۔

۲۴۷ — دفعہ سابق میں ثابت کردہ مسئلہ سے ق(ی) کی قیمت معلوم کرنیکا طریقہ حاصل ہوتا ہے جہاں ی = لا + خ ما جو ایک ملتف عدد ہے۔ اس مسئلہ سے

$$ق(لا + خ ما) = نہا\left(1 + \frac{لا + خ ما}{م}\right)^{م} ;$$

رکھو $۱ + \frac{لا}{م} = غہ\, جم\, فہ$ ، $\frac{ما}{م} = غہ\, جب\, فہ$ تو

$$\left(۱ + \frac{لا + خ\, ما}{م}\right)^{م} = غہ^{م} (جم\, فہ + خ\, جب\, فہ)^{م} = غہ^{م} (جم\, م\, فہ + خ\, جب\, م\, فہ)$$

حسب مسئلہ ڈیموائر۔

نیز

$$غہ = \sqrt{۱ + \frac{۲لا}{م} + \frac{لا^{۲} + ما^{۲}}{م^{۲}}}$$

اور فہ ، $مس^{-۱} \frac{ما}{لا + م}$ کی صدر قیمت ہے۔ $غہ^{م}$ کی انتہائی قیمت

$$\left(۱ + \frac{لا}{م}\right)^{م} \left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{(لا + م)^{۲}}\right\}^{\frac{م}{۲}}$$

کی انتہائی قیمت ہے یا

$$ق(لا) \left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{م(\sqrt{م} + لا/\sqrt{م})^{۲}}\right\}^{\frac{م}{۲}}$$

کی انتہائی قیمت۔ اب فرض کرو کہ ر، $\sqrt{م} + لا/\sqrt{م}$ سے کم ایک ثابت مثبت عدد ہے، تب

$$\left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{م(\sqrt{م} + لا/\sqrt{م})^{۲}}\right\}^{\frac{م}{۲}}$$

کی انتہا، ایک اور

$$\left\{۱ + \frac{ما^{۲}}{م\, ر^{۲}}\right\}^{\frac{م}{۲}}$$

کے درمیان واقع ہے یا ایک اور $و^{\frac{ما^{۲}}{۲ر^{۲}}}$ کے درمیان۔ اب چونکہ

شرط ر < |م| + |لا| |م| کے تحت ر کو اسقدر بڑا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں اسلئے

$$\left\{ ١ + \frac{ما^٢}{(لا+م)^٢} \right\}^{\frac{١}{٢}م}$$

کی انتہا ایک ہے اور اسلئے غ^م کی انتہا ف (لا) ہے جو قوٗ^{لا} کی صدر قیمت ہے۔ م مس$^{-١}$ $\frac{ما}{لا+م}$ کی انتہائی قیمت، $\frac{م\,ما}{لا+م}$ کی انتہائی قیمت ہے جو ما ہے، پس

$$نہا \left(١ + \frac{لا + خ\,ا}{م}\right)^م = قوٗ^{لا} (جم\,ما + خ\,جب\,ما)$$

جہاں قوٗ^{لا} اپنی صدر قیمت رکھتا ہے، اس طرح

$$ف\,(لا + خ\,ما) = قوٗ^{لا}\,(جم\,ما + خ\,جب\,ما)$$

(288)

دائری تفاعلوں کے پھیلاؤ

۲۲۸ — اگر ہم دفعہ سابق کے آخری نتیجہ میں لا = ۰ رکھیں تو

$$ف\,(خ\,ما) = جم\,ما + خ\,جب\,ما$$

اسلئے

$$جم\,ما + خ\,جب\,ما = ١ + خ\,ما - \frac{ما^٢}{\lfloor ٢} - خ\,\frac{ما^٣}{\lfloor ٣} + \ldots\ldots$$

یا، اس مساوات کی طرفین میں خیالی اور حقیقی حصوں کو مساوی رکھنے

سے

$$\text{جم ما} = ۱ - \frac{\text{ما}^{۲}}{|۲} + \frac{\text{ما}^{۴}}{|۴} - \cdots + (-۱)^{\text{س}} \frac{\text{ما}^{۲\text{س}}}{|۲\text{س}} + \cdots \quad (۳)$$

$$\text{جب ما} = \text{ما} - \frac{\text{ما}^{۳}}{|۳} + \frac{\text{ما}^{۵}}{|۵} - \cdots + (-۱)^{\text{س}} \frac{\text{ما}^{۲\text{س}+۱}}{|۲\text{س}+۱} + \cdots \quad (۴)$$

پس جم ما اور جب ما کیلئے دائری ناپ ما کی قوتوں میں پھیلے ہوئے سلسلے حاصل ہو چکے، یہ سلسلے دفعہ ۹۹ میں حاصل کئے جاچکے تھے۔
ہم ان نتیجوں کو شکل ذیل میں بھی لکھ سکتے ہیں :۔

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ما} &= \frac{۱}{۲}\left\{\text{ق}(\text{خ ما}) + \text{ق}(-\text{خ ما})\right\} \\ \text{جب ما} &= \frac{۱}{۲\text{خ}}\left\{\text{ق}(\text{خ ما}) - \text{ق}(-\text{خ ما})\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (۵)$$

دائری تفاعلوں کی قوت نمائی قیمتیں

۲۲۹ ۔ اگر ی حقیقی عدد ہو تو جملہ $\text{و}^{\text{ی}}$ بموجب تعریف مندرجہ جبر و مقابلہ کثیر القیمتی ہے سوائے اس صورت کے جبکہ ی ایک مثبت صحیح عدد ہو۔ اگر ی کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کے مساوی ہو جو اپنی مختصر ترین شکل میں ہے تو $\text{و}^{\text{ف}/\text{ق}}$ کی ق قیمتیں ہیں یعنی $\text{و}^{\text{ف}}$ کے ق ویں جذر۔

ان قیمتوں میں سے وہ قیمت جو حقیقی اور مثبت ہے $\text{و}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کہلاتی ہے اور ق (ی) کے مساوی ہے۔ اگر ی ایک غیر منطق حقیقی عدد ہو تو $\text{و}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت کی تعریف، حسب دفعہ ۱۸۶، اس تواتر کی انتہا سے کیجاتی ہے جو $\text{و}^{\text{ی}_۱}$، $\text{و}^{\text{ی}_۲}$، ...، $\text{و}^{\text{ی}_\text{ر}}$، ... کی صدر قیمتوں سے بنتا ہے جہاں $\text{ی}_۱$، $\text{ی}_۲$، ...، $\text{ی}_\text{ر}$، ... منطق عددوں کا

ایک تواتر ہے جسکی انتہا ی ہے۔ ہم وی سے بالعموم ق (ی) کی صدر قیمت مُراد لینگے۔

اگر ی حقیقی عدد نہ ہو تو وی کی کوئی تعریف تا حال نہیں دی گئی ہے اور یہ اس حد تک بے معنی رمز ہے۔

لیکن رمز وی یا و^لا+خ ما کو تعریف کے ذریعہ معنی پہنانا سہولت پیدا کرتا ہے۔ ہم وی کو جو معنی پہنائینگے اس کا صرف ایک جزو یہاں بیان کرینگے یعنی صرف اُسکی تعریف کرینگے جسکو وی کی صدر قیمت کہا جاسکتا ہے، اور پھر زیادہ عام تعریف کی طرف رجوع ہونگے۔

(289) تفاعل وی کی صدر قیمت کی تعریف ہم یہ کرینگے کہ وہ تفاعل ق (ی) ہے یا[1] (جسکے معنی وہی ہیں) تفاعل $(1+\frac{ی}{م})^م$ کی انتہا ہے جبکہ م کو مثبت صحیح قیمتوں میں سے لا انتہا بڑھا دیا جائے۔

یہ توجہ طلب ہے کہ و^لا+خ ما کی صدر قیمت کی یہ تعریف ایسی ہے کہ یہ تفاعل قوتوں کے معمولی قانون کو پورا کرتا ہے یعنی

$$و^{لا_1+خ ما_1} \times و^{لا_2+خ ما_2} = و^{لا_1+لا_2+خ(ما_1+ما_2)}$$

[1] تعریف کی یہ آخری شکل Schlömilch کی مجوزہ ہے، دیکھو Zeitschrift für Math. Vol. VI.

یہ دفعہ ۲۲۳ کے مسئلہ (۱) سے مستنبط ہوتا ہے - ہم بالعموم رمز وٰی سے جب کبھی یہ استعمال ہو اسکی صدر قیمت ق (ی) حسب تعریف بالا، مراد لینگے -

۲۳۰ - رمز وٰ^(لا+خ ما) کے مفہوم سے متعلق اِس قرار داد کے بعد دفعہ ۲۲۷ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

وٰ^(لا+خ ما) = وٰ^لا (جم ما + خ جب ما)

اور لا = ۰ رکھنے سے وٰ^(خ ما) = جم ما + خ جب ما

مسئلہ (۵) کو اب لکھا جاسکتا ہے

جم ما = ۱/۲ (وٰ^(خ ما) + وٰ^(-خ ما))
جب ما = ۱/(۲خ) (وٰ^(خ ما) - وٰ^(-خ ما)) .... (۶)

اِنکو جیب التمام اور جیب کی قوت نمائی قیمتیں کہتے ہیں - طالب علم کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ مسئلہ (۶)، مساواتوں (۳) اور (۴) کو رمزی طریقہ میں لکھنے کے سوا اور کچھ نہیں ہے جنکو شکل (۵) میں بھی لکھا جاچکا ہے رمز وٰ^(خ ما) کو رمز ق (خ ما) کی بجائے لکھنے میں صرف یہ فائدہ ہے کہ قبل الذکر سے ضرب کا وہ قانون جو دفعہ ۲۲۴ میں دیا گیا ہے بہت جلد ذہن میں آجاتا ہے - مسئلہ (۱) کی شکل وہی ہے جو حقیقی قوت نماؤں کو ضرب دینے کے لئے ہے؛ اس لئے قوت نماؤں کو خیالی قوتوں کے ساتھ لینے میں سہولت نظر آتی ہے جنکے لئے ضرب کا قانون وہی ہوگا جو (۱) سے بیان ہوتا ہے -

۲۳۰ ا - تفاعل وٰی کی تعریف، ی کی کسی مختلف قیمت کیلئے، اوپر یہ کی گئی ہے کہ وہ قوت نمائی سلسلہ

$$1 + ی + \frac{ی^{2}}{\lfloor\underline{2}} + \frac{ی^{3}}{\lfloor\underline{3}} + \cdots\cdots$$

کا انتہائی مجموعہ ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$و^{ی} = 1 + ی + \frac{ی^{2}}{\lfloor\underline{2}} + \cdots + \frac{ی^{س}}{\lfloor\underline{س}} + ب_{س}$$

جہاں $|ب_{س}| \not> \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor\underline{س+1}} + \frac{|ی|^{س+2}}{\lfloor\underline{س+2}} + \cdots\cdots$ ،

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$|ب_{س}| < \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor\underline{س+1}}\left\{1 + |ی| + \frac{|ی|^{2}}{\lfloor\underline{2}} + \frac{|ی|^{3}}{\lfloor\underline{3}} + \cdots\cdots\right\} \qquad (290)$$

یا $< \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor\underline{س+1}}\, و^{|ی|}$

اگر $|ی| < 1$ تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$|ب| < \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor\underline{س+1}}\left\{1 + |ی| + |ی|^{2} + \cdots\cdots\right\}$$

یا $|ب| < \frac{|ی|^{س+1}}{\lfloor\underline{س+1}} \cdot \frac{1}{1-|ی|}$

اس طرح ہم دکھا چکے کہ

$$و^{ی} = ۱ + ی + \frac{ی^{۲}}{\lfloor ۲} + \cdots\cdots + \frac{ی^{س}}{\lfloor س}(۱ + ع_{س})$$

جہاں $|ع_{س}| < \frac{|ی|}{\lfloor س+۱} و^{|ی|}$، اور اسلئے $|ع_{س}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ $|ی|$ صفر کی طرف مستدق ہو۔ خاص صورت میں س = ۱ لینے سے مسئلہ $و^{ی} = ۱ + ی(۱ + ع_{۱})$ حاصل ہوتا ہے جہاں $|ع_{۱}| < \frac{۱}{۲}|ی| و^{|ی|}$، اور اسلئے $|ع_{۱}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ $|ی|$ صفر کی طرف مستدق ہو۔ ہم اس نتیجہ کو شکل

$$نہا_{|ی| = ۰} \frac{و^{ی} - ۱}{ی} = ۱$$

میں بیان کر سکتے ہیں۔

اس آخری نتیجہ سے حاصل ہوتا ہے $نہا_{ھ = ۰} \frac{و^{ی+ھ} - و^{ی}}{ھ} = و^{ی}$ اور

اس لئے تفاعل $و^{ی}$ ایسا ہے کہ وہ خود اپنے تفرقی سر کے مساوی ہے۔

علم تحلیل میں تفاعل $و^{ی}$ کی ابتدا اِس تعریف کے ساتھ کیجا سکتی ہے کہ وہ ایسا تفاعل ع ہے جو حسب ذیل شرطوں کو پورا کرتا ہے :-

$$\frac{فرع}{فری} = ع، \quad ی \text{ کی ہر قیمت کے لئے}$$

اور $ع = ۱$ جبکہ $ی = ۰$

اگر یہ مان لیا جائے کہ سلسلہ $ا_. + ا_١ ی + ا_٢ ی^٢ + \dots$ موجود ہے جو ی کی ہر قیمت کے لئے مستدق ہے اور ایسا ہے کہ اس کے مشتق سلسلہ $ا_١ + ٢ ا_٢ ی + ٣ ا_٣ ی^٢ + \dots$ میں بھی وہی خاصیت ہے تو دونوں سلسلے کسی محدود نصف قطر کے دائرہ میں یکساں طور پر مستدق ہوتے ہیں۔ یہ پہلے سلسلہ کے مجموعہ کو ع سے تعبیر کیا جائے تو دوسرے سلسلہ کا مجموعہ ایک معلومہ مسئلہ کی رو سے $\frac{فرع}{فری}$ ہے۔ اگر اب $\frac{فرع}{فری} = ع$

تو ہم متناظر رقموں کے سروں کو مساوی رکھ سکتے ہیں، اس طرح $ا_١ = ا_.$، $٢ا_٢ = ا_١$، ... ن $ا_ن = ا_{ن-١}$ اور اسلئے $ا_ن = \frac{ا_.}{|ن}$۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$ع = ا_. \left\{ ١ + ی + \frac{ی^٢}{|٢} + \dots + \frac{ی^ن}{|ن} + \dots \right\}$ اور یہ آسانی سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ یکساں استدقاق کی مسلّمہ شرطوں کو پورا کرتا ہے اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ شرط $\frac{فرع}{فری} = ع$ کو پورا کرتا ہے۔ اگر ع = ١ جبکہ ی = ۰ تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے $ا_. = ١$۔ اس طرح ہم سلسلہ

$$١ + ی + \frac{ی^٢}{|٢} + \dots + \frac{ی^ن}{|ن} + \dots$$

پر پہنچتے ہیں جسکی تحقیق سے ہم نے اس باب کے مضمون کی ابتدا کی تھی۔

قوت نما اور دائری تفاعلوں کی دَوریت

(291)

۲۳۱ — ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ ق (ی) = قو^لا (جم ما + خ جب ما)

اب چونکہ ما میں ۲ک π جمع کرنے سے جہاں ک مثبت یا منفی

صحیح عدد ہے جم ما اور جب ما نہیں بدلتے اس لئے ق(ی) = ق(ی + ۲ خ ک π) یعنے ق(ی) دَوری (periodic) تفاعل ہے

جسکا دور ۲ خ π ہے۔ چونکہ نوی = نوی+۲ک خ π اسلئے قوت نمائی تفاعل

نوی دَوری ہے اور اسکا خیالی دَور ۲ خ π ہے، نیز چونکہ نوخی =

نوخ(ی + ۲ ک π) اس لئے نوخی، ی کا دوری تفاعل ہے جسکا حقیقی

دور ۲ π ہے۔

پس یہ معلوم ہوا کہ نوی، نوخی میں سے ہر ایک تفاعل یک

دَوری ہے، پہلے تفاعل کا خیالی دَور ۲ خ π ہے اور دوسرے تفاعل کا حقیقی دَور ۲ π ۔ وہ طالب علم جو ناقصی تفاعلوں کے مبادیات سے واقف ہے جان لیگا کہ ایسے تفاعلوں کا بنانا ممکن ہے جنکے دور حقیقی اور خیالی دونوں ہوں، ایسے تفاعلوں کو دو دَوری کہتے ہیں۔

۲۳۲ ۔ دائری تفاعل جم ما، جب ما اولاً ہندسی تعریف کے ذریعہ پیش کئے گئے تھے اور ہم نے اس کتاب کے ابتدائی حصہ میں انکو ایک زاوئی مقدار کے تفاعلوں کے طور پر استعمال کیا ہے جہاں یہ زاوئی مقدار دائری ناپ میں محسوب کیگئی تھی لیکن ہم اس زاوئی مقدار کے تصور کو خارج کرسکتے ہیں اور انکو (جم ما جب ما کو) ایک متغیر کے تفاعل سمجھہ سکتے ہیں، بلا شبہ متغیر کی کوئی قیمت اس مقدار کو ایک زاویہ کے دائری ناپ میں پیمائش کرتی ہے جسکے ذریعہ انکی تعریف ہوئی تھی۔ علم التحلیل میں ان تفاعلوں کی بڑی اہمیت انکی اس خاصیت کی وجہہ سے ہے کہ وہ یک دَوری تفاعل ہیں۔ فوریر اور دیگر علماء ریاضی نے یہ بتایا ہے کہ وہ تمام تفاعل جو ایک حقیقی دَورر کہتے ہیں ان دائری تفاعلوں کے ایک

سلسلہ کے ذریعہ بعض حدود کے تحت تعبیر کئے جا سکتے ہیں لیکن علم التحلیل کی اِس اہم شاخ سے بحث کرنا اس کتاب کے مقصد سے خارج ہے۔

دائری تفاعلوں کی تحلیلی تعریف

۲۳۳ — دائری تفاعلوں کی خالص تحلیلی تعریفیں دینا اور اِن تعریفوں سے انکی بنیادی تحلیلی خاصیتیں اخذ کرنا ممکن ہے تاکہ دائری تفاعلوں کا احصا، ایسی بنیاد پر قائم ہو سکے جو تمام ہندسی تعلقات سے آزاد ہو۔ اِن تعریفوں میں ملتف عدد کے دائری تفاعل بھی آجائینگے۔

(292)

ہم ی کی جیب التمام اور جیب کی تعریف اِن مساواتوں

$$\left.\begin{aligned} \text{جم ی} &= \tfrac{1}{2}\left\{\text{ق}(\text{خ ی}) + \text{ق}(-\text{خ ی})\right\} \\ \text{جب ی} &= \tfrac{1}{2\text{خ}}\left\{\text{ق}(\text{خ ی}) - \text{ق}(-\text{خ ی})\right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots(7)$$

کے ذریعہ کر سکتے ہیں جہاں ق(ی) سے سلسلہ $1 + \text{ی} + \frac{\text{ی}^2}{\underline{|2}} + \ldots$ کا انتہائی مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔ بہ الفاظ دیگر ہم جم ی کی تعریف سلسلہ $1 - \frac{\text{ی}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{ی}^4}{\underline{|4}} - \ldots\ldots$ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ اور جب ی کی تعریف سلسلہ $\text{ی} - \frac{\text{ی}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{ی}^5}{\underline{|5}} - \ldots\ldots$ کے انتہائی مجموعہ کے ذریعہ کرتے ہیں۔ پس ہم اِن کو جیب التمام اور جیب کی عام تعریف سمجھ سکتے ہیں، اس میں ملتف دلیل کی صورت شامل ہے جو قبل الذکر ہندسی تعریفات میں شامل نہ تھی۔

ی کی حقیقی قیمتوں کے لئے تفاعلات جم ی اور جب ی

ہندسی تعریفات کے مطابق ہیں کیونکہ وہ سلسلے جنکو یہ تعبیر کرتے ہیں اُن سلسلوں کے مماثل ہیں جو دفعہ ۹۹ میں ہندسی تعریفوں کے ذریعہ حاصل ہوئے تھے۔

دفعہ ۲۳۰ (۱) میں ثابت کردہ مسئلہ $و^{ی} = ۱ + ی + \frac{ی^{۲}}{\lfloor ۲} + \dots + \frac{ی^{س}}{\lfloor س} + ب_{س}$

کو استعمال کرنے سے جہاں $|ب_{س}| < \frac{|ی|^{س+۱}}{\lfloor س+۱} و^{|ی|}$ ہم دیکھتے ہیں کہ

اگر ی کو خ ی اور −خ ی میں تبدیل کیا جائے اور س = ۲م + ۱ فرض کیا جائے اور پھر محصلہ جملوں کو جمع کیا جائے تو

$$جم\ ی = ۱ - \frac{ی^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{ی^{۴}}{\lfloor ۴} - \dots + (-۱)^{م} \frac{ی^{۲م}}{\lfloor ۲م} + بَ_{م}$$

جہاں $|بَ_{م}| < \frac{|ی|^{۲م+۲}}{\lfloor ۲م+۲} و^{|ی|}$ ۔ بالخصوص $جم\ ی = ۱ + بَ$

جہاں $|بَ| < \frac{|ی|^{۲}}{\lfloor ۲} و^{|ی|}$، اور $جم\ ی = ۱ - \frac{۱}{۲} ی^{۲} + بَ_{۱}$ جہاں

$$|بَ_{۱}| < \frac{|ی|^{۴}}{\lfloor ۴} و^{|ی|}،$$

نیز $|ی| < ۱$ کی صورت میں ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$|بَ| < \frac{|ی|^{۲}}{۲(۱-|ی|)}$$

اور

$$|بَ_{۱}| < \frac{|ی|^{۴}}{\lfloor ۴ (۱-|ی|)}$$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جب ی} = \text{ی} - \frac{\text{ی}^{3}}{\underline{|3}} + \frac{\text{ی}^{5}}{\underline{|5}} - \cdots + (-1)^{\text{م}} \frac{\text{ی}^{2\text{م}+1}}{\underline{|2\text{م}+1}} + \text{س}_{\text{م}}$$

جہاں $|\text{س}_{\text{م}}| < \frac{|\text{ی}|^{2\text{م}+3}}{\underline{|2\text{م}+3}} \text{قو}^{|\text{ی}|}$، اور بالخصوص $\text{جب ی} = \text{ی} + \text{س}_{0}$ (293)

جہاں $|\text{س}_{0}| < \frac{|\text{ی}|^{3}}{\underline{|3}} \text{قو}^{|\text{ی}|}$، اور $\text{جب ی} = \text{ی} - \frac{1}{6}\text{ی}^{3} + \text{س}_{1}$

جہاں $|\text{س}_{1}| < \frac{|\text{ی}|^{5}}{\underline{|5}} \text{قو}^{|\text{ی}|}$۔ اگر $|\text{ی}| < 1$ تو نیز حاصل ہوتا ہے

$$\text{س}_{0} < \frac{|\text{ی}|^{3}}{6(1-|\text{ی}|)}،\quad |\text{س}_{1}| < \frac{|\text{ی}|^{5}}{\underline{|5}\,(1-|\text{ی}|)}$$

۲۳۴ — دفعہ ۲۳۳ میں دی ہوئی تعریفوں سے اب ہم تفاعلات جم ی اور جب ی کی بنیادی خاصیتیں اخذ کر سکتے ہیں۔ چونکہ

$$\text{جم ی} + \text{خ جب ی} = \text{ق}(\text{خ ی})،\quad \text{جم ی} - \text{خ جب ی} = \text{ق}(-\text{خ ی})$$

اسلئے $\text{جم}^{2}\text{ی} + \text{جب}^{2}\text{ی} = \text{ق}(\text{خ ی})\,\text{ق}(-\text{خ ی}) = \text{ق}(0) = 1$

نیز

$$\text{جم}(\text{ی}_{1}+\text{ی}_{2}) = \frac{1}{2}\left\{\text{ق}(\text{خ ی}_{1}+\text{خ ی}_{2}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{1}-\text{خ ی}_{2})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{ق}(\text{خ ی}_{1})\,\text{ق}(\text{خ ی}_{2}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{1})\,\text{ق}(-\text{خ ی}_{2})\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\text{ق}(\text{خ ی}_{1}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{1})\right\}\left\{\text{ق}(\text{خ ی}_{2}) + \text{ق}(-\text{خ ی}_{2})\right\}$$

+ ۱/۴ {ق(خ ی۱) - ق(- خ ی۱)} {ق(خ ی۲) - ق(- خ ی۲)}

یا جم (ی۱ + ی۲) = جم ی۱ جم ی۲ - جب ی۱ جب ی۲

اسی طرح جب (ی۱ + ی۲) = جب ی۱ جم ی۲ + جم ی۱ جب ی۲

اس طرح جمع کے مسئلے ہماری تعریف سے حاصل ہوجاتے ہیں۔

۲۳۵ — فرض کرو کہ ہم مساوات ق (ی) = ۱ پر غور کرتے ہیں۔ اول تو اس مساوات کی کوئی حقیقی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے کیونکہ قوت نما سلسلہ کے ذریعہ ق (ی) کی تعریف سے ظاہر ہے کہ اس مساوات کی کوئی مثبت حقیقی اصل نہیں ہے اور نہ اسکی کوئی منفی حقیقی اصل - لا ہوسکتی ہے کیونکہ ایسی صورت میں مثبت عدد لا بھی ایک اصل ہوگی جیسا کہ رشتہ ق (- لا) ق (لا) = ۱ سے ظاہر ہے نیز مساوات ق (ی) = ۱ کی کوئی ملتف اصل عہ + خ بہ نہیں ہوسکتی جہاں | عہ | > ۰ - کیونکہ اگر عہ + خ بہ اصل ہو تو عہ - خ بہ بھی اصل ہے اور اس لئے ق (۲ عہ) = ق (عہ + خ بہ) ق (عہ - خ بہ) = ۱ جو ناممکن ہے کیونکہ ۲ عہ اصل نہیں ہوسکتی۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساوات ق (ی) = ۱ کی حلیس اصل ی = ۰ کے سوا کوئی اور ہوں تو وہ خالص خیالی ہونی چاہئیں۔ یہ دکھانے کے لئے کہ یہ مساوات ایسی ایک اصل رکھتی ہے یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ مساوات ق (خ بہ) - ق (- خ بہ) = ۰ یعنی جب بہ = ۰ کی ایک حقیقی اصل صفر کے سوا ہے۔ اگر بہ ایسی ایک اصل ہو تو

$$\text{ق}(۲\,\text{خ بہ}) = \{\text{ق}(\text{خ بہ})\}^{۲} = ۱$$

اور اس طرح ق (ی) = ۱ کی ایک اصل ۲ خ بہ ہوگی۔

یہ دکھایا جائیگا کہ اگر مسلسل تفاعل جب بہ / بہ کو جو سلسلہ

$$1 - \frac{\text{بہ}^2}{|\underline{3}} + \frac{\text{بہ}^4}{|\underline{5}} - \dots\dots\dots$$

کے انتہائی مجموعہ سے تعبیر ہوتا ہے ف (بہ) سے تعبیر کیا جائے تو
ف (بہ) مثبت ہے بہ کی تمام قیمتوں کے لئے ایسی کہ ۰ < بہ < ۳
اور یہ کہ وہ منفی ہے جبکہ بہ = ۴ ۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ ہو سکتا ہے کہ
۳ اور ۴ کے درمیان ایک مثبت کے لئے یا ایسی قیمتوں کی ایک طاق
تعداد کے لئے ف (بہ) صفر ہے، اور کسی صورت میں ف (بہ) = ۰
کی عددی طور پر چھوٹی سے چھوٹی اصل ۳ اور ۴ کے درمیان ہے
اگر اس مساوات کی ایک سے زیادہ اصلیں ہوں ۔

اگر بہ مثبت ہو اور $\sqrt{20}$ سے کم تو ف (بہ) کے سلسلہ میں
ہر رقم، بہ استثنائے رقم اول، مابعد کی رقم سے عدداً بڑی ہے

اس لئے ف (بہ) $> 1 - \frac{\text{بہ}^2}{|\underline{3}} + \frac{\text{بہ}^4}{|\underline{5}} - \frac{\text{بہ}^6}{|\underline{7}}$ ، بہ کی ان
قیمتوں کے لئے جو صفر اور ۳ سے بڑے کسی عدد کے درمیان ہو

اب $1 - \frac{\text{بہ}^2}{|\underline{3}} + \frac{\text{بہ}^4}{|\underline{5}} - \frac{\text{بہ}^6}{|\underline{7}}$ کو فہ (بہ) سے تعبیر کرنے سے

معلوم ہوتا ہے کہ فہ (۳) = $\frac{17}{560}$ جو مثبت ہے، اور فہ (۰) = ۱

نیز مشتق تفاعل فہَ (بہ) $\equiv -2\text{بہ}\left(\frac{1}{|\underline{3}} - \frac{2\,\text{بہ}^2}{|\underline{5}} + \frac{3\,\text{بہ}^4}{|\underline{7}}\right)$ منفی ہے
جبکہ بہ، صفر اور ۳ کے درمیان ہو کیونکہ

$$\frac{1}{|\underline{3}} - \frac{2\,\text{بہ}^2}{|\underline{5}} + \frac{3\,\text{بہ}^4}{|\underline{7}} > \frac{1}{|\underline{3}} - \frac{2\,\text{بہ}^2}{|\underline{5}} > \frac{1}{|\underline{3}} - \frac{2\times 3^2}{|\underline{5}} > 0$$

پس فہ (بہ)، ایک سے $\frac{17}{560}$ تک یکساں طور پر گھٹتا ہے جیسے بہ،

صفر سے ۳ تک بڑھتا ہے، اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (ہ)، صفر اور ۳ کے درمیان ہ کی قیمتوں کے لئے، معدوم نہیں ہو سکتا۔ نیز

$$\text{ف}(4) < 1 - \frac{4^2}{2!} + \frac{4^4}{4!} - \frac{4^6}{6!} + \frac{4^8}{8!}$$

$$< 1 - \frac{8}{15} - \frac{6}{15} \times \frac{256}{189} < 0$$

اور اسلئے ۳ اور ۴ کے درمیان ف (ہ) کی کم سے کم ایک اصل موجود ہے کیونکہ ف (۳) مثبت اور ف (۴) منفی ہے۔

ف (ہ) = ۰ کی عدداً چھوٹی سے چھوٹی اصل کو π سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق (ی) = ۱ کی ایک اصل ۲ π خ ہے اور اس سے صغیر تر مقیاس کے ساتھ اس مساوات کی کوئی اصل نہیں ہے سوائے ی = ۰ کے۔

موجودہ نقطۂ نظر سے عدد π کی تعریف اس عدد سے کیجاتی ہے جو مساوات ق (۲ π خ) = ۱ کو پورا کرے اور ایسا ہو کہ کوئی عدد، صفر سے مختلف، صغیر تر مقیاس کے ساتھ مساوات ق (ی) = ۱ کی اصل نہ ہو۔ اگر ک کوئی صحیح عدد ہو مثبت یا منفی تو ق (۲ ک π خ) = {ق (۲ π خ)}^ک = ۱، اور اسلئے مساوات ق (ی) = ۱ کی ایک اصل ۲ ک π خ بھی ہے۔ نیز کوئی اصل ۲ پ π خ موجود نہیں ہے جہاں پ، ک اور ک + ۱ کے درمیان واقع ہے کیونکہ ایسی صورت میں حاصل ہونا چاہیئے

ق (۲ پ π خ − ۲ ک π خ) = ق (۲ پ π خ) ق (−۲ ک π خ) = ۱

(295) اور اس لئے ۲ (پ − ک) π خ جسکا مقیاس، ۲ π خ کے مقیاس سے صغیر تر ہے ق (ی) = ۱ کی اصل ہوگا جو اس مفروض کے خلاف ہے کہ ۲ π خ

اُس اصل کو تعبیر کرتا ہے جسکا مقیاس صغیر ترین ہے۔
پس یہ ثابت ہو چکا کہ مساوات ق (ی) = ۱ کی سب اصلیں بشکل ۲ ک π خ کی ہیں جہاں ک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے اور π ایک معین عدد ہے جو ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے جیسا کہ اوپر ثابت کر دیا گیا۔

اس طرح عدد π کو تحلیلی نظریہ میں داخل کرنے کے بعد ی کی کسی قیمت کے لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ق (ی + ۲ π خ) = ق (ی) ق (۲ π خ) = ق (ی)

اور اس لئے تفاعل ق (ی) ایک دوری تفاعل ہے جسکا خیالی دور ۲ π خ ہے۔

جم ی اور جب ی کی تعریفوں سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ بھی دوری تفاعل ہیں جنکا دور ۲ π ہے، اسلئے جم ۲ π = جم ۰ = ۱ اور جب ۲ π = جب ۰ = ۰۔ ہم نے ابتک اس امر کی تصدیق نہیں کی کہ π حسب تعریف بالا اُس نسبت کے مماثل ہے جو ایک دائرے کے محیط کو اس کے قطر کے ساتھ ہوتی ہے لیکن اسکی تکمیل ایک حقیقی زاویے کی صورت پر غور کرنے سے ہو سکتی ہے جس کے لئے جیب التمام یا جیب کا دور ۲ π ہے، عدد π کی ایک تعریف کی بموجب

۲۳۶ — نیز چونکہ ق (خ π) × ق (خ π) = ق (۲ خ π) = ۱، اسلئے ق (خ π)، -۱ کے مساوی ہونا چاہئے کیونکہ وہ + ۱ کے مساوی نہیں ہو سکتا اس وجہ سے کہ خ π، ق (ی) = ۱ کی اصل نہیں ہے۔
نیز ق (- خ π) = -۱ اسلئے جم π = -۱، جب π = ۰ ۔

پھر چونکہ ق ($\frac{۱}{۲}$ خ π) × ق ($\frac{۱}{۲}$ خ π) = ق (خ π) = -۱

اور ق ($\frac{۱}{۲}$ خ π) × ق (- $\frac{۱}{۲}$ خ π) = ۱

اسلئے $\text{ق}\left(\frac{1}{2}\text{خ}\pi\right)=\pm\text{خ}$ اور $\text{ق}\left(-\frac{1}{2}\text{خ}\pi\right)=\mp\text{خ}$

اسلئے جم $\frac{1}{2}\pi = 0$ اور جب $\frac{1}{2}\pi = \pm 1$، اس ابہام کو دور کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ی حقیقی ہو توجیب ی قیمتوں ی = ۰ اور ی = π کے درمیان لازماً مثبت ہے جیسا کہ دفعہ ۲۲۵ میں ثابت کیا جا چکا ہے، اسلئے جب $\frac{1}{2}\pi = +1$۔ اس طرح صفر، $\frac{1}{2}\pi$، π، ۲π کی جیب التمام اور جیب کی قیمتیں حاصل کرنیکے بعد ہم جمع کے مسئلوں کے ذریعہ جیب التمام اور جیب کے تفاعلوں کی تمام معمولی خاصیتیں ثابت کر سکتے ہیں۔

اب تفاعلات مس ی، مم ی، قط ی، قم ی کی تعریفات علی الترتیب مساواتوں مس ی = جب ی \ جم ی، مم ی = جم ی \ جب ی، قط ی = ۱ \ جم ی، قم ی = ۱ \ جب ی کے ذریعہ ہونگی اور پھر ہم اِن تفاعلات کی خاصیتیں معمولی طریقے سے معلوم کر سکتے ہیں۔

دائری تفاعلوں کی تمام خاصیتیں جو چوتھے، پانچویں، اور ساتویں باب میں تحقق ہوئی تھیں جمع کے ضابطوں اور دوری صفت کی خاصیت سے اخذ ہوتی ہیں، پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ تمام خاصیتیں جو حقیقی دلیلوں کیلئے وہاں ثابت کی گئی ہیں ملتف دلیلوں کے لئے بھی درست ہیں۔

(296) **۲۳۷ ـ** ایک اہم صورت وہ ہے جسمیں ی بالکلیہ خیالی ہو اور خ ما کے مساوی ہو۔ اس صورت میں

$$\text{جم خ ما} = \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{ا}} + \text{قو}^{-\text{ا}}\right)\text{، جب خ ما} = \frac{\text{خ}}{2}\left(\text{قو}^{\text{ا}} - \text{قو}^{-\text{ا}}\right)$$

$$\text{مس خ ما} = \text{خ}\,\frac{\text{قو}^{\text{ا}} - \text{قو}^{-\text{ا}}}{\text{قو}^{\text{ا}} + \text{قو}^{-\text{ا}}}$$

جملوں ۱/۲ (قوما + قو-ما)، ۱/۲ (قوما - قو-ما)، (قوما - قو-ما)/(قوما + قو-ما) کو علی الترتیب ما کی زائدی جیب التمام، جیب اور مماس کہتے ہیں اور ان کو جمز ما، جبز ما، مسز ما لکھتے ہیں، اس طرح

جمز ما = جم خر ما، جبز ما = - خر جب خر ما، مسز ما = - خر مس خر ما

ہم ان تفاعلوں پر ایک خاص باب میں غور کرینگے۔

طبعی لوکارتم

۲۳۸ — اگر ع = ق (ی) جو ملتف متغیری کا ایک واحد القیمت تفاعل ہے تو ہم ی = ق⁻¹ (ع) کی تعریف اس طرح کر سکتے ہیں کہ وہ اساس ق پر ع کا لوکارتم ہے، لوکارتموں کا یہ نظام لوکارتموں کا طبعی نظام کہلاتا ہے۔ چونکہ ق (ی)، ی کے لحاظ سے دوری ہے اسلئے مقلوب تفاعل ق⁻¹ (ی) لامتناہی حد تک کثیر القیمتی ہوگا، اگر ی کی ایک قیمت لوک ی ہو تو لوک ع کی عام قیمت لوک ع = لوک ع + ۲ خر ک π سے حاصل ہوگی۔ کیونکہ ق (ی) = ق (ی + ۲ خر ک π) جہاں ک کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔ بالخصوص ایک مثبت حقیقی عدد لا کے لوکارتم لوک لا + ۲ خر ک π ہونگے جہاں لوک لا، لا کے معمولی حقیقی لوکارتم کو تعبیر کرتا ہے۔

۲۳۹ — فرض کرو ع₁ = ق (ی₁)، ع₂ = ق (ی₂)

تو چونکہ ق (ی₁) × ق (ی₂) = ق (ی₁ + ی₂)

اسلئے حاصل ضرب ع₁ ع₂ کے لوکارتم ق (ی₁ + ی₂) کے لوکارتم ہیں یعنی ی₁ + ی₂ + ۲ خر ک π، یا

لوک ع₁ + لوک ع₂ = لوک (ع₁ ع₂) + ۲ خر ک π

ہم جملہ ۲ خ ک ٹا کو لوک (ع، ع۲) میں شامل فرض کر سکتے ہیں اور اس لئے مساوات بالا کو لکھ سکتے ہیں

لوک (ع، ع۲) = لوک ع۱ + لوک ع۲

اس مساوات سے کسی ایک لوکارثم کی مخصوص قیمت متعین ہوتی ہے جبکہ دوسرے دو لوکارثم دئے گئے ہوں۔

اب فرض کرو کہ ع = غہ (جم فہ + خ جیب فہ) جہاں غہ حقیقی ہے تو اس نتیجہ سے جو ابھی ثابت ہوا حاصل ہوتا ہے لوک ع = لوک غہ + لوک (جم فہ + خ جیب فہ) اور چونکہ ق (خ فہ) = جم فہ + خ جیب فہ اسلئے لوک (جم فہ + خ جیب فہ) کی ایک قیمت خ فہ ہے اور لوک غہ کی عام قیمت لوک غہ + ۲ خ ک ٹا ہے پس لوک ع کی عام قیمت ہے (297)

لوک ع = لوک غہ + خ (فہ + ۲ک ٹا)

جہاں لوک غہ سے لوک غہ کی اصلی قیمت مراد ہے۔

اگر فہ پر - ٹا اور + ٹا کے درمیان ہونیکی قید ہو تو ہم لوک غہ + خ فہ کو لوک ع کی صدر قیمت کہینگے اور اس کو لوک ع سے تعبیر کرینگے پس لوک ع کی عام قیمت

لوک ع = لوک ع + ۲ خ ک ٹا

سے ملتی ہے جہاں لوک ع اسکی صدر قیمت اور ک مثبت یا منفی کوئی عدد صحیح ہے

ہم اس نتیجہ کو لکھ سکتے ہیں

لوک (لا + خر ما) = ۱/۲ لوک (لا^۲ + ما^۲) + خر (مسںٓ ما/لا + ۲ک π) ... (۸)

کسی حقیقی منفی عدد – لا کے لوکارتم کی صدر قیمت کی تعریف کافی طور نہیں ہوئی ہے کیونکہ ایسی کسی مقدار کی دلیل π ہو سکتی ہے یا – π، تاہم سہولت کے مدنظر ہم فرض کرینگے کہ اسکی صدر قیمت کے لئے دلیل π ہے اور اس لئے اسکی صدر قیمت لوک لا + خر π ہے اور اسکے لوکارتم کی عام قیمت لوک لا + (۲ک + ۱) خر π ہے۔

کسی حقیقی مثبت عدد لا کے لوکارتم کی عام قیمت

لوک لا = لوک. لا + لوک ۱ = لوک لا + ۲ خر ک π

سے حاصل ہوتی ہے جہاں لوک لا صدر قیمت ہے۔

لوک خر کی صدر قیمت ۱/۲ π خر ہے، اسلئے لوک خر = (۲ک + ۱/۲) خر π

لوک (– خر) کی صدر قیمت – ۱/۲ π خر ہے، اسلئے لوک (– خر) = (۲ک – ۱/۲) خر π۔

ء کے لوکارتم کو مقیاس غہ اور دلیل فہ کا ایک واحد القیمت تفاعل سمجھ کر اس پر غور کرنا ممکن ہے جبکہ دلیل فہ، – ∞ سے + ∞ تک تمام قیمتوں میں سے گذرتی ہوئی فرض کیجائے اور اسپر π اور – π کے درمیان واقع ہونے کی قید نہ ہو جیساکہ اس سے قبل تھی۔ تب ء کا لوکارتم غہ اور فہ کا واحد القیمت تفاعل لوک غہ + خر فہ ہے، اور ہر دفعہ جبکہ فہ میں ۲ π کا اضافہ ہوتا ہے یہ لوکارتم بقدر ۲ خر π کے بڑھتا ہے اور عدد ء کی عددی قیمت وہی ہوتی ہے جو پہلے تھی۔ وہ طالب علم جو ریمان (Reimaun) کی سطحوں کے نظریہ سے واقف ہے کثیر القیمت تفاعل کو ایک واحد القیمت تفاعل میں بدلکر غور کرنیکے اس طریقہ کے پورے فوائد کا اندازہ کر سکیگا۔

عام قوت نما تفاعل

۲۴۰ – اگر د کوئی عدد ہو حقیقی یا ملتف تو رمز دی سے ق (ی لوک د)

مراد لیا جا سکتا ہے جہاں لوک ا اپنی قیمتوں کی لاانتہا تعداد میں سے کوئی ایک قیمت اختیار کرتا ہے۔ اگر لوک ا اپنی صدر قیمت لوک ا اختیار کرے تو ہم ق (ی لوک ا) کو $ا^{ی}$ کی صدر قیمت کہینگے۔

چونکہ $ق (ی لوک ا) = ۱ + \frac{ی لوک ا}{۱} + \frac{(ی لوک ا)^{۲}}{|۲} + \dots$ (298)

اسلئے عام قوت نما سلسلہ یہ ہے

$$ا^{ی} = ۱ + \frac{ی لوک ا}{۱} + \frac{ی^{۲} (لوک ا)^{۲}}{|۲} + \dots\dots$$

اور $ا^{ی}$ کی صدر قیمت

$$ا^{ی} = ۱ + \frac{ی لوک ا}{|۱} + \frac{ی^{۲} (لوک ا)^{۲}}{|۲} + \dots\dots$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

اگر ا اور ی دونوں حقیقی ہوں تو قوت نما سلسلہ کی معمولی شکل

$$ا^{لا} = ۱ + \frac{لا لوک ا}{|۱} + \frac{لا^{۲} (لوک ا)^{۲}}{|۲} + \dots\dots$$

حاصل ہوتی ہے جس سے $ا^{لا}$ کی صدر قیمت ملتی ہے۔

۲۴۱ — مخصوص صورت ا = تو میں

$$لوک تو = لوک تو + ۲ خ ک \pi = ۱ + ۲ خ ک \pi$$

اور رمز $تو^{ی}$ کے عام معنے ق (ی لوک تو) یا ق (ی + ۲ خ ک π ی) ہیں۔ $تو^{ی}$ کی عام قیمت ق (ی) ہے اور یہ اس تعریف کے مطابق ہے جو دفعہ ۲۲۹ میں دیگئی تھی۔ اسلئے $تو^{ی}$ کی عام قیمت

ق (ی) (جم ۲ ک π ی + خ جب ۲ ک π ی)

ہے۔ ہم اب بھی رمز قوٰی سے اسکی صدر قیمت مراد لیتے رہیں گے۔

۲۴۲ — ئی کی عام قیمت حسب تعریف بالا ق{ی (لوک ر + خ طہ + ۲ خ ک π)} کے مماثل ہے جہاں ر = ر (جم طہ + خ جب طہ) = عہ + خ بہ اور طہ، −π اور π کے درمیان واقع ہے، ی = لا + خ ما لکھنے سے $(\text{عہ} + \text{خ بہ})^{\text{لا} + \text{خ ما}}$ کی عام قیمت کے لئے جملہ حاصل ہوتا ہے

ق{لا لوک ر − طہ ما − ۲ ک π ما + خ (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)}

جو $\text{ق}^{\text{لا لوک ر − طہ ما − ۲ ک π ما}}$ {جم (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)

+ خ جب (ما لوک ر + لا طہ + ۲ π ک لا)}

کے مساوی ہے۔ اسلئے $(\text{عہ} + \text{خ بہ})^{\text{لا} + \text{خ ما}}$ کی صدر قیمت ہے

$\text{قو}^{\text{لا لوک ر − طہ ما}}$ {جم (ما لوک ر + لا طہ) + خ جب (ما لوک ر + لا طہ)}

جہاں　ر = $\sqrt{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}$، طہ = $\text{مس}^{-1} \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$

یہ ضروری نہیں کہ $\text{مس}^{-1} \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ کی صدر قیمت جس کی تعریف دفعہ ۳ میں کی گئی ہے لی جائے۔

اگر ر = ۱ تو $(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\text{لا} + \text{خ ما}}$ کی صدر قیمت کے لئے

تفاعل ق{خ طہ (لا + خ ما)} حاصل ہوتا ہے جسکو شکل جم (لا + خ ما) طہ

+ جیب (لا + خر ما) طہ میں لکھا جا سکتا ہے، یہ ڈیموائر کے مسئلہ کی توسیع ہے جبکہ قوت نما ملتف ہو ۔

(299) ۲۴۳ ـــ مساوات $ا^{ی_1} \times ا^{ی_2} = ا^{ی_1 + ی_2}$ کے درست رہنے کے لئے ہمیں یہ فرض کرنا پڑیگا کہ $ا^{ی_1}$، $ا^{ی_2}$، $ا^{ی_1 + ی_2}$ کی قیمتیں وہ ہیں جو لوک ا کی ایک ہی قیمت کے متناظر ہیں، ایسی صورت میں

$$ا^{ی_1} \times ا^{ی_2} = ق\{ی_1(لوک\ ا + ۲\ خ\ ک\ \pi)\} \times ق\{ی_2(لوک\ ا + ۲\ خ\ ک\ \pi)\}$$

$$= ق\{(ی_1 + ی_2)(لوک\ ا + ۲\ خ\ ک\ \pi)\}$$

$$= ا^{ی_1 + ی_2}$$

لیکن یہ مساوات درست نہیں ہوگی اگر ان دو تفاعلوں $ا^{ی_1}$، $ا^{ی_2}$ میں ہم ک کی مختلف قیمتیں لینگے۔ بالخصوص مساوات $ا^{ی_1} \times ا^{ی_2} = ا^{ی_1 + ی_2}$ ان تفاعلوں کی صدر قیمتوں کی صورت میں درست ہے ۔

۲۴۴ ـــ جملہ $(ا^{ی_1})^{ی_2}$ کا $ا^{ی_1 ی_2}$ کی ایک قیمت ہونا ضروری نہیں ہے لیکن $ا^{ی_1 ی_2}$ کی ہر قیمت، $(ا^{ی_1})^{ی_2}$ کی ایک قیمت ہے کیونکہ

$$ا^{ی_1 ی_2} = ق(ی_1 ی_2\ لوک\ ا) = ق\{ی_1 ی_2(لوک\ ا + ۲\ خ\ ک\ \pi)\}$$

اور $$(ا^{ی_1})^{ی_2} = ق\{ی_2\ لوک\ ا^{ی_1}\} = ق\{ی_2(ی_1\ لوک\ ا + ۲\ خ\ ک'\ \pi)\}$$

$$= ق\{ی_1 ی_2(لوک\ ا + ۲\ خ\ ک\ \pi) + ۲\ خ \times ک'\ \pi\ ی_2\}$$

اسلئے ای ای ی۲ کی قیمتیں، (ای ی) ی۲ کی صرف وہ قیمتیں ہیں جو کَ = ۰ کی صورت میں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم ہر صورت میں صدر قیمتیں لیں تو مساوات ای ای ی۲ = (ای ی) ی۲ درست ہے۔

اگر ہم رموز ای، وی کو انکی صدر قیمتوں ق (ی لوک ا) ق (ی) کے مماثل لیں جو بالعموم عمل میں کیا جاتا ہے تو ہم ابھی دکھا چکے ہیں کہ اُن جملوں میں جنمیں یہ رموز واقع ہوتے ہیں اعمال کی تکمیل قوت نماؤں کے معمولی قاعدوں کے مطابق کیجا سکتی ہے جیسا کہ عام طور پر جبر و مقابلہ میں کیا جاتا ہے۔

مثال ۱

اگر ا، ب، ج، د، ..... ایک منتظم ن ضلعی کثیر الاضلاع کے راس ہوں جو نصف قطر ا کے دائرہ میں کھینچا گیا ہے جسکا مرکز و ہے تو ثابت کرو کہ اُن زاویوں کا مجموعہ جو ا پ، ب پ، ج پ، .... نصف قطر و پ کے ساتھ بناتے ہیں مس^-۱ $\frac{ا^ن جب ن ط}{ا^ن جم ن ط - ر^ن}$ ہے جہاں

و پ = ر اور زاویہ ا و پ = ط۔

چونکہ $ر^ن - ا^ن و^{ن خ ط} = \prod_{س=۰}^{س=ن-۱} \left\{ ر - ا و^{خ(ط + \frac{۲ س \pi}{ن})} \right\}$

اسلئے لوکارثم لینے سے

لوک (ر^ن - ا^ن جم ن ط - خ ا^ن جب ن ط)

$$= \sum_{\text{س}=٠}^{\text{س}=\text{ن}-١} \text{لوک}\left\{\text{ر} - ٢\text{ا جم}\left(\text{طہ} + \frac{٢\text{س}\pi}{\text{ن}}\right) - \text{خ}\,٢\text{ا جب}\left(\text{طہ} + \frac{٢\text{س}\pi}{\text{ن}}\right)\right\}$$

اور اس مساوات کی طرفین میں خ کے سروں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{مس}^{-١}\frac{\text{ا}^{\text{ن}}\text{جب ن طہ}}{\text{ا}^{\text{ن}}\text{جم ن طہ} - \text{ر}^{\text{ن}}} = \sum_{\text{س}=٠}^{\text{س}=\text{ن}-١}\text{مس}^{-١}\frac{\text{ا جب}\left(\text{طہ} + \frac{٢\text{س}\pi}{\text{ن}}\right)}{\text{ا جم}\left(\text{طہ} + \frac{٢\text{س}\pi}{\text{ن}}\right) - \text{ر}}$$

(300) جہاں مقلوب تفاعلوں کی متناظر قیمتیں لیگئی ہیں ۔ اِس مساوات کی بائیں طرف کا جملہ اُن زاویوں کا مجموعہ ہے جو نصف قطر و پ، وتروں اپ، اپ، ... کے ساتھ بناتا ہے، اس لئے یہ مجموعہ ہے

$$\text{مس}^{-١}\frac{\text{ا}^{\text{ن}}\text{جب ن طہ}}{\text{ا}^{\text{ن}}\text{جم ن طہ} - \text{ر}^{\text{ن}}}$$

کسی اساس پر لوکارتم

۲۴۵ ۔ اگر $\text{ا}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت ع کے مساوی ہو تو ی کو ع کا لوکارتم اساس ا پر کہتے ہیں اور اسکو $\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ع}$ لکھہ سکتے ہیں ۔ اب $\text{ا}^{\text{ی}}$ کی صدر قیمت ق ($\text{ی لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$) ہے جہاں $\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$، ا کا لوکارتم اساس و پر ہے، اور اگر ق ($\text{ی لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$) = ع تو

$$\text{ی ک}_{\text{و}}\,\text{ا} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ع} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ع} + ٢\,\text{خ ک}\,\pi$$

اسلئے $\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ع} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ع} / \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا} = (\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ع} + ٢\,\text{خ ک}\,\pi) / \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$

$\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{ع}$ کی صدر قیمت کو ہم $\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ع} / \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}$ لیتے ہیں اور اسکو

لوک ا ء سے تعبیر کر سکتے ہیں ۔ پس عام قیمت ہے

لوک ا ء = لوک ا ء + ۲ خ ک π \ لوک و ا

جو ایک کثیر القیمت تفاعل ہے جسمیں مختلف قیمتیں بقدر ۲ خ π \ لوک و ا کے ضعفوں کے ایک دوسرے سے فرق رکھتی ہیں۔ مخصوص صورت ا = و میں اوپر کی تعریف، دفعہ ۲۳۸ میں بیان کردہ تعریف کے مطابق ہے کیونکہ اس سے لوک و ء کی عام قیمت کیلئے لوک و ء + ۲ خ ک π حاصل ہوتا ہے۔

عام ترین لوکارثم

۲۴۶ ــــ ہم لوکارثم کی حسب ذیل تعریف دے سکتے ہیں جو دفعہ سابق میں دی ہوئی تعریف کی بہ نسبت زیادہ عام ہے۔

اگر ا^ی کی کوئی قیمت ء کے مساوی ہو تو ی، ء کا لوکارثم اساس ا پر ہے اور لکھا جا سکتا ہے [لوک ا ء] تاکہ لوک ا ء سے جو دفعہ سابق میں استعمال ہوا ہے تمیز ہو جائے۔ ا^ی کی عام ترین قیمت ق (ی لوک و ا) ہے اور اگر یہ قیمت ء کے مساوی ہو تو

ی لوک و ا = لوک و ء، یا ی (لوک و ا + ۲ خ کَ π) = لوک و ء + ۲ خ ک π

جہاں ک اور کَ صحیح اعداد ہیں ۔ پس [لوک ا ء] کی عام قیمت

کی تعریف کی بموجب ن کا لوکارثم اساس ق (۱ + ۲ خ ک π) پر سمجھا جا سکتا ہے اور یہ ن اس قو کا نہیں بلکہ قو$^{۱+۲خ ک π}$ کی ۔۔۔ قیمت ہے۔ اسلئے

فی الحقیقت ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے کہ [لوک ع] لوک$_{ق(۱+۲خ ک π)}$ ع کی

قیمتوں کے مساوی ہے جبکہ ک کو مختلف قیمتیں دیجائیں۔ پس ہم اساس قو پر

عام ترین لوکارثموں کو معمولی لوکارثم اساس قو پر نہیں بلکہ اساس قو$^{۱+۲خ ک π}$ پر

سمجھ سکتے ہیں جو (بعد الذکر اساس) اگرچہ عدداً قو کے (۰۱) ہے لیکن ک کی مختلف قیمتوں کی بموجب اسکی مختلف دلیلیں ہوتی ہیں...

۲۴۸ — اس سوال پر اکثر بحث ہوتی رہی ہے کہ آیا ایک منفی حقیقی

عدد کا لوکارثم حقیقی ہوسکتا ہے یا نہیں؛ مثلاً ۱/۲ لو −۱ کو −۱ کا لوکارثم

سمجھ سکتے ہیں یا نہیں جبکہ یہ امر واقعہ ہے کہ قو$^{۱/۲}$ کی قیمتیں ± ۱ ہیں۔

اس سوال کا جواب اُس تعریف پر منحصر ہے جو ہم لوکارثم کے لئے اختیار کریں؛ اگر ہم دفعہ ۲۴۳ کی معمولی تعریف لیں جو یہ ہے کہ ی، ز کا لوکارثم ہے جبکہ قو^{ی} کی صدر قیمت ع کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارثم نہیں ہو سکتا؛ لیکن اگر ہم دفعہ ۲۴۶ کی تعریف اختیار کریں جو یہ ہے کہ ی، ع کا لوکارثم ہے جبکہ قو^{ی} کی کوئی قیمت ع کے مساوی ہو تو منفی حقیقی عدد کا حقیقی لوکارثم ہو سکتا ہے۔ اگر ر ایک مثبت حقیقی عدد ہو تو

$$[\text{لوک}(-ر)] = \frac{\text{لوک}\,ر + (۲ک+۱)\,خ\,π}{۱ + ۲ک\,خ\,π}$$

$$= \frac{\{\text{لوک}\,ر + ۲ک(۲ک+۱)\,π^{۲}\} + خ\{(۲ک+۱)\,π - ۲ک\,π\,\text{لوک}\,ر\}}{۱ + ۴ک^{۲}\,π^{۲}}$$

اور یہ حقیقی ہے اگر لوک ر = (۲ک + ۱) \ ۲ک ۔ پس اگر ر ہو ایسا کہ لوک ر کی شکل (۲ک + ۱) \ ۲کَ ہو جہاں ک اور کَ صحیح عدد ہیں تو [لوک (۔ر)] کی ایک قیمت حقیقی ہے۔

اگر لوک ر کی یہ شکل نہ ہو تو ہم ہمیشہ ایک عدد ر، معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ جسمیں اور ر میں اتنا کم فرق ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک (۔ر،)] کی ایک قیمت حقیقی ہو، کیونکہ ایک کسر ف/ق اپنی مختصر ترین شکل میں ہمیشہ معلوم ہو سکتی ہے جو لوک ر سے اس قدر کم فرق رکھے جسقدر ہم چاہیں۔ فرض کرو

لوک رَ = ف/ق، تب اگر ق جفت ہے تو [لوک (۔رَ)] کی ایک قیمت

حقیقی ہے اور رَ = ر، لیکن اگر ق طاق ہے تو رَ = و^{(۲س ف + ۱)/(۲س ق)} × و^{۱/(۲س ق)}

اور و^{۱/(۲س ق)} کو س کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، یا لوک رَ کو (۲س ف + ۱)/(۲س ق) کے اتنا قریب لایا جاسکتا ہے

جتنا ہم چاہیں، اسلئے عدد (۲س ف + ۱)/(۲س ق) = لوک ر، معلوم ہو سکتا ہے جو لوک ر سے اسقدر کم فرق رکھے جسقدر ہم چاہیں اور جو ایسا ہو کہ [لوک (۔ر،)] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔ پس ہم اس نتیجہ پر پہنچے ہیں کہ اگرچہ ر کی ہر قیمت کے جواب میں [لوک (۔ر)] کی ایک قیمت حقیقی نہیں ہے لیکن ہم ہمیشہ ایک عدد ر، معلوم کر سکتے ہیں ایسا کہ ر، ۔ ر اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں اور ایسا کہ [لوک (۔ر،)] کی ایک قیمت حقیقی ہو۔

(302)

لوکارثمی سلسلہ

۲۴۹ ۔ (۱ + ی)^م کی صدر قیمت ق{م لوک_و (۱ + ی)} ہے،

لیکن دفعہ ۲۱۱ کی رو سے $(\text{۱} + \text{ی})^{\text{م}}$ کی صدر قیمت سلسلہ

$$\text{۱} + \text{م ی} + \frac{\text{م}(\text{م} - \text{۱})}{\lfloor\text{۲}}\text{ی}^{\text{۲}} + \dots + \frac{\text{م}(\text{م}-\text{۱})\dots(\text{م}-\text{س}+\text{۱})}{\lfloor\text{س}}\text{ی}^{\text{س}}$$

+ .... کا انتہائی مجموعہ ہے بشرطیکہ یہ سلسلہ مستدق ہو جو ہوگا اگر ی کا مقیاس ایک سے کم ہو، اور نیز اگر یہ مقیاس ایک کے مساوی ہو بشرطیکہ $\text{م} > \text{۰}$ ۔ یہ سلسلہ استدقاق کے دائرہ پر بھی مستدق ہوتا ہے جبکہ $\text{۰} > \text{م} > -\text{۱}$، سوائے نقطہ $\text{ی} = -\text{۱}$ کے۔ اب دفعہ ۲۱۰ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ ہم اس سلسلہ کو اس کا مجموعہ بدلے بغیر م کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں بشرطیکہ سلسلہ

$$\text{۱} + |\text{م}||\text{ی}| + \frac{|\text{م}|(|\text{م}|+\text{۱})}{\lfloor\text{۲}}|\text{ی}|^{\text{۲}} + \dots\dots$$

$$+ \frac{|\text{م}|(|\text{م}|+\text{۱})\dots(|\text{م}|+\text{س}-\text{۱})}{\lfloor\text{س}}|\text{ی}|^{\text{س}} + \dots$$

مستدق ہو، اور یہ سلسلہ اسوقت مستدق ہوگا جبکہ $|\text{ی}| < \text{۱}$ ۔

اب چونکہ $\text{ق}\{\text{م لوک}_{\text{ھ}}(\text{۱}+\text{ی})\}$، سلسلہ

$$\text{۱} + \text{م لوک}_{\text{ھ}}(\text{۱}+\text{ی}) + \frac{\text{م}^{\text{۲}}\{\text{لوک}_{\text{ھ}}(\text{۱}+\text{ی})\}^{\text{۲}}}{\lfloor\text{۲}} + \dots$$

کا مجموعہ ہے اسلئے ہم ان دو سلسلوں میں م کی قوتوں کے سروں کو دفعہ ۲۰۸ کی رو سے مساوی رکھ سکتے ہیں، پس

$$\text{لوک}_{\text{ھ}}(\text{۱}+\text{ی}) = \text{ی} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ی}^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\text{ی}^{\text{۳}} - \dots + (-\text{۱})^{\text{س}-\text{۱}}\frac{\text{۱}}{\text{س}}\text{ی}^{\text{س}} + \dots \quad (\text{۹})$$

اس سلسلہ کو جس سے لوگ$_{\text{و}}$ (۱ + ی) کی صدر قیمت حاصل ہوتی ہے لوکارثمی سلسلہ کہتے ہیں۔ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ یہ سلسلہ درست ہوتا ہے جبکہ مق ی < ۱، نیز دفعہ ۲۰۷ کی بموجب اس سلسلہ کا مجموعہ لوگ$_{\text{و}}$ (۱ + ی) رہتا ہے جبکہ مق ی = ۱ بشرطیکہ سلسلہ مستدق ہو جو ہو گا اِلاّ آنکہ ی کی دلیل ± π ہو۔

۲۴۹ ا — یہ مانکر کہ |ی| < ۱ سلسلہ (۹) سے ظاہر ہے کہ

$$\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{ی}) = \text{ی} - \tfrac{1}{2}\text{ی}^2 + \tfrac{1}{3}\text{ی}^3 - \cdots + (-1)^{\text{س}-1}\tfrac{1}{\text{س}}\text{ی}^{\text{س}} + \text{ب}_{\text{س}}$$

جہاں ب$_{\text{س}}$، مستدق سلسلہ $\dfrac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\text{س}+1} + \dfrac{|\text{ی}|^{\text{س}+2}}{\text{س}+2} + \cdots$ کے مجموعہ سے متجاوز نہیں ہو سکتا اور اسلئے $|\text{ب}_{\text{س}}| < \dfrac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\text{س}+1}(1+|\text{ی}|+|\text{ی}|^2+\cdots)$

یا $|\text{ب}_{\text{س}}| < \dfrac{|\text{ی}|^{\text{س}+1}}{\text{س}+1}\cdot\dfrac{1}{1-|\text{ی}|}$

(303)

پس یہ ثابت ہو چکا کہ جب |ی| < ۱ تو

$$\text{لوگ}_{\text{و}}(1+\text{ی}) = \text{ی} - \tfrac{1}{2}\text{ی}^2 + \tfrac{1}{3}\text{ی}^3 - \cdots + \frac{(-1)^{\text{س}-1}}{\text{س}}\text{ی}^{\text{س}}(1+\text{و}_{\text{س}})$$

جہاں $|\text{و}_{\text{س}}| < \dfrac{\text{س}}{\text{س}+1}\cdot\dfrac{|\text{ی}|}{1-|\text{ی}|}$، اور اسلئے |و$_{\text{س}}$|، |ی| کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

بالخصوص س = ۱ لینے سے لوگ$_{\text{و}}$(۱+ی) = ی(۱+و$_1$) جہاں $|\text{و}_1| < \dfrac{1}{2}\dfrac{|\text{ی}|}{1-|\text{ی}|}$ اور اس طرح |و$_1$|، |ی| کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ اس نتیجہ کو

شکل

$$\underset{|ی|=۰}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک}_{\text{و}}(۱+ی)-ی}{ی} = ۰$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اگر م، |ی| سے بڑا کوئی مثبت حقیقی عدد ہو تو $(۱+\frac{ی}{م})^{م} =$

$\text{و}^{\text{م لوک}_{\text{و}}(۱+ی\backslash م)} = \text{و}^{ی(۱+ط)}$ جہاں ط، |ی\م| کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس اگر م کو غیر معین طور پر بڑھنے والے مثبت حقیقی عددوں کے کسی تواتر کی قیمتیں دی جائیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ $(۱+\frac{ی}{م})^{م}$ کی انتہا $\text{و}^{ی}$ ہے۔ یہ مسئلہ دفعہ ۲۲۶ میں صرف اس مخصوص صورت کے لئے ثابت کیا جا چکا ہے جسمیں اعداد م پر مثبت صحیح اعداد ہونیکی قید تھی۔ یہ قید اب اٹھ چکی ہے۔

۲۵۰ — ی = ر (جم ط + خ جب ط) لکھنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}(۱+ی) = \text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{ر جم ط}+\text{خ ر جب ط})$$

اور یہ جملہ ذیل کے مساوی ہے

$$\frac{۱}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}(۱+۲\,\text{ر جم ط}+\text{ر}^{۲}) + \text{خ مس}^{-۱}\{\text{ر جب ط}\backslash(۱+\text{ر جم ط})\}$$

جہاں مقلوب مماس اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔ پس ہمیں حسب ذیل دو سلسلے ملتے ہیں

۱/۲ لوکو (۱ + ۲ ر جم طہ + ر۲) = ر جم طہ − ۱/۲ ر۲ جم ۲ طہ + ۱/۳ ر۳ جم ۳ طہ − .... (۱۰)

مس^-۱ {ر جب طہ \ (۱ + ر جم طہ)} = ر جب طہ − ۱/۲ ر۲ جب ۲ طہ + ۱/۳ ر۳ جب ۳ طہ − ...... (۱۱)

جہاں ر < ۱ ' یا ر = ۱ اور طہ ≠ ± π

اگر ر = ۱ رکھا جائے تو

لوکو (۲ جم ۱/۲ طہ) = جم طہ − ۱/۲ جم ۲ طہ + ۱/۳ جم ۳ طہ − ...... (۱۲)

۱/۲ طہ = جب طہ − ۱/۲ جب ۲ طہ + ۱/۳ جب ۳ طہ − ...... (۱۳)

جہاں طہ ' ± π کے درمیان واقع ہے اور ± π کے مساوی نہیں ہے

اگر (۱۱) میں طہ کو ۲ طہ میں تبدیل کیا جائے تو مسئلہ ذیل حاصل ہوتا ہے

لوک جم طہ = − لوک ۲ + جم ۲ طہ − ۱/۲ جم ۴ طہ + ۱/۳ جم ۶ طہ − ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ ' ± ۱/۲ π کے درمیان واقع ہو۔

پھر طہ کو ۱/۲ π − طہ میں تبدیل کرنے سے

لوک جب طہ = − لوک ۲ − جم ۲ طہ − ۱/۲ جم ۴ طہ − ۱/۳ جم ۶ طہ − ...

جو درست رہتا ہے اگر طہ ' صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔

سلسلہ (۱۳) سے غیر تسلسل کی ایک مثال فراہم ہوتی ہے اس وجہ سے کہ یہ سلسلہ لا انتہا سست رفتار سے مستدق ہوتا ہے جبکہ طہ قیمت π کے قریب آتا ہے ' جب ' طہ = π تو اس سلسلہ کا مجموعہ صفر ہوتا ہے

لیکن جب ط، π سے خواہ کتنی ہی صغیر مقدار کے کم ہو اس سلسلہ کا مجموعہ $\frac{۱}{۲}$ ط ہوتا ہے۔

گریگوری کا سلسلہ

۲۵۱ — چونکہ لوک$_و$ (جم ط + خ جب ط) = خ ط جہاں ط، ±π کے درمیان واقع ہے اسلئے

لوک$_و$ جم ط + لوک$_و$ (۱ + خ مس ط) = خ ط

یا لوک$_و$ جم ط + خ (مس ط − $\frac{۱}{۳}$ مس^۳ ط + $\frac{۱}{۵}$ مس^۵ ط ...)

+ ($\frac{۱}{۲}$ مس^۲ ط − $\frac{۱}{۴}$ مس^۴ ط + ...) = خ ط

بشرطیکہ مس ط، ±۱ کے درمیان واقع ہو جو ہوگا اگر ط، ± $\frac{π}{۴}$ کے درمیان واقع ہو یا ± $\frac{۱}{۴}$ π کے مساوی ہو۔ پس چونکہ جم ط مثبت ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

لوک$_و$ جم ط = − $\frac{۱}{۲}$ مس^۲ ط + $\frac{۱}{۴}$ مس^۴ ط − ....

اور ط = مس ط − $\frac{۱}{۳}$ مس^۳ ط + $\frac{۱}{۵}$ مس^۵ ط − ..... (۱۴)

اس آخری سلسلے کو **گریگوری کا سلسلہ** کہتے ہیں اور یہ درست رہتا ہے اگر ط، ± $\frac{۱}{۴}$ π کے درمیان (بشمول ہر دو حدود) واقع ہو۔

اب ط کو $\frac{۱}{۲}$ π − ط میں بدلنے سے

$\frac{۱}{۲}$ π − ط = مم ط − $\frac{۱}{۳}$ مم^۳ ط + $\frac{۱}{۵}$ مم^۵ ط − .....

جو درست رہتا ہے اگر طہ، $\frac{۱}{۴}\pi$ اور $\frac{۳}{۴}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔
کسی زاویہ طہ کے لئے عام جملے ہیں

$$طہ = ن\pi + مس\,طہ - \frac{۱}{۳}مس^{۳}طہ + \ldots$$

یا
$$طہ = (ن + \frac{۱}{۲})\pi - مم\,طہ + \frac{۱}{۳}مم^{۳}طہ - \ldots$$

جہاں سلسلہ اول میں ن ایک صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ - نπ،
$\pm\frac{۱}{۴}\pi$ کے درمیان واقع ہے اور سلسلہ دوم میں ن ایک
صحیح عدد ہے ایسا کہ طہ - نπ، $\frac{۱}{۴}\pi$ اور $\frac{۳}{۴}\pi$ کے درمیان واقع
ہے۔

گریگوری کے سلسلے کو شکل

$$مس^{-۱}لا = لا - \frac{۱}{۳}لا^{۳} + \frac{۱}{۵}لا^{۵} - \ldots$$

میں بھی لکھ سکتے ہیں جہاں لا، $\pm$ ۱ کے درمیان واقع ہے اور
$مس^{-۱}لا$ اپنی صدر قیمت رکھتا ہے۔

لا کی قوتوں میں جب$^{-۱}$لا کے لئے جو سلسلہ دفعہ ۲۱۸ میں حاصل
کیا جا چکا ہے اسکو گریگوری کے سلسلے سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ فرض کرو
طہ = جب$^{-۱}$لا تو

$$جب^{-۱}لا = \frac{لا}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}}} - \frac{۱}{۳}\frac{لا^{۳}}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} + \frac{۱}{۵}\frac{لا^{۵}}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۵}{۲}}} - \ldots$$

$$+ (-۱)^{ر}\frac{۱}{۲ر+۱}\frac{لا^{۲ر+۱}}{(۱-لا^{۲})^{\frac{۱}{۲}(۲ر+۱)}} + \ldots$$

(305)

اگر لا ایک سے کم ہو تو وہ سلسلہ جو

$$\frac{1}{2\text{ر}+1}\cdot\frac{\text{لا}^{2\text{ر}+1}}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}(2\text{ر}+1)}}$$

کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے مطلقاً مستدق ہے اور سلسلہ

$$\frac{|\text{لا}|}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3}\frac{|\text{لا}|^3}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{5}\frac{|\text{لا}|^5}{(1-\text{لا}^2)^{\frac{5}{2}}}+\cdots\cdots$$

مستدق ہے اگر $|\text{لا}|<\frac{1}{\sqrt{2}}$؛ اسلئے ہم اس سلسلہ کو لا کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں۔ چنانچہ $(-1)^{\text{ر}}\,\text{لا}^{2\text{ر}+1}$ کے سر کے لئے جملہ ملتا ہے

$$\frac{1}{2\text{ر}+1}\left\{1-\frac{2\text{ر}+1}{2}+\frac{(2\text{ر}+1)(2\text{ر}-1)}{2\times4}-\cdots+(-1)^{\text{ر}}\frac{(2\text{ر}+1)(2\text{ر}-1)\cdots\times1}{2\times4\times6\cdots2\text{ر}}\right\}$$

خطوط وحدانی { } کے اندر کا جملہ $(1-\text{ما})^{\frac{1}{2}(2\text{ر}+1)}$ کے پھیلاؤ (ما کی قوتوں میں) میں پہلے ر + ۱ سروں کا مجموعہ ہے اور یہ مجموعہ $(1-\text{ما})^{-1}(1-\text{ما})^{\frac{1}{2}(2\text{ر}+1)}$ یا $(1-\text{ما})^{\frac{1}{2}(2\text{ر}-1)}$ میں $\text{ما}^{\text{ر}}$ کے سر کے مساوی ہے اور یہ سر

$$(-1)^{\text{ر}}\frac{(2\text{ر}-1)(2\text{ر}-3)\cdots\times1}{2\times4\times6\times\cdots\times2\text{ر}}$$

کے مساوی ہے۔ پس $\text{جب}^{-1}\text{لا}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{2\text{ر}+1}$ کا سر ہے

$$\frac{1}{2\text{ر}+1}\cdot\frac{1\times3\times5\times\cdots(2\text{ر}-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2\text{ر}}$$

اسلئے

$$\text{جب}^{-1}\text{لا}=\text{لا}+\frac{1}{2}\times\frac{\text{لا}^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\frac{\text{لا}^5}{5}+\cdots+\frac{1\times3\times5\cdots(2\text{ر}-1)}{2\times4\times6\cdots2\text{ر}}\cdot\frac{\text{لا}^{2\text{ر}+1}}{2\text{ر}+1}+\cdots$$

اس ثبوت سے صرف یہ معلوم ہوتا ہے کہ یہ سلسلہ $\pm \frac{1}{2}$ کے درمیان لا کی قیمتوں کے لئے درست ہے لیکن اس واقعہ کو استعمال کرنے سے کہ اس سلسلہ کا مجموعہ اسکے استدقاق کے دائرہ میں مسلسل ہے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ یہ سلسلہ درست رہتا ہے اگر لا ± 1 کے درمیان ہو۔

دائرہ کی تربیع

۵۱ ۲ (ا) — وہ مشہور مسئلہ جو دائرہ کو مربع میں تحویل (Squaring the circle) کرنیکا ہے یعنی ایک مربع بنانیکا جس کا رقبہ ایک دئے ہوئے دائرہ کے مساوی ہو اس مسئلہ کے مماثل ہے کہ ایک خط مستقیم بنایا جائے جو طول میں ایک دئے ہوئے دائرہ کے محیط کے مساوی ہو۔ وہ طریقۂ عمل جو اس مسئلہ عملی کے حل کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے اقلیدسی ہے جسمیں صرف دائروں اور خطوطِ مستقیم کو اقلیدسی نظام کے اصولِ موضوعہ کی بموجب کھینچنے کا عمل شامل ہے۔

اس مسئلہ عملی کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے کہ وہ ایک خطِ مستقیم کو جسکا طول عدد π سے تعبیر ہوتا ہے بنانیکا مسئلہ ہے جبکہ ایک دئے ہوئے محدود خط کا طول طول کی اکائی متصور ہو۔ لیمبرٹ نے یہ بات ثابت کی کہ عدد π غیر منطق ہے یعنی اسکو شکل $\frac{ف}{ق}$ میں بیان نہیں کیا جا سکتا جہاں ف اور ق صحیح عدد ہیں اور ایک دوسرے کے لحاظ سے مفرد ہیں لیکن یہ امر واقعہ اس بات کو ثابت کرنیکے لئے کافی نہیں ہے کہ طول π کا خط مستقیم بنانا ناممکن ہے کیونکہ غیر منطق طول کے خطوط مستقیم کی ایک خاص جماعت اقلیدسی طریقہ عمل سے حاصل کیجا سکتی ہے۔ اس سلسلہ میں بنیادی اہمیت رکھنے والی ایک کڑی کا

اضافہ ہوا جبکہ لیویل (Liouville) نے[۵۱] علوی اعداد کے وجود کو ثابت کیا جو جبری اعداد سے مختلف ہیں۔ جبری عدد وہ ہے جو کسی درجہ ن کی ایک جبری مساوات کی ایک اصل ہوتا ہے جبکہ اس مساوات کے سر منطق عدد ہوں یہ مسئلہ کی عمومیت پر اثر نہیں پڑتا اگر ان سروں پر مثبت یا منفی صحیح عدد ہونیکی قید عائد کیجائے۔ علوی عدد وہ ہے جو کسی ایسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جس کے سر منطق (یا صحیح عدد) ہوں۔ خود لیویل نے علوی عددوں کی مثالیں دی ہیں لیکن وہ پہلی صورت جس میں ایک عدد کو جو علم التحلیل میں بہت معروف ہے علوی ثابت کیا گیا تھا عدد ق کی تھی جس کی علویت ہرمائٹ (Hermite) نے قائم کی۔ ہرمائٹ کے بعد لنڈی میان (Lindemann) نے[۵۲] اس امر کا ثبوت دیا کہ π ایک علوی عدد ہے۔ اس نے یہ عام تر مسئلہ ثابت کیا کہ اگر قولا = ما تو یہ دو عدد لا اور ما دونوں جبری نہیں ہو سکتے اِلّا بصورت آنکہ لا = ۰، ما = ۱۔ یہ آسان ثبوت کہ ق اور π علوی عدد ہیں بعد میں ہلبرٹ، ہروٹز (Hurwitz) اور گارڈن (Gordan) نے[۵۳] دئے۔ گارڈن کے ثبوت کی ترمیم شدہ شکل یہاں دی جائے گی۔

یہ ثبوت کہ π ایک علوی عدد ہے اس امر کے مماثل ہے کہ کسی ہندسی عمل کے ذریعہ جس میں صرف خطوط مستقیم اور دائرے استعمال کئے گئے ہوں دائرہ کو ایک مربع میں تحویل کرنا ناممکن ہے یا زیادہ عام صورت میں یہ کہ کسی جبری منحنیوں کے ذریعہ ایسا کرنا ناممکن ہے۔ کیونکہ کسی ایسے عمل کے یہ معنی ہیں کہ π کو کسی خاص

---

[۵۱] Liouville's journal vol. xvi. 1851

[۵۲] Mathematische Annalen, vol. xx. 1882.

[۵۳] " " vol. xliii, 1893

جبری مساوات کی ایک اصل کے طور پر ظاہر کیا گیا ہے جہاں یہ مساوات خطوط مستقیم اور دائروں یا دوسرے جبری تخنیوں کی کا ربطیری مساواتوں کو ترکیب دینا سے حاصل ہوئی ہے۔ دائرہ کو مربع میں تحلیل کرنیکا مسئلہ ایسا ہے کہ جس نے صدیوں تک علما ریاضی کے دماغوں کو محو فریب رکھا اور اسلئے لنڈرمن کا ثبوت اس مسئلہ کے عدم امکان کے متعلق اس لحاظ سے بڑی اہمیت رکھتا ہے کہ وہ تاریخی دلچسپی کے ایک مسئلہ سے متعلق ہے۔

۲۵۱ (ب) — یہ دکھانے کے لئے کہ عدد e علوی ہے مان لو (بالفرض امکان) کہ e اس شرط

$$ا + ا_{۱} e + ا_{۲} e^{۲} + \dots + ا_{ن} e^{ن} = ۰$$

کو پورا کرتا ہے جہاں $ا_{۱}$، $ا_{۲}$ ... مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں اور $ا$ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ اب یہ دکھانے کے لئے کہ اس مفروضہ سے ہم اس مسئلہ کے ضد پر پہنچتے ہیں یہ ثابت کیا جائیگا کہ ایک عدد $ک$ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ (307)

$$ک ا = ص + ف،\ ک ا_{۱} e = ص_{۱} + ف_{۱}،\ ک ا_{۲} e^{۲} = ص_{۲} + ف_{۲}،$$

$$\dots،\ ک ا_{ن} e^{ن} = ص_{ن} + ف_{ن}$$

جہاں $ص$، $ص_{۱}$، $ص_{۲}$، ... مثبت یا منفی صحیح عددوں کو تعبیر کرتے ہیں اور $ف_{۱}$، $ف_{۲}$، ...، $ف_{ن}$ اُن عددوں کو تعبیر کرتے ہیں جو عدداً ایک سے کم ہیں اور یہ کہ $ف_{۱} + ف_{۲} + \dots + ف_{ن}$ عدداً ایک سے کم ہے، نیز $ص_{۱} + ص_{۲} + ص_{۳} + \dots + ص_{ن}$ صفر نہیں ہے

ابتدائی مساوات کو ک سے ضرب دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک صحیح عدد اور عدد اً ایک سے چھوٹے عدد کا مجموعہ صفر کے مساوی حاصل ہوتا ہے جو ناممکن ہے۔ ک کی تعیین کے لئے جملہ

$$\text{فہ}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{\text{پ}-۱}}{\underline{|\text{پ}-۱}} \left\{ (۱-\text{لا})(۲-\text{لا}) \ldots (\text{ن}-\text{لا}) \right\}^{\text{پ}}$$

پر غور کرو جہاں پ، ن سے بڑا اور ل سے بڑا ایک مفرد عدد ہے۔ ہم فہ (لا) کو ایسے لا کی قوتوں میں پھیلانے کے بعد $\text{ج}_{\text{پ}-۱} \text{لا}^{\text{پ}-۱} + \text{ج}_{\text{پ}} \text{لا}^{\text{پ}} + \ldots \text{ج}_{\text{ن پ}+\text{پ}-۱} \text{لا}^{\text{ن پ}+\text{پ}-۱}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ اب فہ (لا) کے متواتر مشتق تفاعلوں کو

$$\text{فہَ}(\text{لا})، \text{فہً}(\text{لا})، \ldots، \text{فہ}^{(\text{س})}(\text{لا})، \ldots، \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{ب}-۱)}(\text{لا})$$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{فہ}^{(\text{پ})}(۰)، \text{فہ}^{(\text{پ}+۱)}(۰)، \ldots، \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-۱)}(۰)$$

سب کے سب پ کے ضعف ہیں، لیکن $\text{فہ}^{(\text{پ}-۱)}(۰)$، پ کا ضعف نہیں ہے کیونکہ $(\underline{|\text{ن}})^{\text{پ}}$، پ کے لحاظ سے مفرد ہے۔ نیز اگر صحیح عددوں ۱، ۲، ۳، ...، ن میں سے ایک م سے تعبیر ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{فہ}(\text{م})، \text{فہَ}(\text{م})، \ldots، \text{فہ}^{(\text{پ}-۱)}(\text{م})$ سب کے سب معدوم ہوتے ہیں اور $\text{فہ}^{(\text{پ})}(\text{م})، \text{فہ}^{(\text{پ}+۱)}(\text{م})، \ldots، \text{فہ}^{(\text{ن پ}+\text{پ}-۱)}(\text{م})$ سب کے سب

پ سے تقسیم پذیر صحیح عدد ہیں ۔
فرض کرو کہ ک پ سے

$$\sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} \frac{ا^ر}{\lfloor ر} \times ج_ر$$

یا　$فہ^{(پ-۱)}(۰) + فہ^{(پ)}(۰) + \ldots + فہ^{(ن پ+پ-۱)}(۰)$

تعبیر ہوتا ہے، اِس طرح ک پ، پ کا ضِعف نہیں ہے کیونکہ $فہ^{(پ-۱)}(۰)$، پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے ۔ یہ دکھایا جائیگا کہ ک پ کی وہ قیمت جو مفرد عدد پ کی کافی طور پر بڑی قیمت کے جواب میں ہے مطلوبہ عدد ک ہے ۔

چونکہ ا، پ کے لحاظ سے مفرد ہے اسلئے ک پ ا، پ کا ضِعف نہیں ہے ۔

ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ک_پ\, ا^م\, ن^ا = ا^م \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} \frac{ا^ر}{\lfloor ر} \times ج_ر\, ن^ا$$

$$= ا^م \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} ج_ر \Big\{ م^ر + ر م^{ر-۱} + ر(ر-۱) م^{ر-۲} + \ldots + \lfloor ر$$

$$+ \frac{م^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{م^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \ldots \Big\}$$

اب چونکہ $\frac{م^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{م^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \ldots\ldots$ کا انتہائی مجموعہ

$$م^ر \Big\{ ۱ + م + \frac{م^۲}{\lfloor ۲} + \ldots\ldots \Big\}$$

(308)

کے انتہائی مجموعہ سے یا $\text{مُ}\ \text{وُ}$ سے کم ہے اس لئے اس انتہائی مجموعہ کو $\text{مُ}\ \text{طہ}_\text{ر}\ \text{وُ}$ سے تعبیر کیا جا سکتا ہے جہاں $۰ < \text{طہ}_\text{ر} < ۱$۔
اب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{ک}_\text{پ}\ \text{ا}_\text{م}\ \text{وُ} = \text{ا}_\text{م} \left\{ \text{فہ}(\text{م}) + \text{فہَ}(\text{م}) + \cdots + \text{فہ}^{(\text{ن پ} + \text{پ} - ۱)}(\text{م}) \right\}$$

$$+ \ \text{ا}_\text{م}\ \text{وُ} \sum_{\text{ر} = \text{پ} - ۱}^{\text{ر} = \text{ن پ} + \text{پ} - ۱} \text{ج}_\text{ر}\ \text{طہ}_\text{ر}\ \text{م}^\text{ر}$$

بائیں جانب کی پہلی رقم ایک مثبت یا منفی صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور دوسری رقم عدد آ

$$> |\text{ا}_\text{م}|\ \text{وُ} \sum_{\text{ر} = \text{پ} - ۱}^{\text{ر} = \text{ن پ} + \text{پ} - ۱} |\text{ج}_\text{ر}|\ \text{م}^\text{ر}$$

یا

$$> |\text{ا}_\text{م}|\ \text{وُ}\ \frac{\text{م}^{\text{پ} - ۱}}{|\underline{\text{پ} - ۱}} \left\{ (۱ + \text{م})(۲ + \text{م}) \cdots (\text{ن} + \text{م}) \right\}^\text{پ}$$

جو

$$\not> |\text{ا}_\text{م}|\ \text{وُ}\ \frac{\text{ن}^{\text{پ} - ۱}}{|\underline{\text{پ} - ۱}} \left\{ (۱ + \text{ن})(۲ + \text{ن}) \cdots (\text{ن} + \text{ن}) \right\}^\text{پ}$$

اب پ کو کافی بڑا لینے سے عدد

$$\left\{ \text{ن}(\text{ن} + ۱)(\text{ن} + ۲) \cdots (\text{ن} + \text{ن}) \right\}^\text{پ} \Big\backslash \underline{|\text{پ} - ۱}$$

اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ فرض کرو کہ ک، کپ کی وہ قیمت ہے جبکہ پ اسقدر بڑا ہے کہ

$$\frac{ن^{پ-۱}}{\underline{|پ-۱}}\{(۱+ن)(۲+ن)\ldots(ن+ن)\}^{پ}\{|ا_۱|و+|ا_۲|و^۲$$

$$+\ldots+|ا_ن|و^ن\}$$

ایک سے کم ہے۔

پس ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ ک $(ا_۰+ا_۱و+ا_۲و^۲+\ldots$ $+ا_نو^ن)$ تین عددوں کا مجموعہ ہے جنمیں سے ایک، ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر نہیں ہے اور دوسرا ایک صحیح عدد ہے جو پ سے تقسیم پذیر ہے اور تیسرا ایک عدد ہے جو ایک سے کم ہے، اور یہ ناممکن ہے۔ پس چونکہ تو مساوات

$$ا_۰+ا_۱لا+ا_۲لا^۲+\ldots+ا_نلا^ن=۰$$

کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر منطق ہیں اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔

۲۵۱ (ج)۔ اگر π بفرض امکان ایک جبری مساوات کی اصل ہو جسکے سر منطق ہیں تو خ π بھی ایسی مساوات کی اصل ہوگا۔ مان لو کہ خ π، مساوات

$$ج(لا-ع_۱)(لا-ع_۲)\ldots(لا-ع_س)=۰$$

کی ایک اصل ہے جسکے سر منطق ہیں، اس طرح عددوں $ع_۱$، $ع_۲$، ...، $ع_س$ میں سے ایک عدد خ π ہے۔

چونکہ $و^{خ\pi}=-۱$، اسلئے $(۱+و^{ع_۱})(۱+و^{ع_۲})\ldots(۱+و^{ع_س})=۰$۔

اب اجزائے ضربی کو باہم ضرب دے لینے کے بعد اسکی شکل ہے

$$۱+و^{ب_۱}+و^{ب_۲}+\ldots+و^{ب_ن}=۰$$

جہاں ا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ $ج عہ_1$ ، $ج عہ_2$ ... ، $ج عہ_ن$ کے تمام متشاکل تفاعل صحیح عدد ہیں اسلئے $ج بہ_1$ ، $ج بہ_2$ ... کے تمام متشاکل تفاعل بھی صحیح عدد ہیں۔ ہم لیتے ہیں

$$فہ(لا) = \frac{لا^{پ-1}}{|پ-1} ج^{ن پ+پ-1} \{(لا-بہ_1)(لا-بہ_2)\ldots(لا-بہ_ن)\}^{پ}$$

جہاں پ ایک مفرد عدد ہے جو ا ، ن ، ج ، $ج^{ن}|بہ_1 بہ_2 \ldots بہ_ن|$ سب سے بڑا ہے۔

اب $فہ(لا)$ کو $ج_{پ-1} لا^{پ-1} + ج_{پ} لا^{پ} + \ldots + ج_{ن پ+پ-1} لا^{ن پ+پ-1}$

سے تعبیر کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $فہ^{(پ)}(0)$ ، $فہ^{(پ+1)}(0)$ ، ... ، $فہ^{(ن پ+پ-1)}(0)$

سب کے سب پ کے صحیح عددی ضعف ہیں اور $فہ^{(پ-1)}(0)$ ، پ کا ضعف نہیں ہے۔ نیز اگر $م \leq ن$ تو $فہ(بہ_م)$ ، $فہ'(بہ_م)$ ... $فہ^{(پ-1)}(بہ_م)$

سب کے سب صفر ہیں اور $\sum_{م=1}^{م=ن} فہ^{(پ)}(بہ_م)$ ، $\sum_{م=1}^{م=ن} فہ^{(پ+1)}(بہ_م)$ ، ...

... ، $\sum_{م=1}^{م=ن} فہ^{(ن پ+پ-1)}(بہ_م)$ سب کے سب صحیح عدد ہیں

جو پ سے تقسیم پذیر ہیں۔

فرض کرو کہ

$$ک_{پ} = \sum_{ر=پ-1}^{ر=ن پ+پ-1} |ر \times ج_ر = فہ^{(پ-1)}(0) + فہ^{(پ)}(0) + \ldots + فہ^{(ن پ+پ-1)}(0)$$

اس طرح کہ $پ!$ ، پ کا ضعف نہیں ہے۔

نیز کہ $$پ\, ق^{بم} = \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} ج_ر \left\{ بم^{ر} + ر\, بم^{ر-۱} + \cdots + ر! + \frac{بم^{ر+۱}}{ر+۱} + \frac{بم^{ر+۲}}{(ر+۱)(ر+۲)} + \cdots \right\}$$

$$= ف(بم) + ف'(بم) + \cdots + ف^{(ن پ+پ-۱)}(بم)$$

$$+\, ق^{|بم|} \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} ج_ر\, طر\, |بم|^{ر}$$

جہاں اعداد $|طر|$ سب کے سب صفر اور ایک کے درمیان واقع ہیں۔

$$\text{عدد} \left| \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} ج_ر\, طر\, |بم|^{ر} \right|$$

$$\text{عدداً} < \sum_{ر=پ-۱}^{ر=ن پ+پ-۱} |ج_ر|\, |بم|^{ر}$$

$$\text{یا} < \frac{بہ^{پ-۱}}{\boxed{پ-۱}}\, ق^{ن پ+پ-۱} \left\{ (بہ+|بم_۱|)(بہ+|بم_۲|)\cdots(بہ+|بم_ن|) \right\}^{پ}$$

جہاں بہ، عددوں $|بم_۱|$ ، $|بم_۲|$ ، ... ، $|بم_ن|$ میں سے سب سے بڑا ہے۔

اب ہم پ کو اتنا بڑا لیتے ہیں کہ

$$\left\{و^{ا ن_1} + و^{ا ن_2} + \dots + و^{ا ن_ن}\right\} \frac{ن^{ن پ-1}}{\lfloor پ-1} ج^{ن پ+پ-1} \left\{(ن+ا ن_1)(ن+ا ن_2)\dots\right\}^{پ}$$

> 1

فرض کرو کہ پ کی اس قیمت کے جواب میں $ک_پ$ کی قیمت ک ہے تو ہم دیکھتے ہیں کہ ک $(1 + و^{ن_1} + و^{ن_2} + \dots + و^{ن_ن})$ تین عددوں کے مجموعہ کے طور پر بیان ہو سکتا ہے جنمیں سے ایک 'پ' کا ضعف ہے، دوسرا ایک صحیح عدد ہے پ سے ناتقسیم پذیر، اور تیسرا ایک عدد ہے ایک سے کم، اس لئے یہ ناممکن ہے کہ مجموعہ معدوم ہو سکے۔ پس یہ ثابت ہو چکا کہ π کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہو سکتا جسکے سر صحیح عدد ہوں اور اس لئے وہ ایک علوی عدد ہے۔ (310)

دائرہ کی تقریبی تربیع

۲۵۲ — دائرہ کی تربیع کا مسئلہ جو π کی قیمت متعین کرنیکے مماثل ہے تقریب کے کسی مطلوبہ درجہ تک حل ہو سکتا ہے اگر ان متعدد سلسلوں میں سے کسی ایک سلسلہ میں رقموں کی کافی تعداد لیجائے جو π کے لئے حاصل کئے جا چکے ہیں۔ سادہ ترین سلسلہ جو حاصل ہو سکتا ہے گرگیوری کے سلسلہ میں $ط = \frac{1}{4}\pi$ رکھنے سے ملتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots$$

لیکن یہ سلسلہ اسقدر سست رفتار سے متدق ہوتا ہے کہ π کو محسوب کرنیکے لئے اسکا کوئی عملی فائدہ نہیں۔

۲۵۳ — اگر ہم تماثلہ $\frac{1}{4}\pi = \text{مس}^{-1}\frac{1}{2} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ استعمال کریں اور $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}$ ، $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ کی بجائے انکی قیمتیں گریگوری کے سلسلہ سے لیکر درج کریں تو

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3} + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5} + \cdots\cdots$$

اس کو یولر کا سلسلہ کہتے ہیں ۔

اسی تماثلہ سے ایک دوسرا سلسلہ حاصل ہو سکتا ہے اگر $\text{مس}^{-1}\frac{1}{2}$ اور $\text{مس}^{-1}\frac{1}{3}$ کی بجائے اُن کی قیمتیں سلسلہ ذیل سے جو دفعہ ۲۱۹ میں حاصل کیا گیا تھا لیکر رکھی جائیں

$$\text{مس}^{-1}\text{لا} = \frac{\text{لا}}{1+\text{لا}^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\,\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}\right)^2 + \cdots\right\}$$

تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{4}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{2}{10} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

$$+ \frac{3}{10}\left\{1 + \frac{2}{3}\times\frac{1}{10} + \frac{4\times 2}{5\times 3}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots\cdots\right\}$$

۲۵۴ — دوسرے سلسلے جو اسی طرح حاصل ہوئے ہیں مختلف محاسبوں نے استعمال کئے ہیں ۔ کلاسن (Clausen)[۱] نے اپنا سلسلہ تماثلہ $\frac{1}{4}\pi = 2\,\text{مس}^{-1}\frac{1}{3} + \text{مس}^{-1}\frac{1}{7}$ سے گریگوری کا سلسلہ استعمال کر کے حاصل کیا ۔ میچن (Machin) کا سلسلہ ضابطہ

[۱] دیکھو مضمون On the c..l.of Π" by E.Frisby in the Messenger of Math. vol. II

$$\frac{۱}{۴}\pi = ۴\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} - \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲۳۹}$$

سے حاصل ہوا ہے۔ ڈیس (Dase) نے تماثلہ

$$\frac{۱}{۴}\pi = \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۲} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۸}$$

استعمال کی۔ مچن کے سلسلہ کی ایک آسان تر شکل روتھرفورڈ (Rutherford) نے لی تھی جس نے تماثلہ $\frac{۱}{۴}\pi = ۴\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{۵} - \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۷۰} + \text{مس}^{-1}\frac{۱}{۹۹}$ استعمال کی۔ ہٹن (Hutton)[1] نے یہ سلسلہ

$$\pi = ۲،۴\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{۱۰} + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۲} + \cdots\right\}$$

$$+ ۱،۵۶\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۱۰۰} + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\left(\frac{۲}{۱۰۰}\right)^{۲} + \cdots\right\}$$

دیا جو لا مس$^{-1}$ لا کو $\frac{\text{لا}^{۲}}{۱+\text{لا}^{۲}}$ کی قوتوں میں پھیلا کر اس پھیلاؤ میں لا = $\frac{۱}{۳}$ اور لا = $\frac{۱}{۷}$ رکھنے اور کلاسن کی تماثلہ استعمال کرنے سے حاصل ہوا ہے۔

یولر نے یہ سلسلہ

$$\pi = \frac{۲۸}{۱۰}\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\left(\frac{۲}{۱۰۰}\right) + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\left(\frac{۲}{۱۰۰}\right)^{۲} + \cdots\cdots\right\}$$

$$+ \frac{۳۰۳۳۶}{۱۰۰۰۰۰}\left\{۱ + \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱۴۴}{۱۰۰۰۰۰}\right) + \frac{۴\times۲}{۵\times۳}\left(\frac{۱۴۴}{۱۰۰۰۰۰}\right)^{۲} + \cdots\right\}$$

---

[1] Phil. Trans. 1776

دیا ہے جو متماثلہ

$$\pi = 20 \text{ مسں}^{-1}\frac{1}{7} + 8 \text{ مسں}^{-1}\frac{3}{79}$$

سے اخذ ہو سکتا ہے ۔

ڈبلیو شہانکس (W. Shanks) نے π کی قیمت اعشاریہ کے ۷۰۷ مقامات تک محسوب کی ہے[1]

لارڈ براونکر (Lord Brouncker) رائل سوسائٹی کے پہلے صدر نے ۱۶۵۸ء میں مسلسل کسر $\frac{1}{1+}\ \frac{1^2}{2+}\ \frac{3^2}{2+}\ \frac{5^2}{2+}\cdots = \frac{1}{4}\pi$ دی تھی۔

یہ کسر معمولی قاعدے سے گریگوری کے سلسلہ $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ کو مستحیل کرنے سے حاصل ہوئی ہے ۔ سٹرن[2] (Stern) نے مسلسل کسر

$$\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{1+}\ \frac{1\times 2}{1+}\ \frac{2\times 3}{1+}\ \frac{3\times 4}{1+}\cdots\cdots$$ دی ہے ۔

دائرہ کی تربیع کے مضمون کی تاریخ کا ایک دلچسپ تذکرہ انسائیکلوپیڈیا برٹینیکا اشاعت نہم میں مقالہ "Squaring of the circle" میں ملیگا ۔ نیز دیکھو گلیشیر کا مقالہ "On the quadrature of the circle 1580-1630" میسنجر آف میتھمائیکس جلد سوم میں ۔

مثلثی متماثلات

۲۵۵ — دفعہ ۱۹ مثال (۵) کی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مقدار ا، ب، ج، .... کی کسی تعداد کے درمیان کسی متماثل جبری رشتہ ف (ا، ب، ج، .....) = ۰ سے دو متناظر مثلثی متماثلات اخذ ہو سکتے ہیں

---

[1] دیکھو Proc. Royal Soc. vols. xxi. xxii

[2] Crelle's Journal, vol. x — نیز دیکھو سلوسٹر کا نوٹ Phil. Mag. ۱۸۶۹ء میں

(312) یہ اس طرح حاصل ہونگی کہ ا، ب، ج، ... کو ملتف قیمتیں
جم عہ + خر جیب عہ، جم بہ + خر جیب بہ، جم جہ + خر جیب جہ، ...
دیجائیں اور محصلہ تماثلہ کو شکل

ف (عہ، بہ، جہ، ...) + خر پہ (عہ، بہ، جہ، ...) = ۰

میں تحویل کیا جائے تو مثلثی تماثلات

فہ (عہ، بہ، جہ، ...) = ۰، پہ (عہ، بہ، جہ، ...) = ۰

حاصل ہونگی جنمیں عہ، بہ، جہ، ... کی جیوب اور جیوب التمام شامل ہونگی
تحویل کا کام بالعموم مختصر ہو سکتا ہے اگر جم عہ + خر جیب عہ،
جم بہ + خر جیب بہ، ... کی بجائے رمزی شکلیں قو^{خر عہ}، قو^{خر بہ}، قو^{خر جہ}، ...
استعمال کیجائیں۔

مثال

تماثلہ

(لا − ب)(لا − ج) / (ا − ب)(ا − ج) + (لا − ج)(لا − ا) / (ب − ج)(ب − ا) + (لا − ا)(لا − ب) / (ج − ا)(ج − ب) = ۱

سے تماثلہ ذیل اخذ کرو

جب۲(طہ − بہ) · [جب(طہ − بہ) جب(طہ − جہ)] / [جب(عہ − جہ) جب(عہ − بہ)] + جب۲(طہ − عہ) · [جب(طہ − جہ) جب(طہ − عہ)] / [جب(بہ − جہ) جب(بہ − عہ)]

+ جب۲(طہ − جہ) · [جب(طہ − عہ) جب(طہ − بہ)] / [جب(جہ − عہ) جب(جہ − بہ)] = ۰

فرض کرو لا = قو^{۲خر طہ}، ا = قو^{۲خر عہ}، ب = قو^{۲خر بہ}، ج = قو^{۲خر جہ} تو

(لا − ب)(لا − ج) / (ا − ب)(ا − ج) = (قو^{۲خر طہ} − قو^{۲خر بہ})(قو^{۲خر طہ} − قو^{۲خر جہ}) / (قو^{۲خر عہ} − قو^{۲خر بہ})(قو^{۲خر عہ} − قو^{۲خر جہ}) = {قو^{خر(طہ − بہ)} − قو^{−خر(طہ − بہ)}}{قو^{خر(طہ − جہ)} − قو^{−خر(طہ − جہ)}} / {قو^{خر(عہ − بہ)} − قو^{−خر(عہ − بہ)}}{قو^{خر(عہ − جہ)} − قو^{−خر(عہ − جہ)}}

× قو^{۲خر(طہ − عہ)}

$$\text{یا} = \frac{\text{جب}(\text{طہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{جہ})}{\text{جب}(\text{عہ}-\text{بہ})\,\text{جب}(\text{عہ}-\text{جہ})}\left\{\text{جم}\,۲(\text{طہ}-\text{عہ}) + \text{خ}\,\text{جب}\,۲(\text{طہ}-\text{عہ})\right\}$$

پس ہر کسر کو اس طریقہ پر مستعمل کرنے اور خ کے سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے ثابت شدنی نتائج حاصل ہوتی ہے ۔

سلسلوں کا جمع کرنا

۲۵۶ — جب کسی محدود یا غیر محدود سلسلہ

$$\text{ا}_۰ + \text{ا}_۱\,\text{لا} + \text{ا}_۲\,\text{لا}^۲ + \cdots\cdots$$

کا مجموعہ معلوم ہو تو سلسلوں

$$\text{ا}_۰\,\text{جم}\,\text{عہ} + \text{ا}_۱\,\text{لا}\,\text{جم}(\text{عہ}+\text{طہ}) + \text{ا}_۲\,\text{لا}^۲\,\text{جم}(\text{عہ}+۲\text{طہ}) + \cdots\cdots،$$

$$\text{ا}_۰\,\text{جب}\,\text{عہ} + \text{ا}_۱\,\text{لا}\,\text{جب}(\text{عہ}+\text{طہ}) + \text{ا}_۲\,\text{لا}^۲\,\text{جب}(\text{عہ}+۲\text{طہ}) + \cdots\cdots$$

کے مجموعے $\text{س}_۱$ اور $\text{س}_۲$ اخذ ہو سکتے ہیں ۔

$$\text{فرض کرو}\quad \text{ف}(\text{لا}) = \text{ا}_۰ + \text{ا}_۱\,\text{لا} + \text{ا}_۲\,\text{لا}^۲ + \cdots\cdots$$

$$\text{تو}\quad \text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{ف}(\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}) = \text{س}_۱ + \text{خ}\,\text{س}_۲$$

$$\text{اور نیز}\quad \text{قو}^{-\text{خ عہ}}\,\text{ف}(\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ طہ}}) = \text{س}_۱ - \text{خ}\,\text{س}_۲ \qquad (313)$$

$$\text{اسلئے}\quad \text{س}_۱ = \frac{۱}{۲}\left\{\text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{ف}(\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}) + \text{قو}^{-\text{خ عہ}}\,\text{ف}(\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ طہ}})\right\}$$

$$\text{اور}\quad \text{س}_۲ = \frac{۱}{۲\text{خ}}\left\{\text{قو}^{\text{خ عہ}}\,\text{ف}(\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ طہ}}) - \text{قو}^{-\text{خ عہ}}\,\text{ف}(\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ طہ}})\right\}$$

اس طرح س_1 اور س_2 کی جو قیمتیں حاصل ہوں اِن کو اب حقیقی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے -

مثالیں

(۱) جمع کرو سلسلہ

$$\text{جم}\,ع + \text{لا}\,\text{جم}(ع+ب) + \text{لا}^2\,\text{جم}(ع+2ب) + \cdots + \text{لا}^{ن-1}\,\text{جم}\{ع+(ن-1)ب\}$$

اب $\frac{1-\text{لا}^{ن}}{1-\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \text{لا}^2 + \cdots + \text{لا}^{ن-1}$

اِسمیں لا کو $\text{لا}\,\text{قو}^{خب}$ میں تبدیل کرو اور $\text{قو}^{خع}$ سے ضرب دو تو

$$\text{قو}^{خع}\,\frac{1-\text{لا}^{ن}\,\text{قو}^{خنب}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{خب}} = \text{قو}^{خع} + \text{لا}\,\text{قو}^{خ(ع+ب)} + \text{لا}^2\,\text{قو}^{خ(ع+2ب)} + \cdots$$

$$\cdots + \text{لا}^{ن-1}\,\text{قو}^{خ\{ع+(ن-1)ب\}}$$

اور اسی طرح

$$\text{قو}^{-خع}\,\frac{1-\text{لا}^{ن}\,\text{قو}^{-خنب}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{-خب}} = \text{قو}^{-خع} + \text{لا}\,\text{قو}^{-خ(ع+ب)} + \text{لا}^2\,\text{قو}^{-خ(ع+2ب)} + \cdots$$

$$\cdots + \text{لا}^{ن-1}\,\text{قو}^{-خ\{ع+(ن-1)ب\}}$$

اسلئے دئے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{2}\left\{\text{قو}^{خع}\,\frac{1-\text{لا}^{ن}\,\text{قو}^{خنب}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{خب}} + \text{قو}^{-خع}\,\frac{1-\text{لا}^{ن}\,\text{قو}^{-خنب}}{1-\text{لا}\,\text{قو}^{-خب}}\right\}$$

$$\text{یا}\quad \frac{1}{2}\;\frac{\text{تو}^{\text{خ عہ}}\left(\text{۱} - \text{لا}^{\text{ن}}\text{تو}^{\text{خ ن بہ}}\right)\left(\text{۱} - \text{لا تو}^{-\text{خ بہ}}\right) + \text{تو}^{-\text{خ عہ}}\left(\text{۱} - \text{لا}^{\text{ن}}\text{تو}^{-\text{خ ن بہ}}\right)\left(\text{۱} - \text{لا تو}^{\text{خ بہ}}\right)}{\left(\text{۱} - \text{لا تو}^{\text{خ بہ}}\right)\left(\text{۱} - \text{لا تو}^{-\text{خ بہ}}\right)}$$

$$\text{جو} = \frac{\text{جم عہ} - \text{لا جم}(\text{عہ} - \text{بہ}) - \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}(\text{عہ} + \text{ن بہ}) + \text{لا}^{\text{ن}+1}\,\text{جم}(\text{عہ} + \overline{\text{ن} - \text{۱}}\;\text{بہ})}{\text{۱} - \text{۲ لا جم بہ} + \text{لا}^{2}}$$

(۲) جمع کرو لاتناہی سلسلہ

$$\text{جیب عہ} + \text{لا جیب}(\text{عہ} + \text{بہ}) + \frac{\text{لا}^{2}\,\text{جیب}(\text{عہ} + \text{۲ بہ})}{\underline{|\text{۲}}} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جیب}(\text{عہ} + \text{ن بہ})}{\underline{|\text{ن}}}$$

$$\text{اب}\quad \text{تو}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{2}}{\underline{|\text{۲}}} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} + \cdots\cdots$$

اسمیں لا کی بجائے لا $\text{تو}^{\text{خ بہ}}$ رکھو اور $\text{تو}^{\text{خ عہ}}$ سے ضرب دو تو

$$\text{تو}^{\text{لا تو}^{\text{خ بہ}} + \text{خ عہ}} = \text{تو}^{\text{خ عہ}} + \text{لا تو}^{\text{خ}(\text{عہ} + \text{بہ})} + \frac{\text{لا}^{2}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{تو}^{\text{خ}(\text{عہ} + \text{۲ بہ})} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{تو}^{\text{خ}(\text{عہ} + \text{ن بہ})} + \cdots$$

اور اسی طرح

$$\text{تو}^{\text{لا تو}^{-\text{خ بہ}} - \text{خ عہ}} = \text{تو}^{-\text{خ عہ}} + \text{لا تو}^{-\text{خ}(\text{عہ} + \text{بہ})} + \frac{\text{لا}^{2}}{\underline{|\text{۲}}}\,\text{تو}^{-\text{خ}(\text{عہ} + \text{۲ بہ})} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{تو}^{-\text{خ}(\text{عہ} + \text{ن بہ})} + \cdots$$

پس دیئے ہوئے سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{1}{\text{۲خ}}\left\{\text{تو}^{\text{لا تو}^{\text{خ بہ}} + \text{خ عہ}} - \text{تو}^{\text{لا تو}^{-\text{خ بہ}} - \text{خ عہ}}\right\}$$

$$\text{یا}\quad \frac{1}{\text{۲خ}}\,\text{تو}^{\text{لا جم بہ}}\left\{\text{تو}^{\text{خ}(\text{لا جیب بہ} + \text{عہ})} - \text{تو}^{-\text{خ}(\text{لا جیب بہ} + \text{عہ})}\right\} \qquad (814)$$

$$\text{جو} = \text{تو}^{\text{لا جم بہ}}\;\text{جیب}(\text{عہ} + \text{لا جیب بہ})$$

۲۵۵ — اب ہم چند مثالیں دینگے جن سے یہ معلوم ہوگا کہ دائری تفاعلے قوت نمائی عملے کس طرح جملوں کو سلسلوں میں پھیلانے میں کام آتے ہیں۔

(۱) $(\text{۱}-\text{۲}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{طہ}+\text{لا}^{\text{۲}})^{-\text{۱}}$ کو لا کی قوتوں کے ایک سلسلے میں پھیلانا جہاں لا ایک سے کم ہے۔ اب

$$(\text{۱}-\text{۲}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{طہ}+\text{لا}^{\text{۲}})^{-\text{۱}}=(\text{۱}-\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{طہ}})^{-\text{۱}}(\text{۱}-\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{طہ}})^{-\text{۱}}$$

اسکو جزوی کسرات میں بیان کرنے سے وہ

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۲}\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{طہ}}\left(\frac{\text{قو}^{\text{خ}\,\text{طہ}}}{\text{۱}-\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{طہ}}}-\frac{\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{طہ}}}{\text{۱}-\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{طہ}}}\right)$$

اور ہر کسر کو لا کی قوتوں میں پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{طہ}}\left(\text{قو}^{\text{خ}\,\text{طہ}}+\text{لا}\,\text{قو}^{\text{۲}\,\text{خ}\,\text{طہ}}+\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{قو}^{\text{۳}\,\text{خ}\,\text{طہ}}+\cdots+\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{قو}^{\text{ن}\,\text{خ}\,\text{طہ}}+\cdots\right)$$

$$-\frac{\text{۱}}{\text{۲}\,\text{خ}\,\text{جب}\,\text{طہ}}\left(\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{طہ}}+\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{۲}\,\text{خ}\,\text{طہ}}+\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{قو}^{-\text{۳}\,\text{خ}\,\text{طہ}}+\cdots+\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{قو}^{-\text{ن}\,\text{خ}\,\text{طہ}}+\cdots\right)$$

جو $=\text{قم}\,\text{طہ}\,(\text{جب}\,\text{طہ}+\text{لا}\,\text{جب}\,\text{۲}\,\text{طہ}+\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{جب}\,\text{۳}\,\text{طہ}+\cdots+\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{جب}\,\text{ن}\,\text{طہ}+\cdots)$

اسی طرح یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱}-\text{۲}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{طہ}+\text{لا}^{\text{۲}}}=\text{۱}+\text{۲}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{طہ}+\text{۲}\,\text{لا}^{\text{۲}}\,\text{جم}\,\text{۲}\,\text{طہ}+\cdots+\text{۲}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{طہ}+\cdots$$

(۲) $\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{۲}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{طہ}+\text{لا}^{\text{۲}})$ کو لا کی قوتوں میں پھیلانا جہاں لا ایک سے کم ہے۔ چونکہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{۲}\,\text{لا}\,\text{جم}\,\text{طہ}+\text{لا}^{\text{۲}})=\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{لا}\,\text{قو}^{\text{خ}\,\text{طہ}})+\text{لوک}_{\text{و}}(\text{۱}+\text{لا}\,\text{قو}^{-\text{خ}\,\text{طہ}})$$

اسلئے بائیں جانب کے ہر لوکارتم کو پھیلانے سے دفعہ ۲۵ کا ضابطہ (۹) حاصل ہوتا ہے۔

(۳) $\text{و}^{\text{الا}}$ جب (ب لا + ج) کو پھیلانے کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں جملہ

$$\frac{1}{2\text{خ}}\left\{\text{و}^{\text{خج}} \times \text{و}^{(\text{ا}+\text{خب})\text{لا}} - \text{و}^{-\text{خج}} \times \text{و}^{(\text{ا}-\text{خب})\text{لا}}\right\}$$

اب اگر ہم $\text{و}^{(\text{ا}+\text{خب})\text{لا}}$ ، $\text{و}^{(\text{ا}-\text{خب})\text{لا}}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر ملتا ہے

$$\frac{1}{2\text{خ}}\;\frac{1}{\underline{|\text{ن}}}\left\{\text{و}^{\text{خج}}(\text{ا}+\text{خب})^{\text{ن}} - \text{و}^{-\text{خج}}(\text{ا}-\text{خب})^{\text{ن}}\right\}$$

فرض کرو کہ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ = مس عہ تو یہ جملہ ہو جاتا ہے

(315)

$$\frac{1}{2\text{خ}}\;\frac{1}{\underline{|\text{ن}}}\left(\text{ا}^2+\text{ب}^2\right)^{\frac{\text{ن}}{2}}\left\{\text{و}^{\text{خ}(\text{ج}+\text{ن عہ})} - \text{و}^{-\text{خ}(\text{ج}+\text{ن عہ})}\right\}$$

یا $\frac{1}{\underline{|\text{ن}}}\left(\text{ا}^2+\text{ب}^2\right)^{\frac{\text{ن}}{2}}$ جب (ج + ن عہ)

پس یہ جملہ مطلوبہ پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر ہے۔

(۴) اگر یہ دیا جائے کہ جب لا = ن جب (لا + عہ) تو لا کو ن کی قوتوں میں پھیلاؤ جہاں ن > ۱ ۔

چونکہ $\text{و}^{\text{خلا}} - \text{و}^{-\text{خلا}} = \text{ن}\left\{\text{و}^{\text{خ}(\text{لا}+\text{عہ})} - \text{و}^{-\text{خ}(\text{لا}+\text{عہ})}\right\}$

یا $\text{و}^{2\text{خلا}} - 1 = \text{ن}\,\text{و}^{-\text{خعہ}}\left\{\text{و}^{2\text{خ}(\text{لا}+\text{عہ})} - 1\right\}$

اسلئے $\text{قو}^{2\,\text{خ لا}} = \frac{1 - \text{ن}\,\text{قو}^{-\text{خ ع}}}{1 - \text{ن}\,\text{قو}^{\text{خ ع}}}$

لوکارتم لینے اور بائیں جانب کو پھیلانے سے

$$2\,\text{خ}(\text{لا} + \text{ک}\,\pi) = \text{ن}(\text{قو}^{\text{خ ع}} - \text{قو}^{-\text{خ ع}}) + \frac{\text{ن}^2}{2}(\text{قو}^{2\,\text{خ ع}} - \text{قو}^{-2\,\text{خ ع}}) + \dots$$

پس $\text{لا} + \text{ک}\,\pi = \text{ن جب ع} + \frac{1}{2}\text{ن}^2\,\text{جب}\,2\text{ع} + \frac{1}{3}\text{ن}^3\,\text{جب}\,3\text{ع} + \dots$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے۔

اگر ب، ایک مثلث کا زاویہ ہو اور ا سے کم ہو تو ہم ب کے دائری ناپ کو $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔ چونکہ

$$\text{جب ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{جب}(\text{ب} + \text{ج})$$

اسلئے $\text{ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{جب ج} + \frac{1}{2}\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\,\text{جب}\,2\text{ج} + \frac{1}{3}\frac{\text{ب}^3}{\text{ا}^3}\,\text{جب}\,3\text{ج} + \dots$

کیونکہ اس صورت میں ک = ۰.

پندرھویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ $\frac{1 + \text{ب ی}}{1 - 2\,\text{ی جم فہ} + \text{ی}^2}$ کے پھیلاؤ میں جبکہ اسکو ی کی قوتوں میں پھیلایا جائے عام رقم ہے

$$\frac{\text{جب}(\text{ن} + 1)\,\text{فہ} + \text{ب جب ن فہ}}{\text{جب فہ}}\,\text{ی}^{\text{ن}}$$

اور $\frac{ا + ب ی}{(۱ - ۲ ی جم فہ + ی^۲)^۲}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم ہے

$$\frac{(ن + ۳) \text{ جب } (ن + ۱) \text{ فہ} - (ن + ۱) \text{ جب } (ن + ۳) \text{ فہ}}{۴ \text{ جب}^۳ \text{ فہ}} \text{ ا ی}^ن$$

$$+ \frac{(ن + ۲) \text{ جب ن فہ} - ن \text{ جب } (ن + ۲) \text{ فہ}}{۴ \text{ جب}^۳ \text{ فہ}} \text{ ب ی}^ن$$

(یولر)

(316)

۲ ۔ اگر مس لا $= \frac{\text{ن جب عہ}}{\text{۱ - ن جم عہ}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا} = \text{ن جب عہ} + \frac{۱}{۲}\text{ن}^۲ \text{ جب ۲ عہ} + \frac{۱}{۳}\text{ن}^۳ \text{ جب ۳ عہ} + \ldots$$

جبکہ ن ایک سے کم ہے ۔

۳ ۔ اگر مم ما = مم لا + قم عہ قم لا تو ثابت کرو کہ

$$\text{ما} = \text{جب لا جب عہ} - \frac{۱}{۲}\text{جب ۲ لا جب}^۲\text{عہ} + \frac{۱}{۳}\text{جب ۳ لا جب}^۳\text{عہ} \ldots$$

۴ ۔ اگر مس $\frac{۱}{۲}$ طہ $= \left(\frac{۱ + ل}{۱ - ل}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ مس $\frac{۱}{۲}$ فہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \text{فہ} + ۲\text{ل جب فہ} + \frac{۲\text{ل}^۲}{۲}\text{جب ۲ فہ} + \frac{۲\text{ل}^۳}{۳}\text{جب ۳ فہ} + \ldots$$

جہاں $\text{ل} = \frac{ل}{۲} + ۱\left(\frac{ل}{۲}\right)^۳ + ۲\left(\frac{ل}{۲}\right)^۵ + ۵\left(\frac{ل}{۲}\right)^۷ + \ldots\ldots$

۵ ۔ اگر مس طہ = لا + مس عہ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = \text{عہ} + \text{لا جم}^۲\text{عہ} - \frac{۱}{۲}\text{لا}^۲\text{جم}^۲\text{عہ جب ۲ عہ} - \frac{۱}{۳}\text{لا}^۳\text{جم}^۳\text{عہ جم ۳ عہ}$$

$$+ \frac{۱}{۴}\text{لا}^۴\text{جم}^۴\text{عہ جب ۴ عہ} + \ldots$$

۶ — اگر (۱ + م) مس طہ = (۱ − م) مس فہ جبکہ طہ اور فہ مثبت حادہ زاویے ہوں تو ثابت کرو کہ

طہ = فہ − م جب ۲ فہ + $\frac{1}{2}$ م² جب ۴ فہ − $\frac{1}{3}$ م³ جب ۶ فہ + ...

۷ — اگر مس عہ = جم ۲ سہ مس لہ تو ثابت کرو کہ

لہ − عہ = مس² سہ جب ۲ عہ + $\frac{1}{2}$ مس⁴ سہ جب ۴ عہ + $\frac{1}{3}$ مس⁶ سہ جب ۶ عہ + ...

۸ — اگر جب لا = ن جم (لا + عہ) تو لا کو ن کی صعودی قوتوں میں پھیلاؤ۔

۹ — ثابت کرو کہ (۱ − ۲ لا جم طہ + لا²)^(−ن) کے پھیلاؤ میں لا^پ کا سر ہے

۲ { ا_پ جم پ طہ + ا_۱ ا_(پ−۱) جم (پ − ۲) طہ + ا_۲ ا_(پ−۲) جم (پ − ۴) طہ + ... }

جہاں ا_م، (۱ − لا)^(−ن) کے پھیلاؤ میں لا^م کا سر ہے۔

۱۰ — ثابت کرو کہ $\pi^2 = 18 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, n!}{(2n+2)!}$ (ن = ۰ سے ن = ∞ تک)

۱۱ — ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

لوک ج = لوک ا − (ب/ا) جم ج − (ب²/۲ا²) جم ۲ ج − (ب³/۳ا³) جم ۳ ج − .....

یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ب، ا سے کم ہے۔

۱۲ — اگر مساوات ا لا² + ب لا + ج = ۰ کی اصلیں خیالی ہوں تو ثابت کرو کہ (ا لا² + ب لا + ج)^(−۱) کے پھیلاؤ میں لا^ن کا سر ہے

ا^(ن/۲) جب (ن + ۱) طہ ÷ ج^(ن/۲ + ۱) جب طہ

جہاں طہ مساوات $\text{ب قط طہ} + ۲\sqrt{\text{اج}} = ۰$ سے حاصل ہوا ہے۔

۱۳ — اگر $\text{پ}^۲ = \dfrac{(۱+\text{ن})^۲ \text{جم}^۲\text{طہ} + (۱-\text{ن})^۲ \text{جب}^۲\text{طہ}}{(۱+\text{ن})^۲ \text{جم}^۲\text{طہ} + (۱-\text{ن})^۲ \text{جب}^۲\text{طہ}}$ تو $\text{لوک}_\text{و}$ پ کو طہ جفت ضعفوں کی جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

۱۴ — $\text{لوک}_\text{و}\ \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{۱}{۴}\pi\right)$ کو طہ کے ضعفوں کی جیوب اور جیوب التمام کے ایک سلسلہ میں پھیلاؤ۔

(317) ۱۵ — ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{۴} = \frac{۱۷}{۲۱} - \frac{۱۳۷}{۸۱\times۳۴۳} + \dots + \frac{(-۱)^{\text{ن}+۱}}{۲\text{ن}-۱}\left\{\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{۹}\right)^{\text{ن}-۱} + \frac{۱}{۷^{۲\text{ن}-۱}}\right\} + \dots\dots$

۱۶ — ثابت کرو کہ $۱ - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۱۷} - \frac{۱}{۲۳} + \frac{۱}{۲۵} - \dots = \frac{(\sqrt{۲}+۱)\pi}{۸}\dots$

۱۷ — $(\sqrt{-۱})^{\sqrt{-۱}}$ کی سب قیمتیں معلوم کرو۔

۱۸ — ثابت کرو کہ $(۱ + \sqrt{-۱}\ \text{مس فہ})\ \text{لوک}_\text{و}(\text{ا قط فہ}) - \text{فہ}\sqrt{-۱}$ ایک حقیقی عدد ہے اور اسکی قیمت معلوم کرو۔

۱۹ — اگر $\text{ا جم طہ} + \text{ب جب طہ} = \text{ج}$ جہاں $\text{ج} > \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{طہ} = (۲\text{ن}+۱)\frac{\pi}{۲} + \text{خ}\ \text{لوک}_\text{و}\frac{\text{ج} + \sqrt{\text{ج}^۲ - \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲}}{\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}} - \text{مس}^{-۱}\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

۲۰ — $\text{لا}^\text{ن} + ۱$ کے اس جملہ سے جو اجزائے ضربی میں ہے یہ اخذ کرو کہ جب ن

جفت ہو تو

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ن طہ}}{1+\text{جم ن طہ}}=\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ۲طہ}-2\,\text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب طہ}}{1+\text{جم ۲طہ}-2\,\text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جم طہ}}$$

$$+\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب ۲ طہ}-2\,\text{جم}\frac{3\pi}{\text{ن}}\,\text{جب طہ}}{1+\text{جم ۲ طہ}-2\,\text{جم}\frac{3\pi}{\text{ن}}\,\text{جم طہ}}+\ldots\ldots$$

۲۱ — مماثل $\frac{1}{\text{لا}-\text{ا}}-\frac{1}{\text{لا}-\text{ب}}=\frac{\text{ا}-\text{ب}}{(\text{لا}-\text{ا})(\text{لا}-\text{ب})}$ سے اخذ کرو

$$\text{جم}(\text{طہ}+\text{عہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{یہ})-\text{جم}(\text{طہ}+\text{یہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{عہ})=\text{جب}(\text{عہ}-\text{یہ})\,\text{جم ۲طہ}،$$

$$\text{جب}(\text{طہ}+\text{عہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{یہ})-\text{جب}(\text{طہ}+\text{یہ})\,\text{جب}(\text{طہ}-\text{عہ})=\text{جب}(\text{عہ}-\text{یہ})\,\text{جب ۲طہ}$$

۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مس}^{-1}\text{عہ}}{\text{عہ}}+\frac{\text{مس}^{-1}\text{بہ}}{\text{بہ}}+\frac{\text{مس}^{-1}\text{جہ}}{\text{جہ}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{لوک}\,\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=3\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{14}-\frac{1}{13}+\frac{1}{25}-\ldots\ldots\right)$$

جہاں عہ، بہ، جہ اکائی کے تین جذر الکعب ہیں۔

۲۳ — اساس ا + ب خ پر ج + د خ کے لوکارتموں کو شکل (ا + ب خ) میں بیان کرو۔

۲۴ — اگر $\text{مس}^{-1}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\text{بہ}\right)=\text{مس}^{\text{ن}}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\text{فہ}\right)$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{م}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب بہ}}{\text{خ}}=\text{ن}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{جب فہ}}{\text{خ}}$$

۲۵ — کسی مثلث میں ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ب}+\text{ب}^{\text{ن}}\,\text{جم ن ا}=\text{ج}^{\text{ن}}-\text{ن ا ب ج}^{\text{ن}-2}\,\text{جم}(\text{ا}-\text{ب})$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-3)}{\lfloor 2}\,\text{ا}^2\,\text{ب}^2\,\text{ج}^{\text{ن}-4}\,\text{جم}\,2(\text{ا}-\text{ب})-\ldots\ldots$$

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۶ ۔ اگر $\text{لوک}_{\text{و}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{لوک}_{\text{و}} (\text{عہ} + \text{خ بہ}) = \text{ف} + \text{خ ق}$

تو $\text{و}^{\text{و}^{\text{ف}}\ \text{جم ق}}\ \text{جم} (\text{و}^{\text{ف}}\ \text{جب ق}) = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}_{\text{و}} (\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲})$ ،

اور $\text{و}^{\text{و}^{\text{ف}}\ \text{جب ق}} \times \text{جب} (\text{و}^{\text{ف}}\ \text{جب ق}) = \text{مس}^{-۱} \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$

(18) **۲۷** ۔ اگر $\text{و}^{\text{لا}}\ \text{جم لا}$ کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جائے تو ثابت کرو کہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر $\frac{۲^{\frac{\text{ن}}{۲}}}{\lfloor \text{ن}} \ \text{جم} \frac{\text{ن} \pi}{۴}$ ہے۔

۲۸ ۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{(۱ + \text{و جم طہ})^{۲}} = \text{قط}^{۳}\, ۲\text{لہ} + \ldots + (-۱)^{\text{ن}}\, ۲\, \text{قط}^{۳}\, ۲\text{لہ}\, \text{مس}^{\text{ن}}\, \text{لہ} (۱ + \text{ن جم } ۲\text{لہ})\, \text{جم ن طہ} + \ldots$$

جہاں ۲ لہ، $\text{جب}^{-۱}$ و کی کم سے کم مثبت قیمت ہے۔

۲۹ ۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۱}{۱ \times ۳ \times ۵ \ldots (۲\text{م} + ۱)} - \frac{۱}{۳ \times ۵ \times ۷ \ldots (۲\text{م} + ۳)} + \ldots \infty \text{ تک}$$

کو شکل $\frac{\text{ا}_{\text{م}} \pi + \text{ب}_{\text{م}}}{\text{ج}_{\text{م}}}$ میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں $\text{ا}_{\text{م}}$، $\text{ب}_{\text{م}}$، $\text{ج}_{\text{م}}$ صحیح عدد ہیں اور

$\text{ا}_{\text{م}} = ۱ \times ۳ \times ۵ \ldots (۲\text{م} - ۱)$ ، $\text{ج}_{\text{م}} = \frac{\lfloor ۲\text{م}}{۲^{\text{م} - ۲}}$

$\text{ب}_{\text{م}} = (۲\text{م} - ۱)\, \text{ب}_{\text{م}-۱} - ۲ \lfloor (\text{م} - ۱)$

۳۰ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^{\text{ن}}\, \text{طہ جم ن فہ} = \text{جب}^{\text{ن}}\, \text{فہ جم ن طہ} + \text{ن جب}^{\text{ن}-۱}\, \text{فہ جم} (\text{ن} - ۱)\, \text{فہ جب} (\text{طہ} - \text{فہ}) \ldots$$

$+ \frac{ن(ن-۱)}{\lfloor ۲}$ جب$^{ن-۲}$ قہ جم (ن-۲) طہ جب^{۲} (طہ - قہ) + ... + جب^{ن} (طہ - قہ)

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۳۱ — ثابت کرو کہ متماثلہ

$$\sum \frac{جم ۲ عہ}{جب \frac{۱}{۲}(عہ - بہ) جب \frac{۱}{۲}(عہ - جہ) جب \frac{۱}{۲}(عہ - ضہ)} = ۸ جب \frac{۱}{۲}(عہ + بہ + جہ + ضہ)$$

۳۲ — ثابت کرو کہ $۱ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \dots = \frac{\pi}{۲\sqrt{۲}}$

۳۳ — مس$^{-۱}$ (جم طہ + خ جب طہ) کو شکل ا + خ ب میں تحویل کرو اور اسلئے ثابت کرو کہ

$$جم طہ - \frac{۱}{۳} جم ۳ طہ + \frac{۱}{۵} جم ۵ طہ - \dots = \pm \frac{\pi}{۴}$$

جہاں اوپر کی یا نیچے کی علامت لینی چاہئے بموجب اسکے کہ جم طہ مثبت ہے یا منفی۔

۳۴ — ثابت کرو کہ لوک$_{و}$ (۱ + جم ۲ طہ + خ جب ۲ طہ) کی ایک قیمت لوک$_{و}$ (۲ جم طہ) + خ طہ ہے جبکہ طہ، $-\frac{۱}{۲}\pi$ اور $\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہے۔ گریگوری کا سلسلہ اخذ کرو۔

ثابت کرو کہ جب$^{-۱}$ (جم طہ + خ جب طہ) کی ایک قیمت ہے

$$جم^{-۱}\sqrt{جب طہ} + خ لوک_{و} (\sqrt{۱ + جب طہ} \pm \sqrt{جب طہ})$$

جبکہ طہ، صفر اور $\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہو۔

۳۵ — سلسلہ $\sum$ لن قو$^{(۲ن + ۱)}$ جب (۲ ن + ۱) ا کا مجموعہ معلوم کرو جہاں

$$لن = \frac{۲}{۲ن + ۱} - \frac{۱}{۲ن - ۱} - \frac{۱}{۲ن + ۳}$$

(319)

۳۶ — کسی مثلث میں اگر ا < ج تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم ن ا}}{\text{ب}^{\text{ن}}} = \frac{1}{\text{ج}^{\text{ن}}}\Big\{1 + \text{ن}\frac{\text{ا}}{\text{ج}}\,\text{جم ب} + \frac{\text{ن(ن}+1)}{|\underline{2}}\frac{\text{ا}^2}{\text{ج}^2}\,\text{جم ۲ب}$$

$$+ \frac{\text{ن(ن}+1)(\text{ن}+2)}{|\underline{3}}\frac{\text{ا}^3}{\text{ج}^3}\,\text{جم ۳ب} + \cdots\Big\}$$

۳۷ — ثابت کرو کہ

$$(\text{مس}^{-1}\,\text{لا})^2 = \text{لا}^2 - \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{3}\Big)\text{لا}^4 + \frac{1}{3}\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\Big)\text{لا}^6 - \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{\text{ن}-1}}{\text{ن}}\Big(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\text{ن}-1}\Big)\text{لا}^{2\text{ن}} + \cdots$$

جہاں لا، ±۱ کے درمیان واقع ہے۔

۳۸ — اگر $\text{ع} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{مس}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\text{لا}\Big) = \text{لا} + \text{ا}_3\,\text{لا}^3 + \text{ا}_5\,\text{لا}^5 + \cdots$

تو ثابت کرو کہ $\text{لا} = \text{ع} - \text{ا}_3\,\text{ع}^3 + \text{ا}_5\,\text{ع}^5 - \cdots$

۳۹ — $\text{مس}\Big\{\text{خرج لوک}_{\text{و}}\frac{\text{ا} - \text{خ ب}}{\text{ا} + \text{خ ب}}\Big\}$ کو منطق بناؤ۔

۴۰ — ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم لا}}{|\underline{\text{ن}-1}\;|\underline{\text{ن}+1}} + \frac{\text{جم ۲لا}}{|\underline{\text{ن}-2}\;|\underline{\text{ن}+2}} + \cdots + \frac{\text{جم ن لا}}{|\underline{2\text{ن}}}$$

$$= \frac{2^{\text{ن}-1}(1+\text{جم لا})^{\text{ن}}}{|\underline{2\text{ن}}} - \frac{1}{2(|\underline{\text{ن}})^2}$$

۴۱ — اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو اور

$$س = ۱ + ن جم^{۲} ط + \dots + \frac{\lfloor ن + ر - ۲}{\lfloor ن - ۱ \lfloor ر - ۱} جم^{ر-۱} ط جم (ر - ۱) ط + \dots$$

تو ثابت کرو کہ

$$۲ س جب^{ن} ط = \{۱ + (-۱)^{ن}\} (-۱)^{\frac{۱}{۲}ن} جم ن ط + \{۱ - (-۱)^{ن}\} (-۱)^{\frac{۱}{۲}(ن-۱)} جب ن ط$$

۴۲ ــ ثابت کرو کہ مس مس مس... بس لا (ن ماسوں تک) کا پھیلاؤ ہے

$$لا + ۲ن \frac{لا^{۳}}{\lfloor ۳} + ۴ن (۵ن - ۱) \frac{لا^{۵}}{\lfloor ۵} + \frac{۸ن}{۳} (۱۷۵ ن^{۲} - ۸۴ن + ۱۱) \frac{لا^{۷}}{\lfloor ۷} + \dots$$

۴۳ ــ اگر مس $(\frac{۱}{۴} عہ - فہ) = مس^{۳} \frac{۱}{۴} عہ$ تو ثابت کرو کہ

$$فہ = \frac{۱}{۱ \times ۳} جب عہ - \frac{۱}{۲ \times ۳^{۲}} جب ۲ عہ + \frac{۱}{۳ \times ۳^{۳}} جب ۳ عہ - \dots$$

۴۴ ــ اگر مس ط $<$ ۱ تو ثابت کرو کہ

$$مس^{۲} ط - \frac{۱}{۲} مس^{۴} ط + \frac{۱}{۳} مس^{۶} ط - \dots = جب^{۲} ط + \frac{۱}{۲} جب^{۴} ط + \frac{۱}{۳} جب^{۶} ط + \dots$$

۴۵ ــ ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{ن (ن - ۱) (ن - ۲)}{\lfloor ۳} + \frac{ن (ن - ۱) (ن - ۲) (ن - ۳) (ن - ۴) (ن - ۵)}{\lfloor ۶} + \dots$$

$$= \frac{۱}{۳} \{۲^{ن} + (-۱)^{ن} \times ۲ جم \frac{ن \pi}{۳}\}$$

۴۶ ــ ثابت کرو کہ مساواتیں

$$لا^{۲} جب ۲عہ + ما^{۲} جب ۲بہ + ی^{۲} جب ۲جہ - ۲ ما ی جب (بہ + جہ) - ۲ ی لا جب (جہ + عہ)$$
$$- ۲ لا ما جب (عہ + بہ) = ۰،$$

$$لا^{۲} جم ۲عہ + ما^{۲} جم ۲بہ + ی^{۲} جم ۲جہ - ۲ ما ی جم (بہ + جہ) - ۲ ی لا جم (جہ + عہ)$$
$$- ۲ لا ما جم (عہ + بہ) = ۰،$$

حسب ذیل قیمتوں کے جیٹوں میں سے کسی سے پوری ہوتی ہیں :-

لا : ما : ی = جب^{2} $\frac{1}{2}$ (بہ − جہ) : جب^{2} $\frac{1}{2}$ (جہ − عہ) : جب^{2} $\frac{1}{2}$ (عہ − بہ)

یا　= جب^{2} $\frac{1}{2}$ (بہ − جہ) : جم^{2} $\frac{1}{2}$ (جہ − عہ) : جم^{2} $\frac{1}{2}$ (عہ − بہ)

یا　= جم^{2} $\frac{1}{2}$ (بہ − جہ) : جب^{2} $\frac{1}{2}$ (جہ − عہ) : جم^{2} $\frac{1}{2}$ (عہ − بہ)

یا　= جم^{2} $\frac{1}{2}$ (بہ − جہ) : جم^{2} $\frac{1}{2}$ (جہ − عہ) : جب^{2} $\frac{1}{2}$ (عہ − بہ)

(320)

۴۷ — اگر طہ کی مختلف قیمتیں طہ$_{1}$، طہ$_{2}$، طہ$_{3}$، طہ$_{4}$ ہوں جو مساوات

ا جم ۲ طہ + ب جب ۲ طہ + ج جم طہ + د جب طہ + ع = ۰

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ

ا / جم س = ب / جب س = − ج / (۲ جم (س − طہ)) = − د / (۲ جب (س − طہ)) = ع / (۲ جم $\frac{1}{2}$ (طہ$_{1}$ + طہ$_{2}$ − طہ$_{3}$ − طہ$_{4}$))

جہاں ۲ س = طہ$_{1}$ + طہ$_{2}$ + طہ$_{3}$ + طہ$_{4}$

۴۸ — ثابت کرو کہ

(−۱)$^{\frac{1}{2}ن}$ مس^{ن} طہ = ۱ − ن قط طہ جم طہ + $\frac{ن(ن-۲)}{|۲}$ قط^{2} طہ جم ۲ طہ − ... ، (ن جفت)

(−۱)$^{\frac{1}{2}(ن-۱)}$ مس^{ن} طہ = ن قط طہ جب طہ − $\frac{ن(ن-۱)}{|۲}$ قط^{2} طہ جب ۲ طہ + ... ، (ن طاق)

۴۹ — اگر جب$^{-1}$ لا = ا$_{1}$ لا + ا$_{3}$ لا^{3} + ... تو ثابت کرو کہ سلسلہ

ا$_{3}$ لا^{3} + ا$_{9}$ لا^{9} + ا$_{15}$ لا^{15} + ...

کا مجموعہ　$\frac{1}{2}$ {جم$^{-1}$ ($\sqrt{۱ + لا^{2} + لا^{4}}$ − لا^{2}) + جب$^{-1}$ لا}　ہے۔

۵۰ — اگر مساوات لا^{ن} + ب$_{1}$ لا$^{ن-1}$ + ب$_{2}$ لا$^{ن-2}$ + ... + ب$_{ن}$ = ۰ کی اصلیں عہ، بہ، جہ، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

مس^{-۱} (عہ جب طہ)/(عہ جم طہ - لا) + مس^{-۱} (بہ جب طہ)/(بہ جم طہ - لا) + ...

= مس^{-۱} (ب۱ جب طہ × لا^{ن-۱} + ب۲ جب ۲طہ × لا^{ن-۲} + ... + بن جب ن طہ)/(لا^ن + ب۱ جم طہ × لا^{ن-۱} + ب۲ جم ۲طہ × لا^{ن-۲} + ... + بن جم ن طہ)

۵۱ — اگر (۱ - ج) مس طہ = (۱ + ج) مس فہ تو سلسلوں

ج جب ۲طہ - ½ ج^۲ جب ۴طہ + ⅓ ج^۳ جب ۶طہ - ....

ج جب ۲فہ + ½ ج^۲ جب ۴فہ + ⅓ ج^۳ جب ۶فہ + ...

میں سے ہر ایک طہ - فہ کے مساوی ہے جہاں طہ اور فہ ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں اور ج < ۱ -

۵۲ — ثابت کرو کہ

جم ⅓ π + ½ جم ⅔ π + ⅓ جم ۳/۳ π + ... ∞ تک = ۰

۵۳ — ثابت کرو کہ سلسلہ

جم لا + ۱/(۲×۳) جم ۳لا + (۱×۳)/(۲×۴×۵) جم ۵لا + (۱×۳×۵)/(۲×۴×۶×۷) جم ۷لا + ...

حسب ذیل قیمتیں اختیار کرتا ہے

(۱) جب^{-۱}(جم ½ لا - جب ½ لا)، جبکہ π > لا > ۰ -

(۲) - جب^{-۱}(جم ½ لا + جب ½ لا)، جبکہ ۲π > لا > π

۵۴ — اگر ج = جم^۲ طہ - ⅓ جم^۳ طہ جم ۳طہ + ⅕ جم^۵ طہ جم ۵طہ - ....

تو ثابت کرو کہ مس ۲ج = ۲ جم^۲ طہ

۵۵ — ثابت کرو کہ

قو^{عہ جم بہ} جب(عہ جب بہ) + قو^{عہ جم ۲بہ} جب(عہ جب ۲بہ) + ... قو^{عہ جم (ن-۱)بہ} جب{عہ جب (ن-۱)بہ} = ۰

اگر بہ = ۲π/ن -

۵۶ — ثابت کرو کہ

$$\text{جب طہ} \times \text{جب طہ} - \tfrac{1}{2}\,\text{جب ۲طہ جب}^2\text{طہ} + \tfrac{1}{3}\,\text{جب ۳طہ جب}^3\text{طہ} - \dots$$

$$= \text{مم}^{-1}\left(1 + \text{مم طہ} + \text{مم}^2\text{طہ}\right)$$

(320)

۵۷ — ثابت کرو کہ

$$\text{لوک}\left(\text{قم}\ \text{ل}\right) = \dots\ \text{جم}^2\text{ل} - \tfrac{1}{2}\,\text{جب}^2\,\text{۲ل} + \tfrac{1}{3}\,\text{جم}^2\,\text{۳ل} - \tfrac{1}{4}\,\text{جب}^2\,\text{۴ل} + \dots$$

۵۸ — ثابت کرو کہ

$$\text{جم}^{-1}(1-\text{ل}) = \sqrt{2\text{ل}}\left\{1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left(\frac{\text{ل}}{2}\right) + \dots + \frac{1}{2\text{ن}+1}\,\frac{1\times3\times5\dots(2\text{ن}-1)}{2\times4\times6\dots2\text{ن}}\left(\frac{\text{ل}}{2}\right)^{\text{ن}} + \dots\dots\right\}$$

۵۹ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - \frac{1}{2}\,\text{جم طہ} + \frac{1\times3}{2\times4}\,\text{جم ۲طہ} - \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\,\text{جم ۳طہ} + \dots$$ کا مجموعہ $$\frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}}{\sqrt{2\,\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طہ}}}$$

ہے جہاں طہ، $\pm\pi$ کے درمیان واقع ہے۔

امثلہ ذیل کے لا انتہائی سلسلوں کا مجموعہ معلوم کرو:—

۶۰ — $\text{جم طہ} - \frac{1}{3}\,\text{جم ۳طہ} + \frac{1}{5}\,\text{جم ۵طہ} - \dots\dots$

۶۱ — $1 - \frac{\text{جم ۲طہ}}{|2} + \frac{\text{جم ۴طہ}}{|4} - \dots\dots\dots\dots$

۶۲ — $\text{جم طہ} + \frac{\text{جم طہ}}{|1}\,\text{جم ۲طہ} + \frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{|2}\,\text{جم ۳طہ} + \dots\dots$

۶۳ — $\text{جم طہ جم ۲طہ} + \text{جم ۲طہ جم ۳طہ} + \frac{1}{|2}\,\text{جم ۳طہ جم ۴طہ}$

$+ \frac{1}{|3}\,\text{جم ۴طہ جم ۵طہ} + \dots$

۶۴- جب طہ − (۱/۳!) جب ۳ طہ + (۱/۵!) جب ۵ طہ − ......

۶۵- جم طہ / (۱×۲×۳) + جم ۲ طہ / (۲×۳×۴) + جم ۳ طہ / (۳×۴×۵) + ...

۶۶- جم عہ + جم(عہ + ۲ بہ) / ۳! + جم(عہ + ۴ بہ) / ۵! + ...

۶۷- جم طہ جم فہ − (۱/۲) جم ۲ طہ جم ۲ فہ + (۱/۳) جم ۳ طہ جم ۳ فہ − ....

۶۸- مس عہ جب ۲ لا + مس² عہ جب ۳ لا / ۲! + مس³ عہ جب ۴ لا / ۳! + ...

۶۹- ۱ + و^(جم طہ) جم(جب طہ) + و^(۲ جم طہ) / ۲! جم(۲ جب طہ) + و^(۳ جم عہ) / ۳! جم(۳ جب طہ) + ...

۷۰- جب طہ × جب طہ − (۱/۲) جب² طہ × جب ۲ طہ + (۱/۳) جب³ طہ
× جب ۳ طہ − .....

۷۱- م جب¹ عہ − (۱/۲) م² جب² ۲ عہ + (۱/۳) م³ جب³ ۳ عہ − ..... ، جہاں
م > ۱ −

(322)

سولھواں باب

زائدی تفاعلات

۲۵۸ — زائدی جیب التمام، جیب، مماس، ... کی تعریف پندرہویں باب میں مساواتوں

جمز ع = $\frac{1}{2}$ (فوع + فو⁻ع)، جبز ع = $\frac{1}{2}$ (فوع - فو⁻ع)، مسز ع = جبز ع \ جمز ع،

ممز ع = ۱ \ مسز ع، قطز ع = ۱ \ جمز ع، قمز ع = ۱ \ جبز ع

کے ذریعہ ہو چکی ہے جہاں قوت نما فوع، فو⁻ع اپنی صدر قیمتیں رکھتے ہیں۔ یہ زائدی تفاعل، خ ع کے دائری تفاعلوں کی رقوم میں حسب ذیل مساواتوں کے ذریعہ بیان ہوتے ہیں :—

جمز ع = جم خ ع، جبز ع = - خ جب خ ع، مسز ع = - خ مس خ ع،

ممز ع = خ مم خ ع، قطز ع = قط خ ع، قمز ع = خ قم خ ع

زائدی تفاعلوں کے درمیان رشتے

۲۵۹ — زائدی تفاعلوں کے درمیان حسب ذیل رشتے تعریفوں سے فوراً حاصل ہوتے ہیں :—

جمز² ع - جبز² ع = ۱، . . . . (۱)

جمع کے ضابطے

۲۶۰ — چونکہ جمز (ع ± و) = جم خ (ع ± و) = جم خ ع جم خ و ∓ جب خ ع جب خ و

پس جمز (ع ± و) = جمز ع جمز و ± جبز ع جبز و، ...... (۴)

اسی طرح جبز (ع ± و) = جبز ع جمز و ± جمز ع جبز و، ...... (۵)

یہ زائدی جیب التمام اور جیب کے لئے جمع کے ضابطے ہیں، بلا شبہ انکی تصدیق ان تفاعلوں کی قوت نما قیمتوں کو درج کرنے سے ہو سکتی ہے۔

(۴) اور (۵) سے ہم اخذ کرتے ہیں

مسز (ع ± و) = (مسز ع ± مسز و) / (۱ ± مسز ع مسز و)، .... (۶)

ممز (ع ± و) = (ممز ع ممز و ± ۱) / (ممز و ± ممز ع)، .... (۷)

۲۶۱ — چونکہ جبز (ع + و) + جبز (ع − و) = ۲ جبز ع جمز و،

جبز (ع + و) − جبز (ع − و) = ۲ جمز ع جبز و،

جمز (ع + و) + جمز (ع − و) = ۲ جمز ع جمز و،

اور جمز (ع + و) − جمز (ع − و) = ۲ جبز ع جبز و،

اسلئے ع، و کو علی الترتیب ½ (ع + و)، ½ (ع − و) میں بدلنے سے (324)

حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

جبز ع + جبز و = ۲ جبز ½ (ع + و) جمز ½ (ع − و)،
جبز ع − جبز و = ۲ جمز ½ (ع + و) جبز ½ (ع − و)،
جمز ع + جمز و = ۲ جمز ½ (ع + و) جمز ½ (ع − و)،
جمز ع − جمز و = ۲ جبز ½ (ع + و) جبز ½ (ع − و)، ... (۸)

یہ ضابطے دو زائدی جیوب یا جیوب التمام کو جمع کرنے یا تفریق کرنے کیلئے ہیں۔

ضعفوں یا تحت ضعفوں کیلئے ضابطے

۲۶۲ — دائری تفاعلوں کے ضابطوں کے جواب میں ضعفوں یا تحت ضعفوں کے زائدی تفاعلوں کے درمیان مماثل رشتے ضابطہ (۵) (۶)، اور (۸) سے اخذ کئے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ

$$\text{جبز}\,۲ع = ۲\,\text{جبز}ع\,\text{جمز}ع ،$$

$$\text{جمز}\,۲ع = \text{جمز}^{۲}ع + \text{جبز}^{۲}ع = ۲\,\text{جمز}^{۲}ع - ۱ = ۱ + ۲\,\text{جبز}^{۲}ع ،$$

$$\text{مسز}\,۲ع = \frac{۲\,\text{مسز}ع}{۱ + \text{مسز}^{۲}ع} ، \quad \text{جبز}\,۳ع = ۳\,\text{جبز}ع + ۴\,\text{جبز}^{۳}ع ،$$

$$\text{جمز}\,۳ع = ۴\,\text{جمز}^{۳}ع - ۳\,\text{جمز}ع ،$$

$$\text{مسز}\,۳ع = \frac{۳\,\text{مسز}ع + \text{مسز}^{۳}ع}{۱ + ۳\,\text{مسز}^{۲}ع} ، \quad \text{جمز}\,\tfrac{۱}{۲}ع = \sqrt{\frac{۱ + \text{جمز}ع}{۲}} ،$$

$$\text{جبز}\,\tfrac{۱}{۲}ع = \sqrt{\frac{\text{جمز}ع - ۱}{۲}} ، \quad \text{مسز}\,\tfrac{۱}{۲}ع = \sqrt{\frac{\text{جمز}ع - ۱}{\text{جمز}ع + ۱}} = \frac{\text{جبز}ع}{۱ + \text{جمز}ع}$$

زائدی تفاعلوں کے لئے سلسلے

۲۶۳ — چونکہ $ق^{ع} = \text{جمز}ع + \text{جبز}ع$ ، $ق^{-ع} = \text{جمز}ع - \text{جبز}ع$
اس لئے جمزع، جبزع کے لئے سلسلے، ع کی قوتوں میں، یہ ہیں

$$\text{جمز}ع = ۱ + \frac{ع^{۲}}{\boxed{۲}} + \frac{ع^{۴}}{\boxed{۴}} + \ldots ، \quad \text{جبز}ع = ع + \frac{ع^{۳}}{\boxed{۳}} + \frac{ع^{۵}}{\boxed{۵}} + \ldots$$

دفعہ ۲۳۲ کے مطابق ہم دیکھتے ہیں کہ جمزع = ۱ + ب، جبزع = ع + س

جہاں

$$|ا ب| < \frac{1}{۲} |ا ۶ ا|^{۲} \text{ و } {}^{ا۶ا} ، \quad |اس| < \frac{۱}{۶} |ا ۶ ا|^{۳} \text{ و } {}^{ا۶ا}$$

نیز (جمز ۶ ± جبز ۶)^{م} کی صدر قیمت ہمیشہ ہے

(385)

$$\text{جمز م ۶ ± جبز م ۶}$$

خواہ م کچھ ہی ہو، یہ دائری تفاعلوں کے لئے ڈیموائر کے مسئلہ کا جواب ہے۔ ہم اس مسئلہ کو بیان کر سکتے ہیں اس طرح

$$\text{جمز م ۶} = \frac{۱}{۲}\left\{(\text{جمز ۶} + \text{جبز ۶})^{م} + (\text{جمز ۶} - \text{جبز ۶})^{م}\right\} ،$$

$$\text{جبز م ۶} = \frac{۱}{۲}\left\{(\text{جمز ۶} + \text{جبز ۶})^{م} - (\text{جمز ۶} - \text{جبز ۶})^{م}\right\}$$

۲۶۴ — اِن آخری جملوں سے پھیلاؤ کے ذریعہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جبز م ۶} = \text{م جمز}^{م-۱} \text{۶ جبز ۶} + \frac{\text{م(م-۱)(م-۲)}}{|۳} \text{جمز}^{م-۳} \text{۶ جبز}^{۳} \text{۶} + \ldots ،$$

$$\text{جمز م ۶} = \text{جمز}^{م} \text{۶} + \frac{\text{م(م-۱)}}{|۲} \text{جمز}^{م-۲} \text{جمز}^{۲} \text{۶} + \frac{\text{م(م-۱)(م-۲)(م-۳)}}{|۴} \text{جمز}^{م-۴} \text{۶} \times \text{جبز}^{۴} \text{۶} + \ldots\ldots$$

دائری تفاعلوں کی صورت کی مانند ان سلسلوں سے جبز م ع، جمز م ۶ کے پھیلاؤ، جبز ع کی قوتوں میں حاصل کئے جا سکتے ہیں: لیکن مختلف سروں کو اکٹھا کرنے کے کام کو دہرانا غیر ضروری ہے کیونکہ ہم دفعہ ۲۱۴ چودھویں باب کے ضابطہ میں طہ کی بجائے خ ۶ درج کر کے نتیجہ کو فوراً حاصل کر سکتے ہیں۔ چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{جبز م ۶} = \text{م جبز ۶} + \frac{\text{م(م}^{۲}\text{-۱)}}{|۳} \text{جبز}^{۳}\text{۶} + \frac{\text{م(م}^{۲}\text{-۱)(م}^{۲}\text{-۳}^{۲}\text{)}}{|۵} \text{جبز}^{۵}\text{۶} + \ldots ،$$

$$\text{جمزم}\,\theta = 1 + \frac{م^2}{\lfloor 2}\,\text{جیز}^2\theta + \frac{م^2(م^2-2^2)}{\lfloor 4}\,\text{جیز}^4\theta + \ldots$$

یہ سلسلے م کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں بشرطیکہ وہ مستدق ہوں جو ہونگے اگر جیز $\theta \leqslant 1$۔ اگر جیز $\theta = 1$ رکھا جائے تو

$$\theta = \text{لوک}\,(1+\sqrt{2})$$

۲۶۵ — جیز θ کے سلسلہ سے θ کے لئے ایک سلسلہ جیز θ کی قوتوں میں ماخوذ ہوتا ہے جیسا کہ دائری تفاعلوں کی صورت میں دفعہ کیلئے اخذ کیا گیا تھا۔ چنانچہ م کی پہلی قوتوں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\theta = \text{جیز}\,\theta - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\,\text{جیز}^3\theta + \frac{3\times1}{4\times2}\times\frac{1}{5}\,\text{جیز}^5\theta - \frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}\times\frac{1}{7}\,\text{جیز}^7\theta + \ldots$$

یہ سلسلہ مستدق ہے اگر جیز $\theta \leqslant 1$، یا اگر $\theta \leqslant$ لوک $(1+\sqrt{2})$۔ بالخصوص

$$\text{لوک}\,(1+\sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{3\times1}{4\times2}\times\frac{1}{5} - \frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}\times\frac{1}{7} + \ldots$$

(326)

زائدی تفاعلوں کی دوریت

۲۶۶ — تفاعلات جمز θ، جیز θ خیالی دور 2π خ رکھتے ہیں کیونکہ

$$قو^{\theta} = قو^{\theta+2\pi خ}$$

پس

$$\text{جمز}\,\theta = \text{جمز}\,(\theta + 2\,خ\,\pi\,ک)،$$

$$\text{جیز}\,\theta = \text{جیز}\,(\theta + 2\,خ\,\pi\,ک)،$$

جہاں ک کوئی صحیح عدد ہے۔ چونکہ $قو^{\pi خ} = -1$، $قو^{-(\theta+\pi خ)} = -قو^{-\theta}$

اس لئے

$$\text{جمز}\,(\theta + خ\,\pi) = -\text{جمز}\,\theta،$$

$$\text{جیز}\,(\theta + خ\,\pi) = -\text{جیز}\,\theta،$$

اس لئے

مسز(ع + خ π) = مسز ع

یا مسز ع کا دور خ π ہے جو جیبز ع، جمز ع کے دور کا صرف نصف ہے۔ ع کی قیمتوں ٠، ½ π خ، π خ، ³⁄₂ π خ کے جواب میں جیبز ع، جمز ع، مسز ع کی حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:

	٠	½ π خ	π خ	³⁄₂ π خ
جیبز	٠	خ	٠	− خ
جمز	١	٠	−١	٠
مسز	٠	∞ × خ	٠	∞ × خ
ممز	∞	٠	∞	٠
قطز	١	∞	−١	∞
قمز	∞	− خ	∞	خ

جس طرح دائری تفاعل حقیقی دور کے سادہ ترین یک دوری تفاعل ہیں عین اسی طرح زائدی تفاعل خیالی دور کے سادہ ترین یک دوری تفاعل ہیں۔

قائم الزاویہ قطع زائد کے قطاع کا رقبہ

۲۶۷ — فرض کرو کہ نیم قاطع محور ا اور مرکز و کے ایک قائم الزاویہ زائد پر کوئی نقطہ ق ہے اور فرض کرو کہ ق کا معین ق ل ہے تب قائم الزاویہ زائد کی خاصیت کی رو سے و ل² − ق ل² = ا²، اب اگر ہم فرض کریں و ل = ا جمز ع تو ل ق = ا جیبز ع جہاں ہم ع کو مثبت یا منفی لیتے ہیں بموجب اس کے کہ معین ل ق مثبت یا منفی طور پر ناپا گیا ہو۔ ایسے ہم رقبہ ا ق پر غور کرتے ہیں جو و ا، و ق اور منحنی کی قوس ا ق سے محدود ہے۔ دائری قطاع کی صورت کے مطابق جو دفعہ ۱۱ میں زیر بحث آ چکی ہے ہم قوس ا ق میں ایک کھلا مستقیم الاضلاع

کثیر الاضلاع ا پ$_۱$ پ$_۲$ ... پ$_ر$ ... پ$_{ن-۱}$ ق بناتے ہیں
اور رقبہ و ا ق کے ناپ کی تعریف جو و ا ' و ق ' اور قوس ا ق سے
محدود ہے اس طرح کرتے ہیں کہ وہ بند کثیر الاضلاع و ا پ$_۱$ پ$_۲$ ... پ$_{ن-۱}$ ق و
کے رقبہ کے ناپ کی انتہا ہے بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہو جبکہ اندرونی کثیر الاضلاع (227)
کے ضلعوں کی تعداد غیر معیّن طور پر اس طرح بڑھائی جائے کہ بڑے سے
بڑے ضلع کی انتہا صفر کی طرف مستدق ہو بشرطیکہ یہ انتہا' مقررہ شرط کے
تحت کثیر الاضلاعوں کے تمام تواتروں کے لئے ایک یگانہ قیمت رکھتے
فرض کرو کہ نقطہ پ$_ر$ کے جواب میں ع کی قیمت ع$_ر$ ہے اور فرض کرو کہ
زاویہ پ$_ر$ و ا کے دائری ناپ کو طہ$_ر$ تعبیر کرتا ہے' فرض کرو کہ نقطہ
ق کے جواب میں یہ مقداریں ع اور طہ ہیں۔

ق
پ$_{ر+۱}$
پ$_ر$
پ$_۱$
و ا ل

مس طہ$_ر$ = مسز ع$_ر$ ، اسلئے

جب طہ$_ر$ = $\frac{\text{جبز ع}_ر}{(\text{جمز}^۲\text{ ع}_ر\ ۱)^{\frac{1}{2}}}$ ، اور جم طہ$_ر$ = $\frac{\text{جمز ع}_ر}{(\text{جمز}^۲\text{ ع}_ر)^{\frac{1}{2}}}$

ان قیمتوں سے اور جب طہ ر+۱ ، جم طہ ر+۱ کی متناظر قیمتوں سے ہمیں معلوم ہوتا ہے

جب (طہ ر+۱ − طہ ر) = جبز (ع ر+۱ − ع ر) / (جمز ۲ ع ر جمز ۲ ع ر+۱)^½

اب و پ ر = ا (جمز² ع ر + جبز² ع ر)^½ = ا جمز^½ ۲ ع ر

اور و پ ر+۱ = ا جمز^½ ۲ ع ر+۱

اسلئے △ و پ ر پ ر+۱ = ½ و پ ر × و پ ر+۱ جب (طہ ر+۱ − طہ ر)

= ½ ا² جبز (ع ر+۱ − ع ر)

پس اُس مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ جو و ا ، و ق اور ا پ۱ پ۲ .... پ ن−۱ ق کے ضلعوں سے محدود ہے یہ ہے

½ ا² × Σ (ر=۰ تا ر=ن−۱) جبز (ع ر+۱ − ع ر)

جہاں ع۰ = ۰ ، ع ن = ع ۔

(328) یہ ناپ دفعہ ۲۶۳ میں ثابت شدہ مسئلہ کی رو سے

½ ا² Σ (ر=۰ تا ر=ن−۱) {(ع ر+۱ − ع ر) + ا ر (ع ر+۱ − ع ر)² و ع ر+۱ − ع ر}

کے مساوی ہے جہاں اعداد ا ر سب کے سب ⅙ سے کم ہیں۔

ضلع پ ر پ ر+۱ کا طول ہے

ا {(جمز ع ر+۱ − جمز ع ر)² + (جبز ع ر+۱ − جبز ع ر)²}^½

جو = ۲ ا جمز$^{\frac{1}{2}}$ (ع$_ر$ + ع$_{ر+۱}$) جمز $\frac{1}{2}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$)

نیز ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$ < جمز (ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$) اسلئے نسبت (ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$) \ پ$_ر$ پ$_{ر+۱}$

< ا^۲ جمز $\frac{1}{2}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$) \ جمز$^{\frac{1}{2}}$ (ع$_ر$ + ع$_{ر+۱}$) < ا^۲ جمز $\frac{1}{2}$ ع

اب چونکہ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$) \ پ$_ر$ پ$_{ر+۱}$ ایک مستقل عدد سے جو ر پر اور کسی مخصوص کثیر الاضلاع پر منحصر نہیں ہے کم ہے اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ کثیر الاضلاعوں کے کسی تواتر کے ایک کثیر الاضلاع میں عددوں ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$ میں سے بڑے سے بڑا عدد صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جیسے کثیر الاضلاع کا بڑے سے بڑا ضلع صفر کی طرف مستدق ہو۔ اسلئے کثیر الاضلاع میں ہم فرض کر سکتے ہیں

ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$ < کـ$_ن$

ر کی تمام قیمتوں کے لئے، جہاں کہ$_ن$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جیسے ضلعوں کی تعداد غیر معین طور پر بڑھا دیجاتی ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاع کے رقبہ کا ناپ

$\frac{1}{2}$ ا^۲ $\sum_{ر=۰}^{ن-۱}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$)

یا

$\frac{1}{2}$ ا^۲ ع

سے اسقدر کم فرق رکھتا ہے جو

$\frac{1}{12}$ ا^۲ کـ$_ن^۲$ لو کـ$_ن$ $\sum_{ر=۰}^{ن-۱}$ (ع$_{ر+۱}$ − ع$_ر$)

یا $\frac{1}{12}$ ا^۲ کـ$_ن^۲$ لو کـ$_ن$ ع

سے کم ہے اور یہ کہ$_ن$ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے پس

یہ ثابت ہو چکا کہ مقررہ شرط کے تحت کسی تواتر کے مستقیم الاضلاع کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے ناپ کی یگانہ انتہا $\frac{1}{2}$ ا^۲ ع ہے - اسلئے قطاع و ا ق کا رقبہ جو و ا، و ق اور قائم الزاویہ زائد کی قوس ا ق سے محدود ہے $\frac{1}{2}$ ا^۲ ع ہے -

کسی قطاع کا رقبہ جسکے سرے ع، عَ سے تعبیر ہوتے ہیں صریحاً $\frac{1}{2}$ ا^۲ (ع - عَ) ہے -

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ اس قائم الزاویہ کی دوسری شاخ پر کے نقطوں کو تعبیر کرنے میں ع کو خ π - ع میں بدلنا چاہیے کیونکہ

جمز (خ π - ع) = - جمز ع،

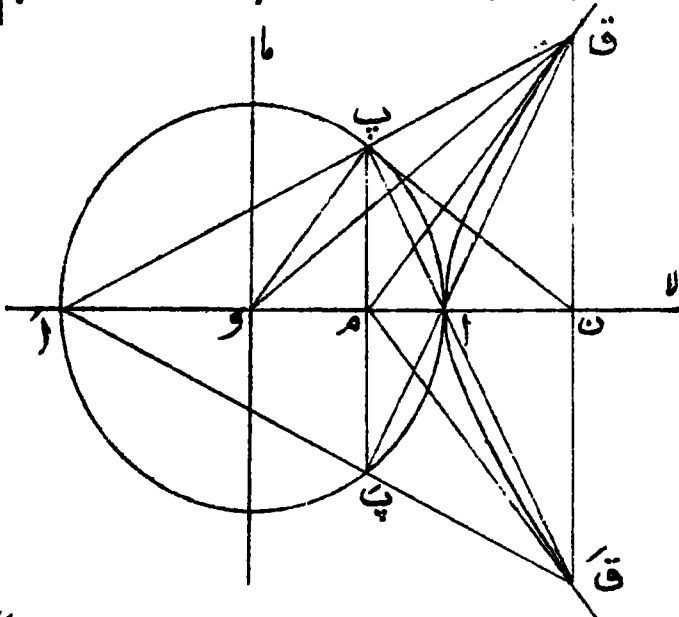
اور جبز (خ π - ع) = جبز ع

۲۶۸ — اگر ہم نصف قطر و ا = ا کا ایک دائرہ کھینچیں اور اس دائرہ پر کوئی نقطہ پ لیں جسکا معین م پ ہو تو زاویہ پ و ا کو ط سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوتا ہے (329)

رقبہ و ا پ = $\frac{1}{2}$ ا^۲ ط

فرض کرو کہ پ پر کا مماس پ ن ہے، تب

و م = ا جم ط، م پ = ا جب ط، ن پ = ا س ط، م ا = سہم ط

ـلـه اس دفعہ کی شکل گرین ہل کے رسالہ موسومہ "A chapter on the Integ. Calculus" میں سے نقل کی گئی ہے

ن سے ن ق، و ا پر عمود اور ن پ کے مساوی کھینچو تب و ن^2
- ن ق^2 = ا^2، اِس لئے ق کا طریق نیم محور ا کا ایک قائم الزاویہ
قطع زائد ہے۔ اب قطاع و ا ق کے رقبہ کو $\frac{1}{2}$ ا^2 ع سے تعبیر کرو
تو حسب ثبوت دفعہ سابق و ن = ا جمز ع، ن ق = ا جبز ع۔
پس ہم دیکھتے ہیں کہ جس طرح دائرہ پر کے کسی نقطہ پ کا معین اور فصل
علی الترتیب ا جب طہ، ا جم طہ سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں $\frac{1}{2}$ ا^2 طہ
دائری قطاع و ا پ کا رقبہ ہے عین اسی طرح قائم قطع زائد پر کے نقطہ ق
کا معین اور فصل علی الترتیب ا جبز ع، ا جمز ع سے تعبیر ہوتے ہیں جہاں
$\frac{1}{2}$ ا^2 ع قطاع و ا ق کا رقبہ ہے۔ اس طرح زائدی جیب اور جیب التمام
قائم زائد کے حوالے سے ایسی خاصیت رکھتے ہیں جو دائرہ کے
حوالے سے جیب اور جیب التمام کی خاصیت کے بالکل مماثل ہے۔
یہی وجہ ہے کہ قبل الذکر تفاعلوں کو زائدی تفاعل کہا جاتا ہے عین ایسے
ہی جیسے کہ بعد الذکر تفاعلوں کو دائری تفاعل کہتے ہیں۔

(330)

۲۶۹ — دفعہ سابق کی شکل میں جب ہم قائم زائد کے نقطہ ق پر
غور کرتے ہیں جو دائرہ کے نقطہ پ کے متناظر ہے تو حاصل ہوتا ہے

ا مس طہ = ن ق = ا جبز ع، اور ا قط طہ = و ن = ا جمز ع،

اسلئے متناظر نقطوں کی دلیلیں طہ، ع رشتوں مس طہ = جبز ع، قط طہ
= جمز ع کو پورا کرتی ہیں۔ اب چونکہ

$$\text{مسز}\,\frac{1}{2}\,\text{ع} = \frac{\text{جبز ع}}{\text{۱} + \text{جمز ع}}$$

اسلئے

$$\text{مسز}\,\frac{1}{2}\,\text{ع} = \frac{\text{مس طہ}}{\text{۱} + \text{قط طہ}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{۱} + \text{جم طہ}} = \text{مس}\,\frac{1}{2}\,\text{طہ}$$

یا دلائل طہ اور ع، رشتہ مسز $\frac{1}{2}$ ع = مس $\frac{1}{2}$ طہ کو پورا کرتی ہیں۔

چونکہ △ و ق م < قطاع و ا ق < △ و ا ق

اسلئے

مسز ع > ع > جبز ع

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\frac{\text{مسز ع}}{\text{ع}}$ ، $\frac{\text{جبز ع}}{\text{ع}}$ کی انتہائیں جبکہ ع کو لاانتہا گھٹا دیا جائے ہر ایک اکائی ہے کیونکہ ہر ، ت = ۱ -

۲۷۰ - چونکہ و^ع = جمز ع + جبز ع

= قط طہ + مس طہ

اسلئے

ع = لوک و (قط طہ + مس طہ)

= لوک و مس ($\frac{1}{4}$ π + $\frac{1}{2}$ طہ)

دلیل طہ کو مختلف نام دئے جا چکے ہیں ، چنانچہ کیلے (Cayley) اِس کو ع کا گوڈرمینی (Gudermannian) تفاعل کہتا ہے اور اسے گڈ ع (gd u) سے تعبیر کرتا ہے ۔ اس طرح طہ = گڈ ع ، ع = گڈ^{-۱} طہ = لوک مس ($\frac{1}{4}$π + $\frac{1}{2}$ طہ) - یہ نام گڈرمن (Gudermann) کے اعزاز میں دیا گیا تھا جس نے اسکو ع کے طول بلدر (Longitude) سے موسوم کیا تھا۔[1] لیمبرٹ (Lambert) نے طہ کو علوی (Transcendent) زاویہ کہا اور ہوئیل[2] (Houel) نے ع کا زائدی حیطہ کہا اور لکھا حطز ع (amhu) - صفر درجے سے ۹۰° تک .۱ کے وقفوں سے طہ کی قیمتوں کے لئے لوک مس ($\frac{1}{4}$π + $\frac{1}{2}$ طہ) کی قیمتوں کی ایک جدول جسمیں یہ قیمتیں اعشاریہ کے ۱۲ مقامات تک دی گئی ہیں لیجنڈر (Legendre) کی کتاب

(Théorie des fonctions Elliptiques, vol. II Table IV.)

میں ملیگی - اس باب کے آخر میں جو جدول ایک درجہ کے وقفوں سے دی گئی ہے اسکو لیجنڈر کی جدول سے پروفیسر کیلے نے اخذ کیا تھا۔[3]

---

[1] دیکھو (Crelle's journal, 1833.)

[2] دیکھو (Théorie des fonctions complexes)

[3] دیکھو (Quarterly journal, vol. xx.p.220)

(331) اِس جدول سے ع کے زائدی تفاعلوں کی عددی قیمتیں رشتوں
جیبز ع = مس طہ ، جمز ع = قط طہ
کے ذریعہ زاویوں کے طبعی ماسوں یا قاطعوں کی جدول استعمال کرکے معلوم کرسکتے ہیں۔

زائدی تفاعلوں اور انکے اطلاقات کے موضوع پر مزید معلومات کی خواہش ہو تو دیکھو لائے سانٹ (Laisant) کا "Essai sur les Fonctions Hyperboiiques" in the Memoires de la Societe des Sciences de Bordeaux, vol. x., اور نیز حسب ذیل مقالات
"Die hyperbolischen Functionen" by E. Heis,
"Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbol-funktionen" by Gunther.

ملتف دلیلوں کے دائری تفاعلوں کیلئے جملے

۱۷۲۔ ملتف دلیل کے دائری تفاعلوں کو زائدی تفاعلوں کی ترقیم استعمال کرکے آسانی کے ساتھ شکل عہ + خ بہ میں بیان کیا جاسکتا ہے جہاں عہ اور بہ حقیقی مقداریں ہیں۔

چنانچہ جب (لا + خ ما) = جب لا جم خ ما + جم لا جب خ ما

اسلئے جب (لا + خ ما) = جب لا جمز ما + خ جم لا جبز ما، ...(۹)

اسی طرح جم (لا + خ ما) = جم لا جمز ما − خ جب لا جبز ما، ...(۱۰)

نیز مس (لا + خ ما) = $\frac{\text{جب (لا + خ ما) جم (لا − خ ما)}}{\text{جم (لا + خ ما) جم (لا − خ ما)}}$

= $\frac{\text{جب ۲ لا + جب ۲ خ ما}}{\text{جم ۲ لا + جم ۲ خ ما}}$

اسلئے مس (لا + خ ما) = $\frac{\text{جب ۲ لا + خ جبز ۲ ما}}{\text{جم ۲ لا + جمز ۲ ما}}$، ...(۱۱)

مختلف دلیلوں کے مقلوب دائری تفاعل

۲۷۲ — ہم اول تفاعل جب$^{-1}$ (لا + خ ما) پر غور کرینگے ۔ فرض کرو
جب$^{-1}$ (لا + خ ما) = ع + خ بہ ، تب

لا + خ ما = جب (ع + خ بہ) = جب ع جتز بہ + خ جم ع جیتز بہ

یا لا = جب ع جتز بہ ، ما = جم ع جیتز بہ

اسلئے بہ کو معلوم کرنیکی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{جتز}^2\text{بہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{جیتز}^2\text{بہ}} = 1$$

یا لا^2 (جتز^2 بہ − ۱) + ما^2 جتز^2 بہ = جتز^2 بہ (جتز^2 بہ − ۱)

(332)

اگر ہم جتز^2 بہ کی یہ دو درجی مساوات حل کریں تو

جتز^2 بہ = $\frac{1}{2}$ (لا^2 + ما^2 + ۱) ± $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 1)^2 - 4\,\text{لا}^2}$

اسلئے جتز بہ = ± $\frac{1}{2}\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{لا} + 1}$ ± $\frac{1}{2}\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 2\,\text{لا} + 1}$

اور چونکہ جتز بہ مثبت ہے اسلئے

جتز بہ = $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا} + 1)^2 + \text{ما}^2}$ ± $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا} - 1)^2 + \text{ما}^2}$

اگر لا مثبت ہے ۔ جتز بہ کی اس قیمت کے جواب میں جب ع کی قیمت ہے

لا \ جتز بہ یا $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا} + 1)^2 + \text{ما}^2}$ ∓ $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا} - 1)^2 + \text{ما}^2}$

اب چونکہ جتز بہ > ۱ > جب ع اسلئے

جتز بہ = $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا} + 1)^2 + \text{ما}^2}$ + $\frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا} - 1)^2 + \text{ما}^2}$ = ع ،

$$\text{جب عہ} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}+۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} - \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}-۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} = \text{و} \text{ ،}$$

پس جمز بہ ، جب عہ کی قیمتیں مندرجہ صدر ہیں خواہ لا مثبت ہو یا منفی۔

دو درجی جمز بہ = ع سے حاصل ہوتا ہے بہ = $\pm$ لوک $\{\text{ع} + \sqrt{\text{ع}^{۲} - ۱}\}$ ،

اسلئے $\text{جب}^{-۱}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{ک}\pi + (-۱)^{\text{ک}}\,\text{جب}^{-۱}\text{و} \pm \text{خ لوک}\{\text{ع} + \sqrt{\text{ع}^{۲} - ۱}\}$

جہاں ک ایک صحیح عدد ہے اور $\text{جب}^{-۱}\text{و}$ ، عہ کی صدر قیمت ہے جو اس شرط جب عہ = و کو پورا کرتی ہے۔ مبہم علامت کی تعین کیلئے رکھو لا = ۰ ۔ تو $\text{جب}^{-۱}\text{خ ما} = \text{ک}\pi \pm \text{خ لوک}(\sqrt{۱ + \text{ما}^{۲}} + \text{ما})$ ، اسلئے

$$\text{خ ما} = \pm\, \text{جم ک}\pi\ \text{جب}\left[\text{خ لوک}(\sqrt{۱+\text{ما}^{۲}} + \text{ما})\right]$$

$$= \pm(-۱)^{\text{ک}} \frac{۱}{۲\text{خ}}\left\{\frac{۱}{\text{ما} + \sqrt{\text{ما}^{۲}+۱}} - \text{ما} - \sqrt{\text{ما}^{۲}+۱}\right\} = \pm(-۱)^{\text{ک}}\,\text{خ ما}$$

اسلئے مبہم علامت وہی ہونی چاہیئے جو $(-۱)^{\text{ک}}$ کی ہے ، یا

$$\text{جب}^{-۱}(\text{لا}+\text{خ ما}) = \text{ک}\pi + (-۱)^{\text{ک}}\,\text{جب}^{-۱}\text{و} + (-۱)^{\text{ک}}\,\text{خ لوک}\{\text{ع} + \sqrt{\text{ع}^{۲}-۱}\} \quad \ldots (۱۲)$$

جہاں $\text{ع} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}+۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} + \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}-۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}}$

اور $\text{و} = \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}+۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}} - \tfrac{۱}{۲}\sqrt{(\text{لا}-۱)^{۲} + \text{ما}^{۲}}$

اگر ہم $\text{جب}^{-۱}\text{و} + \text{خ لوک}\{\text{ع} + \sqrt{\text{ع}^{۲}-۱}\}$ کو $\text{جب}^{-۱}(\text{لا}+\text{خ ما})$ کی صدر قیمت خیال کریں اور اسے $\text{جب}^{-۱}(\text{لا}+\text{خ ما})$ سے تعبیر کریں تو عام قیمت ہے

$$\text{ک}\pi + (-۱)^{\text{ک}}\,\text{جب}^{-۱}(\text{لا}+\text{خ ما})$$

جو وہی جملہ ہے جو حقیقی دلیلوں کے لئے حاصل ہوا تھا۔

ایک خاص صورت لا > ۱، ما = ۰ کی ہے، اس صورت میں ء = لا، و = ۱ اور جب^{-1} لا کی صدر قیمت $\frac{1}{2}\pi + \text{خ لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - 1}\right\}$ ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ جب^{-1} لا کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہو سکتی جبکہ لا > ۱۔

(333) **۲۷۳** — ثانیاً فرض کرو کہ $\text{جم}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{عہ} + \text{خ بہ}$ تو پہلی صورت کی طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \text{جم عہ جمز بہ}،\quad \text{ما} = -\text{جب عہ جبز بہ}$$

اور حسب سابق معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جمز بہ} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}+1)^2 + \text{ما}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}-1)^2 + \text{ما}^2} = \text{ء}،$$

$$\text{جم عہ} = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}+1)^2 + \text{ما}^2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\text{لا}-1)^2 + \text{ما}^2} = \text{و}،$$

اس لئے $\text{جم}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما}) = 2\text{ک}\pi \pm \text{جم}^{-1}\text{و} \pm \text{خ لوک}\left\{\text{ء} + \sqrt{\text{ء}^2 - 1}\right\}$

آخری رقم کی علامت کی تعیین کے لئے رکھو لا = ۰ تو

$$\text{خ ما} = \text{جم}\left[\pm\frac{1}{2}\pi \pm \text{خ لوک}\left(\text{ا} + \sqrt{\text{ما}^2 + 1}\right)\right] = \mp\,\text{جب}\left\{\pm\,\text{خ لوک}\left(\text{ما} + \sqrt{\text{ما}^2 + 1}\right)\right\} = (\mp)(\pm\,\text{خ ما})$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دوسری مبہم علامت پہلی سے مختلف ہونی چاہئے، یا

$$\text{جم}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما}) = 2\text{ک}\pi \pm \left\{\text{جم}^{-1}\text{و} - \text{خ لوک}\left(\text{ء} + \sqrt{\text{ء}^2 - 1}\right)\right\} \quad \ldots(۱۳)$$

اگر $\text{جم}^{-1}\text{و} - \text{خ لوک}\left(\text{ء} + \sqrt{\text{ء}^2 - 1}\right)$ سے $\text{جم}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما})$ کی صدر قیمت تعبیر ہو تو عام قیمت $2\text{ک}\pi \pm \text{جم}^{-1}(\text{لا} + \text{خ ما})$ ہے۔

۲۷۴ — فرض کرو کہ $\text{مس}^{-۱}(\text{لا} + \text{خ ما}) = \text{عہ} + \text{خ بہ}$، تب

$$\text{لا} + \text{خ ما} = \frac{\text{جب ۲عہ} + \text{خ جبز ۲بہ}}{\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ}}$$

اسلئے $\text{لا} = \dfrac{\text{جب ۲عہ}}{\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ}}$، $\text{ما} = \dfrac{\text{جبز ۲بہ}}{\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ}}$،

اسلئے $$\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = \frac{\text{جب}^۲\,\text{۲عہ} + \text{جبز}^۲\,\text{۲بہ}}{(\text{جم ۲بہ} + \text{جمز ۲بہ})^۲} = \frac{\text{جمز}^۲\,\text{۲بہ} - \text{جم}^۲\,\text{۲عہ}}{(\text{جم ۲عہ} + \text{جمز ۲بہ})^۲}$$

$$= \frac{\text{جمز ۲بہ} - \text{جم ۲عہ}}{\text{جمز ۲بہ} + \text{جم ۲عہ}}$$

یا $$۱ - \text{لا}^۲ - \text{ما}^۲ = \frac{\text{۲ جم ۲عہ}}{\text{جمز ۲بہ} + \text{جم ۲عہ}}،$$

اور $$۱ + \text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = \frac{\text{۲ جمز ۲بہ}}{\text{جمز ۲بہ} + \text{جم ۲عہ}}$$

اسلئے $\text{مس ۲عہ} = \dfrac{\text{۲ لا}}{۱ - \text{لا}^۲ - \text{ما}^۲}$، اور $\text{مسز ۲بہ} = \dfrac{\text{۲ ما}}{۱ + \text{لا}^۲ + \text{ما}^۲}$

اب چونکہ $$\frac{\text{ق}^{\text{۲بہ}} - \text{ق}^{-\text{۲بہ}}}{\text{ق}^{\text{۲بہ}} + \text{ق}^{-\text{۲بہ}}} = \frac{\text{۲ ما}}{۱ + \text{لا}^۲ - \text{ما}^۲}$$

اسلئے $$\text{ق}^{\text{۴بہ}} = \frac{\text{لا}^۲ + (\text{ما} + ۱)^۲}{\text{لا}^۲ + (\text{ما} - ۱)^۲}$$

یا $$\text{بہ} = \tfrac{۱}{۴}\,\text{لوک}\left\{\frac{\text{لا}^۲ + (\text{ما} + ۱)^۲}{\text{لا}^۲ + (\text{ما} - ۱)^۲}\right\}$$

اسلئے $\text{مس}^{-۱}(\text{لا} + \text{خ ما})$ کی قیمتیں

مس$^{-1}$ (لا + خ ما) = ک π + $\frac{1}{2}$ مس$^{-1}$ $\frac{۲ \text{ لا}}{۱ - \text{لا}^۲ - \text{ما}^۲}$

+ $\frac{1}{4}$ خ لوک $\left\{\frac{\text{لا}^۲ + (\text{ما} + ۱)^۲}{\text{لا}^۲ + (\text{ما} - ۱)^۲}\right\}$ ، ...... (۱۴)

سے ملتی ہیں —

مقلوب زائدی تفاعل

۲۷۵ — اگر جبزعہ = ی تو عہ کو ی کی مقلوب زائدی جیب کہتے ہیں اور اسے جبز$^{-1}$ ی سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایسی ہی تعریف جمز$^{-1}$ ی اور مسز$^{-1}$ ی کے لئے ہے۔

(334) اگر ی = جبزعہ = ـ خ جب خ عہ تو خ ی = جب خ عہ یا عہ = $\frac{1}{خ}$ جب$^{-1}$ (خ ی)

اسی طرح اگر ی = جمزعہ = جم خ عہ تو عہ = $\frac{1}{خ}$ جم$^{-1}$ ی ، نیز اگر ی = مسزعہ تو عہ = $\frac{1}{خ}$ مس$^{-1}$ (خ ی)۔ پس مقلوب زائدی تفاعل مقلوب دائری تفاعلوں کی رقوم میں ان مساواتوں

جبز$^{-1}$ ی = ـ خ جب$^{-1}$ (خ ی) ،

جمز$^{-1}$ ی = ـ خ جم$^{-1}$ (ی) ،

مسز$^{-1}$ ی = ـ خ مس$^{-1}$ (خ ی)

سے بیان ہوتے ہیں —

۲۷۶ — ان جملوں کے ذریعہ جو ہم نے ملتف دلیل کے مقلوب دائری تفاعلوں کے لئے معلوم کئے ہیں مقلوب زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔ لیکن ہم ان کو بلاواسطہ ہی معلوم کریں گے —

(۱) اگر ی = جبزعہ تو وعہ ـ تو ـعہ = ۲ ی ۔ اسکو وعہ کی قیمت

معلوم کرنیکے لئے دو درجی کے طور پر حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{ع}} = \text{ی} \pm \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}$$

اس لئے $\text{ع} = ۲\,\text{خ ک}\,\pi + \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$

یا $\text{ع} = ۲\,\text{خ ک}\,\pi + \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} - \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$

ع کی یہ دونوں قیمتیں جملہ $\text{خ ک}\,\pi + (-۱)^{\text{ک}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$ میں شامل ہیں۔

پس $\text{جبز}^{-۱}\,\text{ی}$ کی عام قیمت $\text{خ ک}\,\pi + (-۱)^{\text{ک}}\, \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$ ہے اور اسکی صدر قیمت $\text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{۱ + \text{ی}^۲}\right)$ ہے۔ اس صدر قیمت کو بالعموم $\text{جبز}^{-۱}\,\text{ی}$ سے تعبیر کرتے ہیں۔

(۲) اگر $\text{ی} = \text{جمز}\,\text{ع}$ تو $\text{و}^{\text{ع}} + \text{و}^{-\text{ع}} = ۲\,\text{ی}$، اسلئے

$\text{و}^{\text{ع}} = \text{ی} \pm \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}$، اس طرح $\text{ع} = ۲\,\text{خ ک}\,\pi \pm \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}\right)$

پس $\text{جمز}^{-۱}\,\text{ی}$ کی عام قیمت $۲\,\text{خ ک}\,\pi \pm \text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}\right)$ ہے، اسکی صدر قیمت جو بالعموم $\text{جمز}^{-۱}\,\text{ی}$ سے تعبیر کیجاتی ہے $\text{لوک}_{\text{و}} \left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^۲ - ۱}\right)$ ہے۔

(۳) اگر $\text{ی} = \text{مسز}\,\text{ع}$ تو $\dfrac{\text{و}^{۲\text{ع}} - ۱}{\text{و}^{۲\text{ع}} + ۱} = \text{ی}$، یا $\text{و}^{۲\text{ع}} = \dfrac{۱ + \text{ی}}{۱ - \text{ی}}$

اسلئے $\text{ع} = \text{خ ک}\,\pi + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}} \left(\dfrac{۱ + \text{ی}}{۱ - \text{ی}}\right)$، یہ $\text{مستز}^{-۱}\,\text{ی}$ کی عام قیمت ہے اور اسکی صدر قیمت $\frac{۱}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}} \left(\dfrac{۱ + \text{ی}}{۱ - \text{ی}}\right)$ ہے۔

(۴) اسی طرح ممز$^{-1}$ی، قطز$^{-1}$ی، قمز$^{-1}$ی کی صدر قیمتوں کے لئے علی الترتیب جملے حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{1}{2}\text{لوک}_{ی}\left(\frac{ی+1}{ی-1}\right)\text{، لوک}_{و}\frac{1+\sqrt{1-ی^2}}{ی}\text{، لوک}_{و}\frac{1+\sqrt{1+ی^2}}{ی}$$

کعبی مساواتوں کا حل

(335)

۲۷۷ — دفعہ ۲۱۱ میں یہ دکھایا جاچکا ہے کہ جب کعبی لا^3+ق لا + ر = ۰ کی اصلیں سب کی سب حقیقی ہوں اور ف منفی ہو تو اصلیں ہیں

$$\sqrt{-\frac{4}{3}ق}\times\text{جب ط}\text{، }\sqrt{-\frac{4}{3}ق}\times\text{جب}(ط+\frac{2}{3}\pi)\text{، }\sqrt{-\frac{4}{3}ق}\times\text{جب}(ط+\frac{4}{3}\pi)$$

جہاں جب ۳ ط = $\left(-\frac{27ر^2}{4ق^3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ۔ اب ہم یہ دکھائینگے کہ کعبی کو اس صورت میں کس طرح حل کرنا چاہئے جبکہ اسکی دو اصلیں خیالی ہوں اس صورت میں شرط

$$۲۷ ر^2 + ۴ ق^3 > ۰$$

پوری ہوتی ہے۔

(۱) ق کو مثبت فرض کرو اور کعبی

$$۴ \text{ جبز}^3 ع + ۳ \text{ جبز} ع = \text{جبز} ۳ ع$$

پر غور کرو ۔ فرض کرو لا = ا جبز ع، تب لا اس مساوات

$$لا^3 + \frac{3}{4}ا^2 لا - \frac{1}{4}ا^3 \text{ جبز} ۳ ع = ۰$$

کو پورا کرتا ہے ۔ یہ کعبی، کعبی لا^3+ ق لا + ر = ۰ پر منطبق ہوگا اگر

$$\text{ق} = \tfrac{۳}{۴}\,\text{ا}^{۲}\text{، ر} = -\tfrac{۱}{۴}\,\text{ا}^{۳}\,\text{جبز ۳ع یا جبز ۳ع} = -۴\left(\frac{۲۷\,\text{ر}^{۲}}{۶۴\,\text{ق}^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

اب کعبی $\text{۴ جبز}^{۳}\text{ع} + \text{۳ جبز ع} = \text{جبز ۳ع}$ کی اصلیں ہیں

$$\text{جبز ع، جبز}\left(\text{ع} + \tfrac{۲}{۳}\,\pi\,\text{خ}\right)\text{، جبز}\left(\text{ع} + \tfrac{۴}{۳}\,\pi\,\text{خ}\right)$$

اسلئے کعبی $\text{لا}^{۳} + \text{ق لا} + \text{ر} = ۰$ کی اصلیں ہیں

$$\sqrt{\tfrac{۴}{۳}\,\text{ق}}\;\text{جبز ع، }\sqrt{\tfrac{۴}{۳}\,\text{ق}}\;\text{جبز}\left(\text{ع} + \tfrac{۲}{۳}\,\pi\,\text{خ}\right)\text{، }\sqrt{\tfrac{۴}{۳}\,\text{ق}}\;\text{جبز}\left(\text{ع} + \tfrac{۴}{۳}\,\pi\,\text{خ}\right)$$

یا

$$\sqrt{\tfrac{۴}{۳}\,\text{ق}}\;\text{جبز ع، }\sqrt{\tfrac{۱}{۳}\,\text{ق}}\left(-\text{جبز ع} \pm \text{خ}\sqrt{۳}\;\text{جمز ع}\right)$$

جہاں $\text{جبز ۳ع} = -\tfrac{۱}{۲}\left(\frac{۲۷\,\text{ر}^{۲}}{\text{ق}^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$۔ اگر ق اور ر کی عددی قیمتیں دی گئی ہیں تو عدد ۳ع کو زائدی جیوب کی جدول سے معلوم کیا جاتا ہے اور پھر انہی جدولوں سے جبز ع، جمز ع معلوم کئے جاتے ہیں۔ پس اس طرح اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر ق منفی ہو تو مساوات

$$\text{۴ جمز}^{۳}\text{ع} - \text{۳ جمز ع} = \text{جمز ۳ع}$$

پر غور کرو۔ سابقہ صورت کی طرح یہ معلوم ہوگا کہ اگر $\text{ق} = -\tfrac{۳}{۴}\,\text{ا}^{۲}$، $\text{ر} = -\tfrac{۱}{۴}\,\text{ا}^{۳}\,\text{جمز ۳ع}$ تو وہ کعبی جو ا جمز ع سے پورا ہوتا ہے $\text{لا}^{۳} + \text{ق لا} + \text{ر} = ۰$ ہے۔ اس لئے مطلوبہ اصلیں ہیں

$$\sqrt{-\tfrac{۴}{۳}\,\text{ق}}\;\text{جمز ع، }\sqrt{-\tfrac{۴}{۳}\,\text{ق}}\;\text{جمز}\left(\text{ع} + \tfrac{۲}{۳}\,\pi\,\text{خ}\right)\text{، }\sqrt{-\tfrac{۴}{۳}\,\text{ق}}\;\text{جمز}\left(\text{ع} + \tfrac{۴}{۳}\,\pi\,\text{خ}\right)$$

یا $\sqrt{-\frac{۴}{۳}ق}$ جمزء، $\sqrt{-\frac{۱}{۳}ق}$ (−جمزء ± $\sqrt{۳}$ جبزء)

جہاں جمز ۳ء $= -\frac{۱}{۲}\left(-۲۷\ \frac{ر^{۲}}{ق^{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ ۔ پس حسب صورت سابقہ ہم کعبی کی اصلوں کی عددی قیمتیں معلوم کرنیکے لئے جبکہ ق اور ر دئے گئے ہوں زائدی تفاعلوں کی جدولیں استعمال کرسکتے ہیں۔ (336)

۲۷۸ — ط کی دی ہوئی قیمتوں کے جواب میں ع کی قیمتوں کی جدول

	ط	ع = لوگ مس $(\frac{۱}{۴}\pi + \frac{۱}{۲}ط)$		ط	ع = لوگ مس $(\frac{۱}{۴}\pi + \frac{۱}{۲}ط)$
°۰	٫۰	٫۰	°۱۵	٫۲۶۱۷۹۹۴	٫۲۶۴۸۴۲۲
°۱	٫۰۱۷۴۵۳۳	٫۰۱۷۴۵۴۲	°۱۶	٫۲۷۹۲۵۲۷	٫۲۸۲۹۵۴۵
°۲	٫۰۳۴۹۰۶۶	٫۰۳۴۹۱۳۷	°۱۷	٫۲۹۶۷۰۶۰	٫۳۰۱۱۵۷۷
°۳	٫۰۵۲۳۵۹۹	٫۰۵۲۳۸۳۸	°۱۸	٫۳۱۴۱۵۹۳	٫۳۱۹۴۵۸۳
°۴	٫۰۶۹۸۱۳۲	٫۰۶۹۸۶۹۹	°۱۹	٫۳۳۱۶۱۲۶	٫۳۳۷۸۶۲۹
°۵	٫۰۸۷۲۶۶۵	٫۰۸۷۳۷۷۴	°۲۰	٫۳۴۹۰۶۵۹	٫۳۵۶۳۷۸۵
°۶	٫۱۰۴۷۱۹۸	٫۱۰۴۹۱۱۷	°۲۱	٫۳۶۶۵۱۹۱	٫۳۷۵۰۱۲۱
°۷	٫۱۲۲۱۷۳۰	٫۱۲۲۴۷۸۱	°۲۲	٫۳۸۳۹۷۲۴	٫۳۹۳۷۷۱۰
°۸	٫۱۳۹۶۲۶۳	٫۱۴۰۰۸۲۲	°۲۳	٫۴۰۱۴۲۵۷	٫۴۱۲۶۶۲۶
°۹	٫۱۵۷۰۷۹۶	٫۱۵۷۷۲۹۶	°۲۴	٫۴۱۸۸۷۹۰	٫۴۳۱۶۹۴۷
°۱۰	٫۱۷۴۵۳۲۹	٫۱۷۵۴۲۵۸	°۲۵	٫۴۳۶۳۳۲۳	٫۴۵۰۸۷۵۳
°۱۱	٫۱۹۱۹۸۶۲	٫۱۹۳۱۷۶۶	°۲۶	٫۴۵۳۷۸۵۶	٫۴۷۰۲۱۲۷
°۱۲	٫۲۰۹۴۳۹۵	٫۲۱۰۹۸۶۷	°۲۷	٫۴۷۱۲۳۸۹	٫۴۸۹۷۱۵۴
°۱۳	٫۲۲۶۸۹۲۸	٫۲۲۸۸۶۵۰	°۲۸	٫۴۸۸۶۹۲۲	٫۵۰۹۳۹۲۳
°۱۴	٫۲۴۴۳۴۶۱	٫۲۴۶۸۱۴۵	°۲۹	٫۵۰۶۱۴۵۵	٫۵۲۹۲۵۲۷

	ط	ع = لوک نو مس ($\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ ط)		ط	ع = لوک نو مس ($\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ ط)
°۳۰	؍۵۲۳۵۹۸۸	؍۵۴۹۳۰۶۱	°۵۳	؍۹۲۵۰۲۴۵	۱؍۰۹۴۸۳۳۵
°۳۱	؍۵۴۱۰۵۲۱	؍۵۶۹۵۶۲۷	°۵۴	؍۹۴۲۴۷۷۸	۱؍۱۲۴۱۷۷۲
°۳۲	؍۵۵۸۵۰۵۴	؍۵۹۰۰۳۲۹	°۵۵	؍۹۵۹۹۳۱۱	۱؍۱۵۴۲۳۴۶
°۳۳	؍۵۷۵۹۵۸۷	؍۶۱۰۷۲۷۵	°۵۶	؍۹۷۷۳۸۴۴	۱؍۱۸۵۰۵۰۷
°۳۴	؍۵۹۳۴۱۱۹	؍۶۳۱۶۵۸۱	°۵۷	؍۹۹۴۸۳۷۷	۱؍۲۱۶۶۷۴۸
°۳۵	؍۶۱۰۸۶۵۲	؍۶۵۲۸۳۶۶	°۵۸	۱؍۰۱۲۲۹۱۰	۱؍۲۴۹۱۶۰۶
°۳۶	؍۶۲۸۳۱۸۵	؍۶۷۴۲۷۵۵	°۵۹	۱؍۰۲۹۷۴۴۳	۱؍۲۸۲۵۶۶۸
°۳۷	؍۶۴۵۷۷۱۸	؍۶۹۵۹۸۸۰	°۶۰	۱؍۰۴۷۱۹۷۶	۱؍۳۱۶۹۵۷۹
°۳۸	؍۶۶۳۲۲۵۱	؍۷۱۷۹۸۸۰	°۶۱	۱؍۰۶۴۶۵۰۸	۱؍۳۵۲۴۰۴۸
°۳۹	؍۶۸۰۶۷۸۴	؍۷۴۰۲۹۰۱	°۶۲	۱؍۰۸۲۱۰۴۱	۱؍۳۸۸۹۸۶۰
°۴۰	؍۶۹۸۱۳۱۷	؍۷۶۲۹۰۹۵	°۶۳	۱؍۰۹۹۵۵۷۴	۱؍۴۲۶۷۸۸۲
°۴۱	؍۷۱۵۵۸۵۰	؍۷۸۵۸۶۳۰	°۶۴	۱؍۱۱۷۰۱۰۷	۱؍۴۶۵۹۰۸۳
°۴۲	؍۷۳۳۰۳۸۳	؍۸۰۹۱۶۷۲	°۶۵	۱؍۱۳۴۴۶۴۰	۱؍۵۰۶۴۵۴۲
°۴۳	؍۷۵۰۴۹۱۶	؍۸۳۲۸۴۰۶	°۶۶	۱؍۱۵۱۹۱۷۳	۱؍۵۴۸۵۴۷۲
°۴۴	؍۷۶۷۹۴۴۹	؍۸۵۶۹۰۲۶	°۶۷	۱؍۱۶۹۳۷۰۶	۱؍۵۹۲۳۲۳۷
°۴۵	؍۷۸۵۳۹۸۲	؍۸۸۱۳۷۳۶	°۶۸	۱؍۱۸۶۸۲۳۹	۱؍۶۳۷۹۳۸۷
°۴۶	؍۸۰۲۸۵۱۵	؍۹۰۶۲۷۵۵	°۶۹	۱؍۲۰۴۲۷۷۲	۱؍۶۸۵۵۶۸۵
°۴۷	؍۸۲۰۳۰۴۷	؍۹۳۱۶۳۱۶	°۷۰	۱؍۲۲۱۷۳۰۵	۱؍۷۳۵۴۱۵۲
°۴۸	؍۸۳۷۷۵۸۰	؍۹۵۷۴۶۶۹	°۷۱	۱؍۲۳۹۱۸۳۸	۱؍۷۸۷۷۱۲۰
°۴۹	؍۸۵۵۲۱۱۳	؍۹۸۳۸۰۷۹	°۷۲	۱؍۲۵۶۶۳۷۱	۱؍۸۴۲۷۳۰۰
°۵۰	؍۸۷۲۶۶۴۶	۱؍۰۱۰۶۸۳۲	°۷۳	۱؍۲۷۴۰۹۰۴	۱؍۹۰۰۷۸۶۷
°۵۱	؍۸۹۰۱۱۷۹	۱؍۰۳۸۱۲۳۵	°۷۴	۱؍۲۹۱۵۴۳۶	۱؍۹۶۲۲۵۷۲
°۵۲	؍۹۰۷۵۷۱۲	۱؍۰۶۶۱۶۱۷	°۷۵	۱؍۳۰۸۹۹۶۹	۲؍۰۲۷۵۸۹۴

	طہ	ع = لوگ مس ($\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ طہ)		طہ	ع = لوگ مس ($\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$ طہ)
°۷۶	۱،۳۲۶۴۵۰۲	۲،۰۹۷۳۲۴۰	°۸۴	۱،۴۶۶۰۷۶۶	۲،۹۴۸۷۰۰۲
°۷۷	۱،۳۴۳۹۰۳۵	۲،۱۷۲۱۲۱۸	°۸۵	۱،۴۸۳۵۲۹۹	۳،۱۳۱۳۰۱۳
°۷۸	۱،۳۶۱۳۵۶۸	۲،۲۵۲۸۰۲۷	°۸۶	۱،۵۰۰۹۸۳۲	۳،۳۵۴۶۷۳۵
°۷۹	۱،۳۷۸۸۱۰۱	۲،۳۴۰۴۰۰۷	°۸۷	۱،۵۱۸۴۳۶۴	۳،۶۴۲۵۳۴
°۸۰	۱،۳۹۶۲۶۳۴	۲،۴۳۶۲۴۶۰	°۸۸	۱،۵۳۵۸۸۹۷	۴،۰۴۸۱۲۵۴
°۸۱	۱،۴۱۳۷۱۶۷	۲،۵۴۲۰۹۰۴	°۸۹	۱،۵۵۳۳۴۳۰	۴،۷۴۱۳۴۸۸
°۸۲	۱،۴۳۱۱۷۰۰	۲،۶۶۰۳۰۶۱	°۹۰	۱،۵۷۰۷۹۶۳	∞
°۸۳	۱،۴۴۸۶۲۳۳	۲،۷۹۴۲۱۹۰			

(337)

سولھویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

۸ جبزن لا جبز^۲ لا = ۲ جبز (ن + ۲) لا − ۴ جبزن لا + ۲ جبز (ن − ۲) لا

۲۔ اگر جم (ع + خ بہ) = جم فہ + خ جب فہ تو ثابت کرو کہ جب فہ = ± جب^۲ ع

= ± جبز^۲ بہ

۳۔ اگر جم (طہ + خ فہ) جم (ع + خ بہ) = ۱ تو ثابت کرو کہ

مسز^۲ فہ جمز^۲ بہ = جب^۲ ع، اور مسز^۲ بہ جمز^۲ فہ = جب^۲ طہ

۴۔ اگر مس ما = مس ع مسز بہ، مس ی = مم ع مسز بہ

تو ثابت کرو کہ مس (ما + ی) = جبز ۲ بہ قمز ۲ ع

۵۔ جب (ع + خ بہ) کو شکل ا + خ ب میں تحویل کرو۔

۶ — اگر لوگ و جب (طہ + خ فہ) = عہ + خ بہ

تو ثابت کرو کہ　۲ جم ۲ طہ = ۲ جمز ۲ فہ − ۴ لو^{۲} عہ

اور　جم (طہ − بہ) = لو^{۲} فہ جم (طہ + بہ)

۷ — اگر مس (لا + خ ما) = جب (۶ + خ و)

تو ثابت کرو کہ　ممز و جمز ۲ ما = مم ع جب ۲ لا

۸ — {جم (طہ + خ فہ) + خ جب (طہ − خ فہ)}$^{عہ + خ بہ}$ کو شکل

ا + خ ب میں بیان کرو —

۹ — ثابت کرو کہ

مس$^{-۱}$ (مس ۲ طہ + مسز ۲ فہ / مس ۲ طہ − مسز ۲ فہ) + مس$^{-۱}$ (مس طہ − مسز فہ / مس طہ + مسز فہ) = مس$^{-۱}$ (مم طہ ممز فہ)

۱۰ — اگر　۶ = جم عہ − $\frac{۱}{۳}$ جم ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ جم ۵ عہ − ....،

و = جب عہ − $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ عہ + $\frac{۱}{۵}$ جب ۵ عہ ...،

تو ثابت کرو کہ　۶ = $\frac{۱}{۴}$ π جبکہ ۰ ≥ عہ > $\frac{۱}{۲}$ π، اور جمز ۲ و = قط عہ

۱۱ — ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

۱ + جم ۴ طہ / ۴! + جم ۸ طہ / ۸! + جم ۱۲ طہ / ۱۲! + ...

کا مجموعہ　$\frac{۱}{۲}$ {جم (جم طہ) جمز (جب طہ) + جم (جب طہ) جمز (جم طہ)} ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ

$\sum_{ن = ۰}^{ن = \infty}$ (−۱)^{ن} / ۲ن! · جب (۲ م + ۱) ن طہ / جب ن طہ

= ۲ $\sum_{پ = ۱}^{پ = م}$ {جم (جم پ طہ) جمز (جب پ طہ)} + جم عہ

لا ایک حقیقی عدد ہو مستدق نہیں ہوتا اگر ف $\leqslant$ ۱ لیکن مستدق ہوتا ہے اگر ف $>$ ۱ - کیونکہ $\Sigma \frac{1}{\text{ن}^{\text{ف}}}$ متسع ہے جبکہ ف $\leqslant$ ۱ اور مستدق ہے جبکہ ف $>$ ۱ -

حاصل ضرب $\left(1+\frac{\text{ی}}{1}\right)\left(1+\frac{\text{ی}}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\right)\cdots$ یقیناً متسع ہے

اگر ی کا حقیقی حصہ مثبت ہو، اور یہ حاصل ضرب مستدق نہیں ہوتا اگر ی کا حقیقی حصہ صفر ہو - جب ، ی کا حقیقی حصہ منفی ہو تو حاصل ضرب صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے - کیونکہ

لوک$_{\text{و}}$ $\left(1+\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\right) = \frac{\text{ی}}{\text{ن}} - \frac{\text{ی}^2}{2\text{ن}^2}\left(1+\text{ضن}\right)$ جہاں ضن اُن کی کافی طور پر بڑی تمام قیمتوں کے لئے ایک مستقل عدد سے کم ہے، اسلئے Σ لوک$_{\text{و}}$ $\left(1+\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\right)$ کا حقیقی حصہ $-\infty$ کی طرف متسع ہوتا ہے جبکہ ی کا حقیقی حصہ منفی ہو، پس

اوپر کا نتیجہ برآمد ہوتا ہے - یہ اِن واقعات پر مبنی ہے کہ $\Sigma \frac{1}{\text{ن}}$ متسع ہے

اور $\Sigma \frac{1}{\text{ن}^2}$ مستدق -

(348)

جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرنا

۲۸۲ — اب ہم وہ جملے معلوم کرینگے جو جیب اور جیب التمام کو لامتناہی حاصل ضربوں کے طور پر بیان کرتے ہیں جبکہ زاویہ کا دائری ناپ لا ہو - ہم اول لا کو حقیقی اور مثبت لینگے - اب

$$\text{جب لا} = 2\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{2}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}+\pi}{2}$$

$$= 2^3\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{4}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}+\pi}{4}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}+2\pi}{4}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}+3\pi}{4}$$

اور اس عمل کو جاری رکھنے سے

$$\text{جب لا} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}+\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}+۲\pi}{\text{ن}}\cdots\text{جب}\,\frac{\text{لا}+(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

جہاں ن، ۲ کی کوئی مثبت صحیح قوت ہے۔ پس

$$\text{جب لا} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}-\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$$

$$\left(\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}-\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)\cdots\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}-\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$$

اور چونکہ $\underset{\text{لا}=۰}{\text{نہایت}}\ \text{جب لا قم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \text{ن}$، اسلئے

$$\text{ن} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}\cdots\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$$

پس عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب لا}}{\text{ن جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}} = \left(۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\cdots$$

$$\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}}\right)$$

یہ دفعہ ۸۷ کے مسئلہ (۱۹) کی وہ خاص صورت ہے جبکہ ن، ۲ کی ایک قوت ہو۔ بلاشبہ ہم اُس عام مسئلہ کو اختیار کر سکتے تھے۔ فرض کرو $\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲) = \text{ر}$، تب اگر م کوئی عدد ہو ر سے چھوٹا تو

$$\text{جب لا} = \text{ن جب}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}\right)\text{ب}،$$

کیونکہ عددوں کے کسی جبٹ کے مجموعہ کا مقیاس ان کے مقیاسوں کے مجموعہ سے بڑھ نہیں سکتا۔ اب اگر سلسلہ $\Sigma\,|\text{ع}|$ مستدق ہو تو دفعہ ۲۸۰ میں جو کچھ ثابت ہوا ہے اس کی بموجب لامتناہی حاصل ضرب $\Pi\,(1+|\text{ع}|)$ مستدق ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی مقررہ عدد صہ کے جواب میں ن متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$(1+|\text{ع}_{\text{ن}}|)(1+|\text{ع}_{\text{ن}+1}|)\cdots(1+|\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}}|)-1<\text{صہ}$$

اسلئے ر کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے

$$|(1+\text{ع}_{\text{ن}})(1+\text{ع}_{\text{ن}+1})\cdots\cdots(1+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})-1|<\text{صہ}$$

اور اسلئے حاصل ضرب $\Pi\,(1+\text{ع})$ مستدق ہے۔ یہ ہو سکتا ہے کہ $\Pi\,(1+\text{ع})$ مستدق ہو لیکن سلسلہ $\Sigma\,|\text{ع}|$ منتشر، ایسی صورت میں حاصل ضرب $\Pi\,(1+\text{ع})$ کو نا مطلقاً مستدق یا نیم مستدق کہتے ہیں۔

مسئلہ بالا سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$(1+\text{ل}_1\,\text{ی})(1+\text{ل}_2\,\text{ی})\cdots(1+\text{ل}_{\text{ن}}\,\text{ی})\cdots\cdots$$

مستدق ہے اگر

$$|\text{ل}_1|+|\text{ل}_2|+\cdots\cdots+|\text{ل}_{\text{ن}}|+\cdots\cdots$$

ایک مستدق سلسلہ ہو۔

(342) فرض کرو کہ حقیقی عددوں کا ایک تواتر ب_1، ب_2، ... $\text{ب}_{\text{ن}}$، ... ہے جو سب کے سب ہم علامت ہیں اور فرض کرو کہ $\text{نہا}_{\text{ن}=\infty}\ \text{ب}_{\text{ن}}=0$،
لیکن فرض کرو کہ سلسلہ

$$\text{ب}_1+\text{ب}_2+\cdots+\text{ب}_{\text{ن}}+\cdots\cdots$$

متسع ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب Π (۱ + خ بن) مستدق نہیں ہے۔ اس کو ثابت کرنے کے لئے ہم دیکھتے ہیں کہ

۱ + خ بن = (۱ + بن^2)$^{\frac{1}{2}}$ و$^{\pm \text{خ} \text{فن}}$ جہاں مس فن = ۱ ÷ بن ۱

اور ± خ فن میں اوپر کی مثبت علامت لینی چاہئے اگر بن مثبت ہے اور منفی علامت لینی چاہئے اگر بن منفی ہے۔ اگر ضہ اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ایک سے کم ہو تو ن کی تمام کافی طور پر بڑی قیمتوں کے لئے فن > (۱ - ضہ) مس فن، اور اس لئے

Σ فن مستدق نہیں ہو سکتا۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ Π (۱ + خ بن) مستدق نہیں ہو سکتا اگرچہ Π (۱ + بن^2)$^{\frac{1}{2}}$ مستدق ہوگا اگر سلسلہ

Σ بن^2 مستدق ہو۔ اس مسئلہ کے جواز کے لئے یہ صرحاً کافی ہے کہ تمام عدد بن سوائے ایک محدود حصہ کے ہم علامت ہونے چاہئیں

اگر ی، ملتف عدد لا + خ ما ہو اور عدد ا۱، ا۲، ... ان ...

سب کے سب مثبت ہوں اور ایسے ہوں کہ Σ ان متسع ہے تو حاصل ضرب

Π (۱ + ان ی) یقیناً متسع ہے اگر ی کا حقیقی حصہ مثبت ہو۔ کیونکہ رقموں ۱ + ان ی کے مقیاسوں کا حاصل ضرب، حاصل ضرب Π (۱ + ان لا) سے بڑا ہے اور یہ ثانی الذکر حاصل ضرب متسع ہے جبکہ لا مثبت ہو۔

حاصل ضرب (۱ + $\frac{\text{لا}}{۱}$) (۱ + $\frac{\text{لا}}{۲}$) ... (۱ + $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$) ... جبکہ

اگر یہ سلسلہ مستدق ہے تو لامتناہی حاصل ضرب صفر سے مختلف ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسکا عکس بھی درست ہے اگر یہ لامتناہی حاصل ضرب صفر کی طرف مستدق ہو تو سلسلہ بالا $-\infty$ کی طرف منتشر ہوتا ہے اور اس لئے ہم اس صورت کو حسب سابق خارج کرتے ہیں۔

اب یہ ثابت کرنے کے لئے کہ لامتناہی سلسلہ کا استدقاق لامتناہی حاصل ضرب کے استدقاق کے مماثل ہے ہم دیکھتے ہیں کہ سلسلہ کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ہر صہ کے جواب میں ن منتخب ہو سکے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$\left|\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{ی}_{\text{ن}+1}\,\text{ی}_{\text{ن}+2}\cdots\text{ی}_{\text{ن}+\text{ر}}\right)\right| \text{ یا } \left|\text{لوک}_{\text{و}}\left(1+\text{غ}_{\text{ن،ر}}\right)\right| < \text{صہ}$$

اگر یہ شرط پوری ہو تو دفعہ ۲۳۰ (۱) میں ثابت کردہ مسئلہ

$$\left|\text{و}^{\text{ی}}-1\right| < |\text{ی}|\left(1+\tfrac{1}{2}|\text{ی}|\,\text{و}^{|\text{ی}|}\right)$$

کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے $\left|\text{غ}_{\text{ن،ر}}\right| < \text{صہ}\left(1+\tfrac{1}{2}\,\text{صہ}\,\text{و}^{\text{صہ}}\right)$۔ اب اگر ضہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو صہ منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$\text{صہ}\left(1+\tfrac{1}{2}\,\text{صہ}\,\text{و}^{\text{صہ}}\right) < \text{ضہ}$، اور اسلئے ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے $\left|\text{غ}_{\text{ن،ر}}\right|$ یا $\left|\text{ی}_{\text{ن}+1}\,\text{ی}_{\text{ن}+2}\cdots\text{ی}_{\text{ن}+\text{ر}}-1\right| < \text{ضہ}$، اس لئے لامتناہی حاصل ضرب مستدق ہے۔ اس کے بالعکس مان لو کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ

$\left|\text{غ}_{\text{ن،ر}}\right| < \text{صہ}$ ۔ دفعہ ۲۴۹ (۱) میں یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ اگر

$|ی| < ۱$ تو

$$\left|لوک_{و}(۱+ی)\right| < |ی| \left(۱ + \frac{۱}{۲} \frac{|ی|}{۱ - |ی|}\right)$$

اس لئے $\left|لوک_{و}(۱+غ_{ن,ر})\right| < صہ\left(۱ + \frac{۱}{۲}\frac{صہ}{۱-صہ}\right)$

یا $\quad لوک_{و}\left(ی_{ن+۱}\ ی_{ن+۲} \cdots ی_{ن+ر}\right) < ضہ$ (340)

بشرطیکہ $صہ\left(۱ + \frac{۱}{۲}\frac{صہ}{۱-صہ}\right) < ضہ$، اور اگر ضہ مقررہ ہے تو صہ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ یہ شرط پوری ہو۔ پس سلسلہ کے استدقاق کی شرط پوری ہو چکی۔

۲۸۰ — فرض کرو کہ حقیقی مثبت عددوں کا ایک تواتر $ع_{۱}$، $ع_{۲}$، $ع_{۳}$، ... $ع_{ن}$... ہے جنمیں سے ہر عدد ایک سے کم ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$(۱+ع_{۱})(۱+ع_{۲})\cdots(۱+ع_{ن})\cdots \text{ یا } \prod_{۱}^{\infty}(۱+ع)$$

اور $\quad (۱-ع_{۱})(۱-ع_{۲})\cdots(۱-ع_{ن})\cdots$ یا $\prod_{۱}^{\infty}(۱-ع)$

دونوں مستدق ہوتے ہیں اگر سلسلہ $ع_{۱} + ع_{۲} + \cdots + ع_{ن} + \cdots$ مستدق ہو اور مستدق نہیں ہوتے اگر یہ سلسلہ متسع ہو۔

چونکہ

$$(۱+ع_{۱})(۱+ع_{۲})\cdots(۱+ع_{ن}) > ۱ + ع_{۱} + ع_{۲} + \cdots + ع_{ن}$$

اسلئے یہ واضح ہے کہ حاصل ضرب $\prod(۱+ع)$ متسع ہوتا ہے اگر سلسلہ $ع_{۱} + ع_{۲} + \cdots$ متسع ہو۔

نیز

$$\frac{1}{(1-ع_1)(1-ع_2)\cdots(1-ع_ن)} > (1+ع_1)(1+ع_2)\cdots(1+ع_ن)$$

پس اگر ج ع منتشر ہو تو حاصل ضرب $(1-ع_1)(1-ع_2)\cdots(1-ع_ن)$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔

پھر اگر ج ع مستدق ہو تو فرض کرو کہ صہ اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، .... کے لئے

$$ع_{ن+1} + ع_{ن+2} + \cdots + ع_{ن+ر} < صہ$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(1-ع_{ن+1})(1-ع_{ن+2})\cdots(1-ع_{ن+ر})$$

$$> 1-(ع_{ن+1}+ع_{ن+2}+\cdots+ع_{ن+ر}) > 1-صہ$$

اور اسلئے $\left|(1-ع_{ن+1})(1-ع_{ن+2})\cdots(1-ع_{ن+ر})-1\right| < صہ$

اور اس طرح وہ شرط جو لاتناہی حاصل ضرب $\Pi(1-ع)$ کے استدقاق کے لئے دفعہ ۲۷۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(1+ع_{ن+1})(1+ع_{ن+2})\cdots(1+ع_{ن+ر})$$

$$< \frac{1}{(1-ع_{ن+1})(1-ع_{ن+2})\cdots(1-ع_{ن+ر})} < \frac{1}{1-صہ}$$

اگر $|ی| < 1$ تو

$$|\text{لوک}_{و}(1+ی)| < |ی|\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{|ی|}{1-|ی|}\right)$$

اس لئے $|\text{لوک}_{و}(1+غ_{ن,ر})| < صہ\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{صہ}{1-صہ}\right)$

یا $\quad \text{لوک}_{و}(ی_{ن+1}\,ی_{ن+2}\cdots ی_{ن+ر}) < ضہ$ (340)

بشرطیکہ $صہ\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{صہ}{1-صہ}\right) < ضہ$، اور اگر ضہ مقررہ ہے تو صہ متعین ہو سکتا ہے ایسا کہ یہ شرط پوری ہو۔ پس سلسلہ کے استدقاق کی شرط پوری ہو چکی۔

۲۸۰ — فرض کرو کہ حقیقی مثبت عددوں کا ایک تواتر $ع_1$، $ع_2$، ... $ع_ن$... ہے جنمیں سے ہر عدد ایک سے کم ہے۔ یہ دکھایا جائیگا کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$(1+ع_1)(1+ع_2)\cdots(1+ع_ن)\cdots \text{ یا } \prod_1^{\infty}(1+ع)$$

اور $\quad (1-ع_1)(1-ع_2)\cdots(1-ع_ن)\cdots \text{ یا } \prod_1^{\infty}(1-ع)$

دونوں مستدق ہوتے ہیں اگر سلسلہ $ع_1+ع_2+\cdots+ع_ن+\cdots$ مستدق ہو اور مستدق نہیں ہوتے اگر یہ سلسلہ متسع ہو۔

چونکہ

$$(1+ع_1)(1+ع_2)\cdots(1+ع_ن) > 1+ع_1+ع_2+\cdots+ع_ن$$

اسلئے یہ واضح ہے کہ حاصل ضرب $\prod(1+ع)$ متسع ہوتا ہے اگر سلسلہ $ع_1+ع_2+\cdots$ متسع ہو۔

نیز

$$(1+\text{ع}_1)(1+\text{ع}_2)\cdots(1+\text{ع}_\text{ن}) < \frac{1}{(1-\text{ع}_1)(1-\text{ع}_2)\cdots(1-\text{ع}_\text{ن})}$$

پس اگر $\sum \text{ع}$ متسع ہو تو حاصل ضرب $(1-\text{ع}_1)(1-\text{ع}_2)\cdots(1-\text{ع}_\text{ن})$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے اور اسلئے غیر مستدق خیال کیا جاتا ہے۔

پھر اگر $\sum \text{ع}$ مستدق ہو تو فرض کرو کہ صہ اختیاری طور پر منتخبہ ایک مثبت عدد ہے جو ایک سے کم ہے تو ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، .... کے لئے

$$\text{ع}_{\text{ن}+1} + \text{ع}_{\text{ن}+2} + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}} < \text{صہ}$$

پس حسب دفعہ ۲۲۶

$$(1-\text{ع}_{\text{ن}+1})(1-\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1-\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})$$

$$> 1-(\text{ع}_{\text{ن}+1}+\text{ع}_{\text{ن}+2}+\cdots+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}}) > 1-\text{صہ}$$

اور اسلئے $\left|(1-\text{ع}_{\text{ن}+1})(1-\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1-\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})-1\right| < \text{صہ}$

اور اس طرح وہ شرط جو لامتناہی حاصل ضرب $\prod(1-\text{ع})$ کے استدقاق کے لئے دفعہ ۲۷۹ میں حاصل ہوئی تھی پوری ہوتی ہے۔

نیز

$$(1+\text{ع}_{\text{ن}+1})(1+\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1+\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})$$

$$< \frac{1}{(1-\text{ع}_{\text{ن}+1})(1-\text{ع}_{\text{ن}+2})\cdots(1-\text{ع}_{\text{ن}+\text{ر}})} < \frac{1}{1-\text{صہ}}$$

(341

اور اسلئے $|(1+ع_{ن+1})(1+ع_{ن+2})\cdots(1+ع_{ن+ر})-1| < \frac{ص}{1-ص}$

پس اگر ضہ اختیاری طور پہ منتخبہ ہو تو ہم صہ کو متعین کرسکتے ہیں ایسا کہ صہ / (۱ ـ صہ) < ضہ اور اسلئے ن متعین ہوسکتا ہے ایسا کہ ر = ۱، ۲، ۳، ... کے لئے

$$|(1+ع_{ن+1})(1+ع_{ن+2})\cdots(1+ع_{ن+ر})-1| < ض$$

اس لئے حاصل ضرب $\prod(1+ع)$ مستدق ہے۔ یہ واضح ہے کہ اس شرط کی بجائے کہ ع۱، ع۲، ... ، عن، ... سب کے سب ایک سے کم ہوں یہ وسیع شرط رکھی جاسکتی ہے کہ ان عددوں کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد ایک سے کم ہوں۔ کیونکہ ہم $\prod(1+ع)$ یا $\prod(1-ع)$ سے اجزائے ضربی کی ایک محدود تعداد اسکے استدقاق کو متاثر کئے بغیر علیحدہ کرسکتے ہیں۔

۲۸۱ — اب لامتناہی حاصل ضرب

$$(1+ع_1)(1+ع_2)\cdots(1+ع_ن)\cdots$$

پر غور کرو جہاں ع۱، ع۲، ... مختلف عدد ہیں۔ ہم یہ دکھائینگے کہ ع۱، ع۲، ... عن، ... کے مقیاسوں کا سلسلہ

$$|ع_1|+|ع_2|+\cdots+|ع_ن|+\cdots$$

مستدق ہو تو اوپر کا لامتناہی حاصل ضرب بھی مستدق ہے۔ اس صورت میں لامتناہی حاصل ضرب کو مطلقاً مستدق کہتے ہیں۔

ہم دیکھتے ہیں کہ

$$|(1+ع_ن)(1+ع_{ن+1})\cdots(1+ع_{ن+ر})-1|$$
$$\le (1+|ع_ن|)(1+|ع_{ن+1}|)\cdots(1+|ع_{ن+ر}|)-1$$

مقیاس کو تعبیر کرتا ہے تو اِس لامتناہی حاصل ضرب کے استدقاق
کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ $|ض_ن|$ اور $ط_ن$ دونوں معیّن
قیمتوں کی طرف مستدق ہوں جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے۔ اگر ن
کے ساتھ $|ض_ن|$ بھی لاانتہا بڑھے تو اس لامتناہی حاصل ضرب کو
متسع کہتے ہیں۔ دیگر صورتوں میں جبکہ یہ حاصل ضرب مستدق نہ ہو اسکو
اہتزازی حاصل ضرب کہتے ہیں، لیکن اہتزازی حاصل ضربوں کو اکثر
متسع کہا جاتا ہے۔

وہ ضروری اور کافی شرط کہ لامتناہی حاصل ضرب $ی_۱ ی_۲ ... ی_ن$
.... ایک معیّن انتہا (صفر سے مختلف) کی طرف مستدق ہو یہ ہے کہ
اختیاری طور پر منتخبہ ہر مثبت عدد صہ کے جواب میں ایک صحیح عدد
ن منتخب ہو سکے ایسا کہ ر کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، .... کے لئے
$|ی_{ن+۱} ی_{ن+۲} ی_{ن+۳} ... ی_{ن+ر} - ۱| < صہ$ ۔ یہ ثابت کرنے کے لئے
کہ یہ شرط ضروری ہے مان لو کہ $ض_ن$، ض کی طرف مستدق ہوتا
ہے جو صفر سے مختلف ایک عدد ہے۔ تب عددوں $|ض_۱|$، $|ض_۲|$،
.... $|ض_ن|$ ... کے ایک محدود جٹ کے سوا باقی سب عدد
$|ض| - ضہ$ سے بڑے ہیں جہاں ضہ اختیاری طور پر منتخبہ ایک
مثبت عدد ہے ایسا کہ $|ض| - ضہ > ۰$ ۔ نیز ان عددوں میں سے
کوئی عدد معدوم نہیں ہوتا، اس لئے ایک مثبت عدد ک موجود
ہے جو سب عددوں $|ض_۱|$، $|ض_۲|$، ... $|ض_ن|$ ... سے
چھوٹا ہے۔ اب چونکہ $ض_ن$ ایک معیّن انتہا کی طرف مستدق ہوتا
ہے صہ کے جواب میں ن منتخب ہو سکتا ہے ایسا کہ $|ض_{ن+ر} - ض_ن| < ک صہ$ ر

(339)

کی تمام قیمتوں ۱، ۲، ۳، ... کے لئے۔

پس $|ی_{ن+۱} ی_{ن+۲} ی_{ن+۳} ... ی_{ن+ر} - ۱| < ک^{م} | ی_۱ ی_۲ ... ی_ن | < صہ$

اور اسلئے مذکورہ شرط ضروری ہے۔

پھر یہ ثابت کرنیکے لئے کہ یہ شرط کافی ہے مان لوکہ وہ پوری ہوتی ہے۔ تب صہ کی کسی مقررہ قیمت کے جواب میں ن مقرر ہوسکتا ہے ایسا کہ $ی_{ن+۱} ی_{ن+۲} ... ی_{ن+ر} = ۱ + غ_{ن، ر}$ جہاں ر = ۱، ۲، ... کے لئے $|غ_{ن، ر}| < صہ$۔ تب $ض_{ن+ر} = ض_ن (۱ + غ_{ن، ر})$

اور اس لئے ر کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے $|ض_{ن+ر}| < |ض_ن| (۱ + صہ)$۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اعداد $|ض_۱|$، $|ض_۲|$، $|ض_۳|$، ... $|ض_ن|$، ... سب کے سب ایک ثابت مثبت عدد لہ سے کم ہیں۔ اب چونکہ $|ی_{ن+۱} ی_{ن+۲} ... ی_{ن+ر} - ۱| < صہ$ اسلئے $|ض_{ن+ر} - ض_ن| < لہ صہ$ جہاں ر = ۱، ۲، ۳، ...

اور چونکہ صہ کو کافی چھوٹا لینے سے لہ صہ اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ $ض_ن$ ایک معین انتہا کی طرف مستدق ہوتا چلا جائے۔

لاانتہاہی حاصل ضرب $ی_۱ ی_۲ ی_۳ ... ی_ن ....$ کے استدقاق پر غور کرنیکا آسان طریقہ سلسلہ

$$لوک_و ی_۱ + لوک_و ی_۲ + ... + لوک_و ی_ن + ...$$

پر غور کرنیکا ہے۔

جہاں عہ دائری ناپ کی اکائی ہے۔

۱۳ — یولر کا مسئلہ $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{جم } \frac{۱}{۲}\text{لا جم } \frac{۱}{۴}\text{لا جم } \frac{۱}{۸}\text{لا} \ldots\ldots$

سے اخذ کرو

$$(۱) \quad \frac{۱}{\text{لوگ}_\text{و}\text{لا}} = \frac{۱}{\text{لا} - ۱} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۲}} + ۱} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۴}} + ۱}$$

$$+ \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۸}} + ۱} + \ldots\ldots ،$$

$$(۲) \quad \frac{۱}{\text{لا}^۲} = \text{قم}^۲\text{ لا} + \frac{۱}{۲^۲}\text{قطر}^۲ \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۱}{۲^۴}\text{قطر}^۲ \frac{۱}{۴}\text{لا}$$

$$+ \frac{۱}{۲^۸}\text{قطر}^۲ \frac{۱}{۸}\text{لا} + \ldots\ldots$$

(+)

(338)

ستر ھواں باب

لامتناہی حاصل ضرب

لامتناہی حاصل ضربوں کا استدقاق

۲۷۹ — فرض کرو کہ حقیقی یا ملتف عددوں کا ایک تواتر $ی_1$، $ی_2$، $ی_3$ .... $ی_ن$ .... ہے جو کسی مقررہ قانون کی بموجب بنا ہے۔ ان عددوں میں سے پہلے ن عددوں کے حاصل ضرب $ض_ن = ی_1 ی_2 .. ی_ن$ پر غور کرو۔

اگر $ض_ن$ صفر سے مختلف ایک معین انتہا ض کی طرف مستدق ہو جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جائے تو ہم کہتے ہیں کہ ض لامتناہی حاصل ضرب $ی_1 ی_2 .... ی_ن ....$ کی انتہا یا انتہائی قیمت ہے اور یہ لامتناہی حاصل ضرب مستدق ہے۔

مستدق لامتناہی حاصل ضربوں کی جماعت سے ان حاصل ضربوں کو خارج کردینا سہولت بخش ہے جنکے لئے $ض_ن$ صفر کی طرف مستدق ہو۔

اگر $ض_ن = |ض_ن| (جم ط_ن + خ جب ط_ن)$ جہاں $|ض_ن|$، $ض_ن$ کے

جہاں $\text{ب} = \left(1 - \dfrac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}}}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)$

اب ن کو $2\,\text{لا}/\pi$ سے بڑا لیکر م کو منتخب کیا جا سکتا ہے ایسا کہ (843)
$\text{لا} < (\text{م}+1)\pi$، تب ب مثبت ہے اور ایک سے کم۔ نیز دفعہ ۲۲۶ کے مطابق

$$\text{ب} > 1 - \text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \left\{ \text{قم}^2 \frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}} + \cdots + \text{قم}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}} \right\}$$

اب ہم دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھا چکے ہیں کہ اگر $\text{طہ} < \frac{1}{2}\pi$ تو

$$\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} > \frac{\text{جب} \frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi}$$

پس اگر $\text{ف} < \frac{\text{ن}}{2}$ تو $\text{قم}^2 \frac{\text{ف}\pi}{\text{ن}} < \frac{\text{ن}^2}{4\,\text{ف}^2}$، نیز $\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2}$

اسلئے $\text{ب} > 1 - \frac{\text{لا}^2}{4} \left\{ \frac{1}{(\text{م}+1)^2} + \frac{1}{(\text{م}+2)^2} + \cdots + \frac{1}{\text{ر}^2} \right\}$،

$$> 1 - \frac{\text{لا}^2}{4} \left\{ \frac{1}{\text{م}(\text{م}+1)} + \frac{1}{(\text{م}+1)(\text{م}+2)} + \cdots + \frac{1}{\text{ر}(\text{ر}-1)} \right\}،$$

$$> 1 - \frac{\text{لا}^2}{4} \left(\frac{1}{\text{م}} - \frac{1}{\text{ر}} \right) > 1 - \frac{\text{لا}^2}{4\,\text{م}}$$

چونکہ ب، ایک اور $1 - \frac{\text{لا}^2}{4\,\text{م}}$ کے درمیان ہے اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں

$\text{ب} = ۱ - \frac{\text{طہ}\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{م}^۲}$ جہاں طہ ، صفر اور ایک کے درمیان ہے تب

$$\text{جب لا} = \text{ن جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^۲\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{طہ}\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{م}^۲}\right)$$

جہاں م ، $\frac{۱}{۲}$ ن سے کم کوئی عدد ہے ایسا کہ لا $<$ (م + ۱) π ۔

اب فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑا ہو جاتا ہے لیکن م ثابت رہتا ہے تو چونکہ حاصل ضرب میں کی ہر جیب کی بجائے متناظر دائری ناپ رکھا جا سکتا ہے اور چونکہ جم $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ کی انتہا ایک ہے اسلئے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\cdots\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{م}^۲\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{طہ}_۱\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{م}^۲}\right)$$

جہاں طہ$_۱$ ، طہ کی انتہائی قیمت ہے جبکہ ن کو لا انتہا بڑا لیا جاتا ہے اور اسلئے طہ$_۱$ ایسا ہے کہ $۰ \leq \text{طہ}_۱ \leq ۱$ ۔

(345) اب م کو کافی طور پر بڑا لینے سے ہم جزو ضربی $۱ - \frac{\text{طہ}_۱\,\text{لا}^۲}{۴\,\text{م}^۲}$ کو ایک کے اتنا قریب لا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں ، اسلئے جب لا کے لئے لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر یہ جملہ حاصل ہوتا ہے[۱]

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲^۲\pi^۲}\right)\left(۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۳^۲\pi^۲}\right)\cdots\quad (۱)$$

[۱] اس دفعہ کی تحقیق "Schlömilch" سے منسوب ہے ، دیکھو اسکی کتاب Compendium der höheren Analysis, vol. 1

یہ قید کہ لا مثبت ہونا چاہیئے صریحاً اٹھالی جا سکتی ہے۔

۲۸۳ — اگر ن جفت ہو تو دفعہ ۸۶ کے ضابطہ (۱۷)

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{3\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{(\text{ن}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{م}-1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{\text{ط}\,\text{لا}^2}{\text{م}^2}\right)$$

جہاں م کوئی محدود عدد ہے ایسا کہ $2\,\text{لا} < (2\text{م}+1)\pi$، اور ط صفر اور ایک کے درمیان ہے۔ پس جم لا کے لئے لا متناہی حاصل ضرب کے طور پر ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\cdots(2)$$

۲۸۴ — ضابطہ (۱) اور (۲) کی اہمیت کے مدنظر ہم ان کا دوسرا ثبوت دینگے جو سیرٹ[1] کی ٹرگنومیٹری سے لیا گیا ہے۔ ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{ن جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-2)}\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right),$$

$$\text{جم لا} = \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}}\left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

(346) کو جو ن کی جفت قیمتوں کے لئے درست ہیں لیکر ہم ان کو ضابطہ

$1 - \frac{\text{جب}^2\text{عہ}}{\text{جب}^2\text{بہ}} = \text{جم}^2\text{عہ}\left(1 - \frac{\text{مس}^2\text{عہ}}{\text{مس}^2\text{بہ}}\right)$ کے ذریعہ حسب ذیل شکلوں میں

[1] Serret's Trigonometry

تحویل کرسکتے ہیں

$$\text{جب لا} = \text{ن جم}^{\text{ن}-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(۱-\frac{\text{مس}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^۲\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)،$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}\text{ن}}\left(۱-\frac{\text{مس}^۲\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^۲\frac{(۲\text{ر}-۱)\pi}{۲\text{ن}}}\right)$$

اب دفعہ ۹۶ مثال (۱) میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب، طہ، صفر سے $\frac{۱}{۲}\pi$ تک بڑھتا ہے $\frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}}$ گھٹتا ہے اور $\frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}}$ بڑھتا ہے اس لئے

$$\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{عہ}}{\text{جب}^۲\text{بہ}}\right) > \left(۱-\frac{\text{عہ}^۲}{\text{بہ}^۲}\right) > \left(۱-\frac{\text{مس}^۲\text{عہ}}{\text{مس}^۲\text{بہ}}\right)$$

جہاں ہر جملہ کی مطلق قیمت لینی چاہیے۔ فرض کرو کہ ن اسقدر بڑا ہے کہ $\pm\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{۱}{۲}\pi$

تب $\pm\text{جب}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \pm\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \pm\text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ اور $\pm\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} < ۱$ جہاں علامتیں ایسی لینی چاہئیں کہ ہر جملہ اپنی حسابی قیمت رکھے۔ جب لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm\text{جب لا} > \pm\text{لا} \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(۱-\frac{\text{لا}^۲}{\text{ر}^۲\pi^۲}\right)،$$

اور $\pm\text{جب لا} > \pm\text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \times \text{لا} \prod_{\text{ر}=۱}^{\text{ر}=\frac{۱}{۲}(\text{ن}-۲)}\left(۱-\frac{\text{لا}^۲}{\text{ر}^۲\pi^۲}\right)$

اور جم لا کے دو جملوں سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\pm\, \text{جم لا} > \pm \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{ر}-1)^2 \pi^2}\right)$$

اور $$\pm\, \text{جم لا} > \pm\, \text{جم}^{\text{ن}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}\text{ن}} \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{ر}-1)^2 \pi^2}\right)$$

اب ہم جانتے ہیں کہ $\text{جم}^{\text{ن}} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = 1 - \text{ص}_{\text{ن}}$ جہاں $\text{ص}_{\text{ن}}$ ایک عدد ہے جو صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔ اسلئے

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)\left(1 - \text{ط}_{\text{ن}}\right)$$

$$\text{جم لا} = \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{4\,\text{لا}^2}{(2\text{ن}-1)^2\pi^2}\right)\left(1 - \text{طَ}_{\text{ن}}\right)$$

جہاں $\text{ط}_{\text{ن}}$، $\text{طَ}_{\text{ن}}$ صفر کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے، پس اس طرح ضابطے (۱) اور (۲) حاصل ہوتے ہیں (347)

اگر ہم ضابطوں

$$\text{جب لا} = \text{ن جب} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2 \frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)$$

$$\text{جم لا} = \text{جم} \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1 - \frac{\text{جب}^2 \text{لا}}{\text{جب}^2 \frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

کو جو ن کی طاق قیمت کے لئے درست ہیں استعمال کرتے اور ان سے ضابطے

$$\text{جب لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\ \text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1-\frac{\text{مس}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right),$$

$$\text{جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ر}=\frac{1}{2}(\text{ن}-1)} \left(1-\frac{\text{مس}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}}{\text{مس}^2\frac{(2\text{ر}-1)\pi}{2\text{ن}}}\right)$$

حاصل کرتے تو استدلال بالا سے وہی نتیجے حاصل ہوتے ۔

۲۸۵ — اب ہم ملتف عدد ی = لا + خ ما کی صورت پر غور کرینگے ۔ دفعہ ۲۸۲ کے مطابق ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{جب ی} = \text{ن جب}\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\ \text{جم}\frac{\text{ی}}{\text{ن}}\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{2\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{م}\pi}{\text{ن}}}\right)\text{ب}،$$

$$\text{جہاں}\quad \text{ب} = \left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\text{جب}^2\frac{\text{ی}}{\text{ن}}}{\text{جب}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)$$

جہاں ن ایک جفت عدد ہے اور $\text{ر} = \frac{1}{2}(\text{ن}-2)$۔ ہمیں ب کی قیمت کے لئے حدود متعین کرنا ہے ۔ فرض کرو کہ جب $\frac{\text{ی}}{\text{ن}}$ کا مقیاس غہ سے تعبیر ہوتا ہے، تب دفعہ ۲۸۱ کے مطابق، چونکہ کسی عددوں کے مجموعہ کا مقیاس انکے مقیاسوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے، ہم دیکھتے ہیں کہ (ب - ۱) کا مقیاس جملہ

$$\left(1+\frac{\text{غہ}^2}{\text{جب}^2\frac{(\text{م}+1)\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(1+\frac{\text{غہ}^2}{\text{جب}^2\frac{\text{ر}\pi}{\text{ن}}}\right)-1$$

(348)

سے کم ہے۔ اب ہم جانتے ہیں کہ $\text{و}^{\text{ا غہ}^2} > 1 + \text{ا غہ}^2$ اگر ا کوئی مثبت عدد ہو، اسلئے

$$(\text{ب} - 1)\ \text{کا مقیاس} < \text{و}^{\text{غہ}^2\left(\frac{\text{قم}^2\text{ن}^2}{\pi^2(1+\text{م})^2}+\cdots+\frac{\text{قم}^2\text{ن}^2}{\pi^2\text{ر}^2}\right)} - 1$$

اور یہ

$$< \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\text{غہ}^2\text{ن}^2\left\{\frac{1}{\text{م}(1+\text{م})}+\frac{1}{(1+\text{م})(2+\text{م})}+\cdots+\frac{1}{\text{ر}^2}\right\}} - 1,$$

یا

$$< \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\text{غہ}^2\text{ن}^2\left\{\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{1+\text{م}}+\frac{1}{1+\text{م}}-\frac{1}{2+\text{م}}+\cdots-\frac{1}{\text{ر}}\right\}} - 1,$$

اسلئے $(\text{ب} - 1)$ کا مقیاس $< \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\text{غہ}^2\text{ن}^2\left(\frac{1}{\text{م}}-\frac{1}{\text{ر}}\right)} - 1$

یا

$$< \text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\text{غہ}^2\text{ن}^2}{\text{م}}} - 1$$

پس $(\text{ب} - 1)$ کا مقیاس صفر اور $\text{و}^{\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\text{غہ}^2\text{ن}^2}{\text{م}}} - 1$ کے درمیان واقع ہے۔ اب

$$\text{غہ}^2 = \text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جمز}^2\frac{\text{ما}}{\text{ن}} + \text{جم}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\,\text{جبز}^2\frac{\text{ما}}{\text{ن}} = \text{جب}^2\frac{\text{لا}}{\text{ن}} + \text{جبز}^2\frac{\text{ما}}{\text{ن}}$$

اسلئے $\text{غہ}^2\text{ن}^2$ کی انتہائی قیمت $\text{لا}^2 + \text{ما}^2$ ہے اور اسلئے $(\text{ب} - 1)$ کے مقیاس کی انتہا جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے صفر اور $\text{و}^{\frac{\text{لا}^2+\text{ما}^2}{\pi^2\text{م}}} - 1$ کے درمیان واقع ہوتی ہے، اور چونکہ $\text{و}^{\frac{\text{لا}^2+\text{ما}^2}{\pi^2\text{م}}}$ کو م کے کافی بڑا لینے سے ایک کے اتنا قریب لایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے (ب - ۱) کے مقیاس کو جتنا چاہیں اتنا چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ جب، ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو جب ی کے جملہ کی

ہر جیب آخر لا مر اپنی دلیل کے مساوی ہو جاتی ہے، اسلئے

$$\text{جب ی} = \text{ی}\left(1-\frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ی}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

اسی طرح ضابطہ

$$\text{جم ی} = \left(1-\frac{4\text{ی}^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\text{ی}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{4\text{ی}^2}{5^2\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔

۲۸۶ — ضابطے (۱) اور (۲) مطلق استدقاق کی اُس شرط کو جو دفعہ ۲۸۱ میں بیان ہوئی ہے پورا کرتے ہیں کیونکہ یہ دو سلسلے $\frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\sum_1^\infty\frac{1}{\text{ن}^2}$ اور $\frac{4\text{لا}^2}{\pi^2}\sum_1^\infty\frac{1}{(2\text{ر}-1)^2}$ مستدق ہیں۔ اِن ضابطوں میں سے کسی حاصل ضرب کا ہر دو درجی جزو ضربی دو خطی اجزائے ضربی میں تحلیل کیا جا سکتا ہے، چنانچہ

(349)

$$\text{جب لا} = \text{لا}\left(1+\frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1-\frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1+\frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\left(1-\frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\ldots,$$

$$\text{جم لا} = \left(1+\frac{2\text{لا}}{\pi}\right)\left(1-\frac{2\text{لا}}{\pi}\right)\left(1+\frac{2\text{لا}}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2\text{لا}}{3\pi}\right)\ldots\ldots$$

جنکو شکلوں

$$\text{جب لا} = \text{لا}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

$$\text{جم لا} = \prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1+\frac{2\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

میں لکھا جا سکتا ہے۔

اِن آخری شکلوں میں حاصل ضرب نیم مستدق ہیں کیونکہ حسب ذیل حاصل ضرب

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)\text{،}\ \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)\text{،}\ \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{2\,\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)\text{،}\ \prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{2\,\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)$$

متسع ہیں اسوجہ سے کہ سلسلے $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\text{ر}}$ ، $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2\text{ر}-1}$ متسع ہیں۔

کسی نیم مستدق حاصل ضرب میں نیم مستدق سلسلہ کی خاصیت کے مماثل یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ اجزائے ضربی کی ترتیب کو بدل دینے سے حاصل ضرب کی قیمت پر اثر پڑتا ہے، ہم ضابطوں (۳) اور (۴) کو صحیح خیال کر سکتے ہیں صرف اسوقت جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ ر کی مثبت قیمتوں کی تعداد اسکی منفی قیمتوں کی تعداد کے مساوی لیگئی ہے، اِس طرح (۳) اور (۴) کو ان شکلوں

$$\text{جب لا} = \text{لا}\ \text{نہا}_{\text{ن}=\infty}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)\text{،}\quad \text{جم لا} = \text{نہا}_{\text{ن}=\infty}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1+\frac{2\,\text{لا}}{(2\text{ر}-1)\pi}\right)$$

کا اختصار سمجھنا چاہئے۔

۲۸۷ — ویرسٹراس[1] (Weierstrass) نے یہ ثابت کیا ہے کہ متسع حاصل ضرب

$$\text{ی}\left(1+\frac{\text{ی}}{\pi}\right)\left(1+\frac{\text{ی}}{2\pi}\right)\left(1+\frac{\text{ی}}{3\pi}\right)\cdots\cdots$$

مستدق بنایا جا سکتا ہے اگر اسکے ہر جزو ضربی کو ایک قوت نما جزو ضربی سے ضرب دیا جائے۔ چنانچہ حاصل ضرب

$$\text{ی}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{\pi}\right)\text{قو}^{-\frac{\text{ی}}{\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{2\pi}\right)\text{قو}^{-\frac{\text{ی}}{2\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{\text{ی}}{3\pi}\right)\text{قو}^{-\frac{\text{ی}}{3\pi}}\right\}\cdots$$

---

[1] دیکھو برلن اکاڈمی کی "Abhandlungen" بابتہ سنہ ۱۸۷۶ء۔

مطلقاً مستدق ہے۔

(350) چونکہ حسب دفعہ ۲۳۰ (۹)

$$\text{و}^{-\frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}} = ۱ - \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi} + \frac{\text{ی}^۲}{۲\text{ن}^۲\pi^۲}(۱ + \text{ع}_\text{ن})$$

جہاں $|\text{ع}_\text{ن}|$ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے جبکہ ن کو لاانتہا بڑھادیا جاتا ہے، اسلئے اگر صہ اختیاری طور پر منتخبہ کوئی مثبت عدد ہو تو $|\text{ع}_\text{ن}| < \text{صہ}$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے جو صہ پر منحصر کسی خاص قیمت سے بڑی ہوں۔ اب

$$\left(۱ + \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}\right)\text{و}^{-\frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}} = \left(۱ + \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}\right)\left\{۱ - \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi} + \frac{\text{ی}^۲}{۲\text{ن}^۲\pi^۲}(۱ + \text{ع}_\text{ن})\right\}$$

$$= ۱ - \frac{\text{ی}^۲}{۲\text{ن}^۲\pi^۲}(۱ - \text{ع}_\text{ن}) + \frac{\text{ی}^۳}{۲\text{ن}^۳\pi^۳}(۱ + \text{ع}_\text{ن})$$

وہ سلسلہ جسکی عام رقم

$$\frac{\text{ی}^۲}{۲\text{ن}^۲\pi^۲}\left\{۱ - \text{ع}_\text{ن} - \frac{\text{ی}}{\text{ن}\pi}(۱ + \text{ع}_\text{ن})\right\}$$

ہے مطلقاً مستدق ہے کیونکہ ن کی کافی طور پر بڑی سب قیمتوں کیلئے سلسلے $\Sigma \frac{۱}{\text{ن}^۲}$، $\Sigma \frac{۱}{\text{ن}^۳}$ مستدق ہیں، اور $|\text{ع}_\text{ن}| < \text{صہ}$، $|۱ \pm \text{ع}_\text{ن}| < ۱ + \text{صہ}$۔ اسلئے بموجب اس مسئلے کے جو دفعہ ۲۸۱ میں ثابت ہوچکا ہے وہ لامتناہی حاصل ضرب جسکی عام رقم

محدود عدد ۰٫۵۷۷۲۱۵۶.... ہے جسکو یولر کا مستقل کہتے ہیں، اس لئے سن ن − سن م کی انتہائی قیمت جبکہ م اور ن لامتناہی ہوں لوک $\frac{\text{ن}}{\text{م}}$ کی انتہائی قیمت ہے۔ لیس

$$\text{نہا فہ (ی)} = \text{ک}^{\frac{\text{ی}}{\pi}} \times \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}}$$

جہاں ک = نہا $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ اور نہا فہ (ی) کی قیمت = $\frac{\text{جب ی}}{\text{ی}}$ صرف اسوقت جبکہ م اور ن مساوی ہوتے ہوئے لامتناہی ہو جائیں۔

۲۸۸ — جم لا کے ضابطہ (۲) یا (۴) کو (۱) یا (۳) سے ضابطہ جم لا = جب ۲لا / ۲ جب لا کے ذریعہ اخذ کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

$$\frac{\text{جب ۲لا}}{\text{۲ جب لا}} = \text{۲لا} \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\text{۲لا}}{\text{ر}\pi}\right) \Big/ \text{۲لا} \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$$

شمار کنندہ کے وہ اجزائے ضربی جنکے لئے ر جفت ہے نسب نما کے اجزائے ضربی کے ساتھ کٹ جاتے ہیں، اس لئے اگر ہم شمار کنندہ کے حاصل ضرب کو $\prod_{-\text{۲ن}}^{\text{۲ن}}\left(1 + \frac{\text{۲لا}}{\text{ر}\pi}\right)$ کی انتہا اور نسب نما کے حاصل ضرب کو $\text{۲}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$ کی انتہا خیال کریں جبکہ ن لامتناہی ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جم لا} = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\text{۲لا}}{\pi(1 + \text{۲ر})}\right)$$

جو (۲) یا (۴) کے مماثل ہے۔ حاصل ضربوں کے استدقاق کی شرط سے یہ واضح ہے کہ ایک حاصل ضرب میں ن کی بجائے ۲ن لینے سے اس حاصل ضرب کی انتہائی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا جبکہ ن کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے۔

۲۸۹ — ضابطوں جب لا = جم (½ π − لا)، جم لا = جب (½ π − لا) کی مدد سے جب لا کے لئے حاصل ضربی ضابطہ جم لا کے ضابطہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے یا اسکے بالعکس۔ ضابطہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب لا} = \prod_{1}^{\infty}\left(1+\frac{\pi-2\,\text{لا}}{\pi(2\text{ر}-1)}\right) = \prod_{1}^{\infty}\left(\frac{2\text{ر}\pi-2\,\text{لا}}{\pi(2\text{ر}-1)}\right)$$

$$= \prod_{1}^{\infty}\frac{2\text{ر}}{2\text{ر}-1}\times\text{لا}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$$

جہاں جزو ضربی لا، ر = ۰ کے جواب میں ہے۔ لا = ۰ کیلئے $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کی نہایت لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لازماً $\prod_{1}^{\infty}\frac{2\text{ر}}{2\text{ر}-1} = 1$، پس

$$\text{جب لا} = \text{لا}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$$

(352) **۲۹۰** — جب لا اور جم لا کے حاصل ضربی ضابطوں کو ہم ایسی شکل میں رکھ سکتے ہیں کہ اس سے ان کے دوری (Periodic) ہونیکی خاصیت ظاہر ہو جو تفاعلوں جب لا اور جم لا میں پائی جاتی ہے

فرض کرو $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}\prod_{-\text{ن}}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ر}\pi}\right)$

تو

$$\text{ف}(\text{لا}+\pi) = (\text{لا}+\pi)\left(1+\frac{\text{لا}+\pi}{\pi}\right)\left(1+\frac{\text{لا}+\pi}{2\pi}\right)\cdots\cdots$$

$$\left(1+\frac{\text{لا}+\pi}{\text{ن}\pi}\right)\left(1-\frac{\text{لا}+\pi}{\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{\text{لا}+\pi}{\text{ن}\pi}\right)$$

$$= -\text{لا}\left(1+\frac{\text{لا}}{\pi}\right)\left(1+\frac{\text{لا}}{2\pi}\right)\cdots\left(1+\frac{\text{لا}}{(\text{ن}+1)\pi}\right)\left(1-\frac{\text{لا}}{\pi}\right)\cdots\cdots$$

$$\ldots\ldots \left(1 - \frac{\text{لا}}{(\text{ن} - 1)\pi}\right) \frac{\text{ن} + 1}{\text{ن}}$$

$$= - \frac{\text{لا} + (\text{ن} + 1)\pi}{\text{ن}\pi - \text{لا}} \text{ ف } (\text{لا})،$$

اب جبکہ ن کو لا انتہا بڑھا دیا جاتا ہے تو نہا ف (لا + π) = - نہا ف (لا) جو مساوات جب (لا + π) = - جب لا ہے۔ اسی طرح ضابطہ (۴) کو ایسی شکل میں رکھا جا سکتا ہے کہ اس سے خاصیت

$$\text{جم } (\text{لا} + \pi) = - \text{جم لا}$$

کا اظہار ہو۔

تفاعل جب لا معدوم ہوتا ہے جبکہ لا = ۰، $\pm \pi$، $\pm 2\pi$، ..... اور یہ قیمتیں ضابطہ (۳) کے اجزائے ضربی لا، $1 \pm \frac{\text{لا}}{\pi}$، $1 \pm \frac{\text{لا}}{2\pi}$، ..... کے جواب میں ہیں، نیز دفعہ ۲۳۵ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ لا کی کسی خیالی قیمت کے لئے جب لا معدوم نہیں ہوتا، اسی طرح اگر یہ مان لیا جائے کہ جب لا کو لامتناہی حاصل ضرب

$$\text{ا} \frac{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج}) \ldots\ldots\ldots}{\text{ا ب ج} \ldots\ldots\ldots}$$

کی شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے تو ا، ب، ج، ..... کی قیمتیں لازماً صفر، π، -π، 2π، -2π، ..... ہونی چاہئیں۔ پھر ا کی قیمت، لا = ۰ رکھ کر حاصل کی جاتی ہے اور مسئلہ نہا $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = 1$ کو استعمال کر کے ضابطہ (۱) یا (۳) حاصل کیا جاتا ہے۔ لیکن اس ضابطہ کے اس ثبوت کی در اصل کوئی قدر و قیمت نہیں کیونکہ بغیر ثبوت کے ہمیں یہ ماننے کا کوئی حق نہیں ہے کہ جب لا مطلوبہ شکل میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۹۱ ــ ضابطے (۱) اور (۲) خیالی دلیل خرما کی صورت میں

جو شکلیں اختیار کرتے ہیں ان پر غور کرنا ضروری ہے ۔ اِس صورت میں جبز ما کے لئے لامتناہی حاصل ضرب ملتے ہیں

$$\text{جبز ما} = \text{ما}\left(1+\frac{\text{ما}^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\text{ما}^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{\text{ما}^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots \quad (5)$$

$$\text{جمز ما} = \left(1+\frac{4\,\text{ما}^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\,\text{ما}^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1+\frac{4\,\text{ما}^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots \quad (6)$$

(353)

یولر نے ضابطوں (۱)، (۲)، (۵)، (۶) کو اس متماثلہ

$$ی^{2م} - 1 = م(ی^2 - 1)\prod_{ن=1}^{ن=م-1}\left\{\frac{1 - 2ی\,\text{جم}\frac{ن\pi}{م} + ی^2}{2 - 2\,\text{جم}\frac{ن\pi}{م}}\right\}$$

کی مدد سے سب سے اول حاصل کیا تھا۔ رکھو $ی = 1 + \frac{\text{لا}}{م}$ تو یہ متماثلہ ہو جاتی ہے

$$\left(1+\frac{\text{لا}}{م}\right)^{م} - \left(1+\frac{\text{لا}}{م}\right)^{-م} = \frac{2\,\text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{م}}{1+\frac{\text{لا}}{م}}\prod_{ن=1}^{ن=م-1}\left\{1 + \frac{\text{لا}^2}{\left(1+\frac{\text{لا}}{م}\right)\left(2م\,\text{جب}\frac{ن\pi}{2م}\right)^2}\right\}$$

اب اگر م کو لاانتہا بڑا کر دیا جائے تو یہ متماثلہ مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{-\text{لا}}\right) = \text{لا}\prod_{ن=1}^{ن=\infty}\left(1+\frac{\text{لا}^2}{ن^2\pi^2}\right)$$

جو ضابطہ (۵) ہے ۔ انتہائی اِس تخمین کے لئے دفعہ ۲۸۵ کی طرح ٹھیک تحقیقات کی ضرورت ہے۔

ضابطہ (۱)، لا کو خ لا میں تبدیل کرکے اخذ کیا گیا تھا، اور اسی طرح ضابطے (۲) اور (۶)، $ی^{2م} + 1$ کے اُن جملوں سے حاصل کئے گئے تھے جو اجزائے ضربی

ہیں ہیں۔

مثالیں

۲۹۲ ـ (۱) π کے لئے ویالیس (Wallis) کے جملہ کی تحقیق کرو۔

جب لا کے اجزائے ضربی والے جملہ میں لا = $\frac{1}{2}\pi$ رکھو تو یہ تقریبی ضابطہ

$$\text{۱} = \frac{\pi}{\text{۲}}\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}^2}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}^2}\right)\cdots\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{(\text{۲ن})^2}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ ن بڑا ہو۔ اس کو لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi(\text{۲ن} + \text{۱})} = \frac{\text{۲} \times \text{۴} \times \text{۶} \cdots \text{۲ن}}{\text{۱} \times \text{۳} \times \text{۵} \cdots (\text{۲ن} - \text{۱})}$$

اور یہ ویالیس کا ضابطہ ہے۔

(۲) جمز ما ـ جم عہ، جم لا ـ جم عہ کو اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

$$\text{جمز ما} - \text{جم عہ} = \text{۲ جب } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{عہ} + \text{خر ما}) \text{ جب } \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{عہ} - \text{خر ما})$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{عہ}^2 + \text{ما}^2)\prod_{\text{۱}}^{\infty}\left\{\text{۱} - \frac{(\text{عہ} + \text{خر ما})^2}{\text{۴ن}^2\pi^2}\right\} \times \left\{\text{۱} - \frac{(\text{عہ} - \text{خر ما})^2}{\text{۴ن}^2\pi^2}\right\}$$

اور ما = ۰ رکھنے سے

$$\text{۱} - \text{جم عہ} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{عہ}^2\prod_{\text{۱}}^{\infty}\left(\text{۱} - \frac{\text{عہ}^2}{\text{۴ن}^2\pi^2}\right)^2$$

پس

$$\frac{\text{جمز ما} - \text{جم عہ}}{\text{۱} - \text{جم عہ}} = \left(\text{۱} + \frac{\text{ما}^2}{\text{عہ}^2}\right)\prod_{\text{۱}}^{\infty}\left(\text{۱} + \frac{\text{خر ما}}{\text{۲ن}\pi + \text{عہ}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{خر ما}}{\text{۲ن}\pi - \text{عہ}}\right) \times \left(\text{۱} + \frac{\text{خر ما}}{\text{۲ن}\pi - \text{عہ}}\right)\left(\text{۱} - \frac{\text{خر ما}}{\text{۲ن}\pi + \text{عہ}}\right)$$

(854)

اس لئے

$$\text{جمز}\,\text{ما} - \text{جم}\,\text{عہ} = 2\,\text{جب}^2\,\tfrac{1}{2}\text{عہ}\left(1+\frac{\text{ما}^2}{\text{عہ}^2}\right)\prod_1^{\infty}\left\{1+\frac{\text{ما}^2}{(2\text{ن}\pi+\text{عہ})^2}\right\}\times\left\{1+\frac{\text{ما}^2}{(2\text{ن}\pi-\text{عہ})^2}\right\}$$

اس میں ما کی بجائے خ لا رکھنے سے

$$\text{جم}\,\text{لا} - \text{جم}\,\text{عہ} = 2\,\text{جب}^2\,\tfrac{1}{2}\text{عہ}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{عہ}^2}\right)\prod_1^{\infty}\left\{1-\frac{\text{لا}^2}{(2\text{ن}\pi+\text{عہ})^2}\right\}\times\left\{1-\frac{\text{لا}^2}{(2\text{ن}\pi-\text{عہ})^2}\right\}$$

(۳) ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{1}{\pi^2}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{4\pi^2}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{9\pi^2}+\text{مس}^{-1}\frac{1}{16\pi^2}+\cdots$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi-\text{مس}^{-1}\left(\text{مسز}\frac{1}{\sqrt{2}}\times\text{مم}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

چونکہ $\text{جب}(\text{لا}+\text{خ}\,\text{ما}) = (\text{لا}+\text{خ}\,\text{ما})\prod_1^{\infty}\left\{1-\frac{(\text{لا}+\text{خ}\,\text{ما})^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right\}$

اس لئے لوکارتم لینے سے یہ مساوات ہو جاتی ہے۔

$$\text{لوک}\,(\text{جب}\,\text{لا}\,\text{جمز}\,\text{ما}+\text{خ}\,\text{جم}\,\text{لا}\,\text{جبز}\,\text{ما}) = \text{لوک}\,(\text{لا}+\text{خ}\,\text{ما})$$
$$+\sum_1^{\infty}\text{لوک}\left\{1-\frac{\text{لا}^2-\text{ما}^2}{\text{ن}^2\pi^2}-\text{خ}\frac{2\,\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ن}^2\pi^2}\right\}$$

اِس مساوات کی طرفین کے خیالی حصوں کو مساوی رکھنے سے

$$\text{مس}^{-1}(\text{مسز}\,\text{ما}\,\text{مم}\,\text{لا}) = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \sum_1^{\infty}\text{مس}^{-1}\frac{2\,\text{لا}\,\text{ما}}{\text{ن}^2\pi^2-\text{لا}^2+\text{ما}^2}$$

فرض کرو $\text{لا}=\text{ما}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

نو $\sum_{1}^{\infty} \text{مس}^{-1} \frac{1}{\text{ن}^2 \pi^2} = \frac{1}{4}\pi - \text{مس}^{-1}\left(\text{مسز} \frac{1}{2\pi} \cdot \text{مم} \frac{1}{2\pi}\right)$

قوت نما تفاعل کو لامتناہی حاصل ضرب کے طور پر بیان کرنا

۲۹۲ (ل) - اُس صورت میں جسمیں $|\text{ی}| < 1$ قوت نما تفاعل ہولا کو میا تھوز (Mathews) [1] نے مطلوبہ شکل میں بیان کیا ہے -

فرض کرو کہ ی ایک ستدق سلسلہ $\sum_{\text{ن}=1} \text{ک}_{\text{ن}} \text{لوک}_{\text{و}} (1 + \text{ی}^{\text{ن}})$ کا انتہائی مجموعہ ہے - تب ہمیں حاصل ہوتا ہے $\text{ک}_1 = 1$، اور $\text{ن} > 1$ کیلئے

$$\text{ک}_{\text{ن}} + \sum \frac{(-1)^{\text{ضہ}-1}}{\text{ضہ}} \text{ک}_{\text{ضہ}'} = 0$$

جہاں ضہ، ن کا کوئی مناسب صحیح عددی جزو ضربی ہے اور $\text{ضہ}' = \frac{\text{ن}}{\text{ضہ}}$، ضہ کی ہر ایسی قیمت کے جواب میں ایک رقم ملتی ہے - اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{ن} \text{ک}_{\text{ن}} = \sum (-1)^{\text{ضہ}'} \text{ضہ} \text{ک}_{\text{ضہ}} = \sum (-1)^{\text{ن}/\text{ضہ}} \text{ضہ} \text{ک}_{\text{ضہ}}$$

اور تمام عددوں $\text{ک}_{\text{ن}}$ کی قیمتوں کو مساواتوں کے اُس جٹ سے معلوم کرنا ہوگا جنکا نمونہ یہ مساوات ہے - اب استقراء سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ

(۱) اگر $\text{ن} = 2^{\text{م}}$ تو $\text{ک}_{\text{ن}} = \frac{1}{2}$

(۲) اگر ن، مہ مختلف طاق مفرد عددوں کا حاصل ضرب $\text{ف}_1 \text{ف}_2 \ldots \text{ف}_{\text{مہ}}$ ہو

تو $\text{ک}_{\text{ن}} = (-1)^{\text{مہ}} \text{ن}$

---

[1] Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. xiv, Page 228.

(۳) اگر $ن = ۲^{م} ف_{۱} ف_{۲} \ldots ف_{ر}$ تو $ک_{ن} = (-۱)^{ر} \, ۲^{م - \frac{۱}{۲}} \, ن$ (835)

(۴) اگر ن کا ایک جزو ضربی طاق عدد کا مربع ہو تو $ک_{ن} = ۰$.

اب یہ واقعہ کہ $ک_{ن}$ کی ان قیمتوں کے ساتھ جو حسب تشریح بالا حاصل ہوتی ہیں سلسلہ

$$\sum ک_{ن} \, لوک_{ہ} (۱ + ی^{ن})$$

$|ی| < ۱$ کے لئے مستدق ہوتا ہے آسانی کے ساتھ دیکھا جا سکتا ہے۔ پس ی کی سب قیمتوں کے لئے ایسی کہ $|ی| < ۱$ قوت نما تفاعل $ہ^{ی}$ اس لامتناہی حاصل ضرب

$$\prod_{۱}^{\infty} (۱ + ی^{ن})^{ک_{ن}} \equiv (۱ + ی)(۱ + ی^{۲})^{\frac{۱}{۲}} (۱ + ی^{۳})^{-\frac{۱}{۳}} (۱ + ی^{۴})^{\frac{۱}{۴}} \ldots$$

سے تعبیر ہوتا ہے، یا چونکہ $۱ = (۱ - ی)^{\frac{۱}{۲}} (۱ + ی)^{\frac{۱}{۲}} (۱ + ی^{۲})^{\frac{۱}{۴}} \ldots$ اسلئے عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$ہ^{ی} = \left(\frac{۱ + ی}{۱ - ی} \right)^{\frac{۱}{۲}} \prod \left(\frac{۱ + ی^{ف}}{۱ - ی^{ف}} \right)^{\frac{۱}{۲ف}} ، \quad |ی| < ۱$$

جہاں ف، مہ غیر مساوی طاق مفردوں کا حاصل ضرب ہے اور ف کی سب قیمتیں جو اس شکل کی ہیں لگئی ہیں۔

مماس، مماس التمام، قاطع، اور قاطع التمام کے لئے سلسلے

۲۹۳ — چونکہ جب $ی = ی \prod_{۱}^{\infty} \left(۱ - \frac{ی^{۲}}{ن^{۲} \pi^{۲}} \right)$

اس لئے اگر ی، π کا ضعف نہیں ہے تو

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{جب ی} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ی} + \sum_{1}^{\infty} \text{لوک}_{\text{و}}\left(1 - \frac{\text{ی}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)$$

فرض کرو کہ ھ ایک مثبت حقیقی عدد ہے۔ تب ی کو ی + ھ میں تبدیل کرنے سے اور پھر ان دو جملوں کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{جب (ی + ھ)}}{\text{جب ی}} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی}}\right) + \sum_{\text{ن}=1}^{\text{ن}=\infty}\left\{\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi}\right) + \text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi}\right)\right\}$$

اب دفعہ ۲۴۹ (ا) کا مسئلہ استعمال کرنے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی}}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی}} - \frac{1}{2}\frac{\text{ھ}^2}{\text{ی}^2}(1 + \text{و}_{.})\text{،}$$

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی} - \text{ن}\pi} - \frac{1}{2}\frac{\text{ھ}^2}{(\text{ی} - \text{ن}\pi)^2}(1 + \text{و}_{\text{ن}})\text{،}$$

$$\text{لوک}_{\text{و}}\left(1 + \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi}\right) = \frac{\text{ھ}}{\text{ی} + \text{ن}\pi} - \frac{1}{2}\frac{\text{ھ}^2}{(\text{ی} + \text{ن}\pi)^2}(1 + \text{ط}_{\text{ن}})\text{،}$$

(356)

جہاں $\text{و}_{.}$، $\text{و}_{\text{ن}}$، $\text{ط}_{\text{ن}}$ سب کے سب صفر کی طرف مستدق ہوتے ہیں جبکہ ھ کو لاانتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ مزید براں اگر ی کی کوئی ثابت قیمت ہو جو صفر نہیں ہے یا π کا مثبت یا منفی صحیح عددی ضعف تو ھ کی کافی طور پر چھوٹی سب قیمتوں کے لئے عدد $|\text{و}_{.}|$، $|\text{و}_1|$، $|\text{و}_2|$، .... اور $|\text{ط}_1|$، $|\text{ط}_2|$، $|\text{ط}_3|$، .... سب کے سب کسی اختیاری طور پر منتخبہ مثبت عدد ص سے کم ہیں کیونکہ $|\text{ی}|$، $|\text{ی} - \text{ن}\pi|$، $|\text{ی} + \text{ن}\pi|$ کے مقیاس کسی ثابت عدد سے جو ن پر منحصر نہیں ہے بڑے ہیں۔

پس اب

$$\frac{1}{ھ}\ \text{لوگ}_و\ \frac{\text{جب}\,(ی+ھ)}{\text{جب}\ ی}$$

$$=\left[\frac{1}{ی}-\frac{1}{2}-\frac{ھ}{ی^2}(1+و_.)\right]+\sum_{ن=1}^{\infty}\left[\frac{2ی}{ی^2-ن^2\pi^2}-\frac{1}{2}ھ\frac{1+و_ن}{(ی-ن\pi)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}ھ\frac{1+ط_ن}{(ی+ن\pi)^2}\right]$$

جہاں بائیں جانب کا سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ ی، π کا ضعف نہ ہو
فرض کرو کہ ی ہے ایسا کہ $(ر-1)\pi<|ی|<ر\pi$ جہاں
ر کوئی مثبت صحیح عدد ہے، تب اگر $ی^2/ر^2\pi^2=ضہ<1$ تو ن کی
سب قیمتوں کے لئے جو ر سے بڑی یا اسکے مساوی ہوں

$|ی|^2/ن^2\pi^2\leqslant ضہ$ ۔ اب

$$\left|\frac{1}{ن^2\pi^2-ی^2}\right|=\frac{1}{ن^2\pi^2}\ \frac{1}{|1-ی^2/ن^2\pi^2|}\geqslant\frac{1}{ن^2\pi^2}\ \frac{1}{1-ضہ}$$

بشرطیکہ ن $\geqslant$ ر، پس چونکہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{ن^2}$ ہے مستدق ہے اسلئے وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{ن^2\pi^2-ی^2}$ ہے مطلقاً مستدق ہے

اب چونکہ وہ دو سلسلے جنکی عام رقمیں ہیں

$$\frac{2ی}{ی^2-ن^2\pi^2}\ ,\ \frac{2ی}{ی^2-ن^2\pi^2}-\frac{1}{2}ھ\frac{1+و_ن}{(ی-ن\pi)^2}-\frac{1}{2}ھ\frac{1+ط_ن}{(ی+ن\pi)^2}$$

دونوں مستدق ہیں اسلئے وہ سلسلہ بھی جسکی عام رقم ہے

$$\frac{1}{2} ھ \frac{1 + و_ن}{(ی - ن\pi)^2} + \frac{1}{2} ھ \frac{1 + ط_ن}{(ی + ن\pi)^2}$$

سے مستدق ہے۔ اگر ھ کافی طور پر چھوٹا ہو تو اس عام رقم کا مقیاس

$$< \frac{1}{2} ھ (1 + صه) \left\{ \frac{1}{|ی - ن\pi|^2} + \frac{1}{|ی + ن\pi|^2} \right\}$$

اب $|ی - ن\pi| \geq ن\pi - |ی| \geq ن\pi - (ر + 1)\pi$ اسلئے

$$\frac{1}{|ی - ن\pi|^2} < \frac{1}{(ن - ر - 1)^2 \pi^2}$$

(357)

جہاں ن > ر + 1، پس یہ مستنبط ہوتا ہے کہ وہ سلسلہ جسکی عام رقم $\frac{1}{|ی - ن\pi|^2}$ ہے مستدق ہے۔ اسی طرح وہ سلسلہ جس کی عام $\frac{1}{|ی + ن\pi|^2}$ ہے مستدق ہے۔

اب ہم دیکھتے ہیں کہ اس سلسلہ کے مجموعہ کا مقیاس جسکی عام رقم $\frac{1}{2} ھ \frac{1 + و_ن}{(ی - ن\pi)^2} + \frac{1}{2} ھ \frac{1 + ط_ن}{(ی + ن\pi)^2}$ ہے عدد $\frac{1}{2} ھ (1 + صه)\, أ(ی)$ سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں أ(ی) ایک مثبت عدد ہے جو صرف ی پر منحصر ہے، یہ مقیاس لاانتہا گھٹتا ہے جبکہ ھ کو لاانتہا گھٹا دیا جاتا ہے۔ اب یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{نہا}_{ھ=0}\ \frac{1}{ھ}\ لوک\ \frac{جب(ی + ھ)}{جب\ ی} = \frac{1}{ی} + \sum_{ن=1} \frac{2ی}{ی^2 - ن^2\pi^2}$$

چونکہ $\frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}} = \text{جم ھ} + \text{جب ھ مم ی} = ۱ + \text{ھ مم ی}(۱ + \text{ضا})$

جہاں |ضا|، ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے، اسلئے

$$\frac{۱}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}} = \frac{۱}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\{۱ + \text{ھ مم ی}(۱+\text{ضا})\}$$

$$= \text{مم ی}\,(۱ + \text{ضا})(۱ + \text{ضا}')$$

جہاں |ضاَ|، ھ کے ساتھ صفر کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ پس

$$\text{نہا}_{\text{ھ}=۰}\ \frac{۱}{\text{ھ}}\,\text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{جب}(\text{ی}+\text{ھ})}{\text{جب ی}} = \text{مم ی}$$

اب یہ دکھایا جا چکا ہے کہ جب، ی کوئی حقیقی یا ملتف عدد ہو جو π کا صحیح عددی ضعف نہیں ہے تو مم ی اس مستدق سلسلہ

$$\frac{۱}{\text{ی}} + \frac{۱}{\text{ی}+\pi} + \frac{۱}{\text{ی}-\pi} + \frac{۱}{\text{ی}+۲\pi} + \frac{۱}{\text{ی}-۲\pi} + \dots \text{،} \dots \quad (۷)$$

کا، یا

$$\frac{۱}{\text{ی}} + ۲\text{ی} \sum_{\text{ن}=۱} \frac{۱}{\text{ی}^۲ - \text{ن}^۲\pi^۲} \text{،} \dots\dots \quad (۸)$$

کا مجموعہ ہے۔

شکل (۷) میں سلسلہ بالانیم مستدق ہے اور شکل (۸) میں وہ مطلقاً مستدق ہے، بجز ی = ۰، $\pm\pi$، $\pm ۲\pi$، ... کے اوران قیمتوں کے لئے یہ سلسلہ متبع ہے۔

مندرجۂ صدر تحقیق کی ضرورت جتانے کے لئے یہ بتانا کافی ہے کہ اگر ف (ی)، مستدق سلسلہ $\text{ع}_۱(\text{ی}) + \text{ع}_۲(\text{ی}) + \dots + \text{ع}_\text{ن}(\text{ی}) + \dots$ کا مجموعہ ہو تو ہمیں یہ مان لینے کا کوئی حق نہیں ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{ھ}=۰} \frac{\text{ف}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ف}(\text{ی})}{\text{ھ}} = \sum_{۱}^{\infty} \text{نہا}_{\text{ھ}=۰} \frac{\text{ع}_\text{ر}(\text{ی}+\text{ھ}) - \text{ع}_\text{ر}(\text{ی})}{\text{ھ}}$$

(358)

فرض کرو کہ اس سلسلہ کا باقی م رقموں کے بعد ب$_م$(ی) ہے تو

$$ف(ی) = ع_1(ی) + ع_2(ی) + \ldots + ع_م(ی) + ب_م(ی)'$$

$$ف(ی+ھ) = ع_1(ی+ھ) + ع_2(ی+ھ) + \ldots + ع_م(ی+ھ) + ب_م(ی+ھ)$$

اسلئے $\text{نہا}_{ھ=0} \frac{ف(ی+ھ) - ف(ی)}{ھ} = \sum_1^م \text{نہا}_{ھ=0} \frac{ع_ر(ی+ھ) - ع_ر(ی)}{ھ}$

$$+ \text{نہا}_{ھ=0} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ}$$

اب چونکہ دیا ہوا سلسلہ مستدق ہے ب$_م$(ی)، ب$_م$(ی + ھ) لاانتہا چھوٹے ہو جاتے ہیں جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن یہ نتیجہ نکلنا ضروری نہیں کہ $\text{نہا}_{ھ=0} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ}$ بھی لاانتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

صرف اسوقت جبکہ یہ انتہا یعنی $\text{نہا}_{ھ=0} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ}$ لاانتہا چھوٹی ہو مشتق سلسلہ کو ف (ی) کے مشتق تفاعل کے طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً اگر ب$_م$(ی) کی شکل $\frac{1}{م}$ جب م ی ہوتی تو ہم دیکھتے کہ

$$\text{نہا} \frac{ب_م(ی+ھ) - ب_م(ی)}{ھ} = ۱ \text{ جم م ی}$$

جو صفر کی طرف مستدق نہیں ہوتا جبکہ م کو لاانتہا بڑھا دیا جاتا ہے، لیکن قیمتوں ± ۱ کے درمیان اہتزاز کرتا ہے۔

۲۹۴ — جملہ

$$\text{جم ی} = \left(۱ - \frac{۴ ی^2}{\pi^2}\right)\left(۱ - \frac{۴ ی^2}{۳^2 \pi^2}\right)\left(۱ - \frac{۴ ی^2}{۵^2 \pi^2}\right) \ldots\ldots$$

سے دفعہ ماسبق کے مماثل طریقہ استعمال کرکے ہم لاانتناہی سلسلہ

$$\text{مس ی} = \frac{1}{\text{ی}+\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}+\frac{3}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\frac{3}{2}\pi} + \dots$$

$$+ \frac{1}{\text{ی}+(2\text{م}-1)\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{\text{ی}-(2\text{م}-1)\frac{1}{2}\pi} + \dots \dots (9)$$

$$\text{یا}\quad \text{مس ی} = 8\,\text{ی} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2\text{م}-1)^2\pi^2 - 4\text{ی}^2} \dots\dots\dots (10)$$

حاصل کرتے ہیں۔ سلسلہ (۹) نیم مستدق ہے لیکن سلسلہ (۱۰) مطلقاً مستدق ہے ی کی سب قیمتوں کے لئے بجز $\pm\frac{1}{2}\pi$، $\pm\frac{3}{2}\pi$، $\pm\frac{5}{2}\pi$،.... کے۔

۲۹۵ — ضابطوں $\text{قم ی} = \text{مم}\,\frac{1}{2}\text{ی} - \text{مم ی}$، یا $\text{قم ی} = \frac{1}{2}\,\text{مم}\,\frac{1}{2}\text{ی} + \frac{1}{2}\,\text{مس}\,\frac{1}{2}\text{ی}$ کے ذریعہ قم ی کے لئے سلسلہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ پہلے ضابطہ کو لیکر اس میں مماس التماموں کی بجائے اِن کے سلسلے درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{قم ی} = \left[\frac{2}{\text{ی}} + \frac{2}{\text{ی}+2\pi} + \frac{2}{\text{ی}-2\pi} + \frac{2}{\text{ی}+4\pi} + \frac{2}{\text{ی}-4\pi} + \dots\right]$$

$$- \left[\frac{1}{\text{ی}} + \frac{1}{\text{ی}+\pi} + \frac{1}{\text{ی}-\pi} + \frac{1}{\text{ی}+2\pi} + \frac{1}{\text{ی}-2\pi} + \dots\right]$$

پس قم ی

$$= \frac{1}{\text{ی}} - \frac{1}{\text{ی}+\pi} - \frac{1}{\text{ی}-\pi} + \frac{1}{\text{ی}+2\pi} + \frac{1}{\text{ی}-2\pi} - \frac{1}{\text{ی}+3\pi} - \frac{1}{\text{ی}-3\pi} + \dots$$

$$\dots\dots,\dots\dots (11)$$

(359)

یا $\quad \text{قم}\,ی = \frac{1}{ی} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{ر}\,2ی}{(ی^2 - ر^2\pi^2)}\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$

ضابطہ (۱۱) میں ی کو ی + $\frac{1}{2}\pi$ میں تبدیل کرو تو

$$\text{قط}\,ی = \left(\frac{1}{ی+\frac{1}{2}\pi} - \frac{1}{ی-\frac{1}{2}\pi}\right) - \left(\frac{1}{ی+\frac{3}{2}\pi} - \frac{1}{ی-\frac{3}{2}\pi}\right) + \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

یا $\quad \text{قط}\,ی = 4 \sum \frac{(-1)^{ر-1}(2ر-1)\pi}{(2ر-1)^2\pi^2 - 4ی^2}\,, \quad \ldots\ldots \quad (14)$

اس سلسلہ کی عام رقم جبکہ ر بڑا ہو قیمت $\frac{(-1)^{ر-1}}{2ر-1}$ کے قریب آتی ہے

اس لئے یہ سلسلہ صرف نیم مستدق ہے ۔

مماس التمامی اور مماسی سلسلے حسب ذیل طریقہ پر بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں
جب (ی + ھ) اور جب ی کے لئے لامتناہی حاصل ضربوں کے جو جملے ہیں انکو استعمال کرو تو عمل تقسیم سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب}(ی+ھ)}{\text{جب}\,ی} = \left(1 + \frac{ھ}{ی}\right)\left(\frac{\pi^2 - ی^2 - ھ^2 - 2ھی}{\pi^2 - ی^2}\right)\left(\frac{2^2\pi^2 - ی^2 - ھ^2 - 2ھی}{2^2\pi^2 - ی^2}\right)$$

....

اب اگر ہم مان لیں کہ بائیں جانب کا حاصل ضرب عمل ضرب کی تکمیل سے ھ کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے اور اگر ہم دائیں جانب کو شکل جم ھ + جب ھ مم ی میں رکھیں تو ھ کی قوتوں میں پھیلانے اور مساوات کی طرفین میں ھ کے سروں کو مساوی رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{مم}\,ی = \frac{1}{ی} + \frac{2ی}{ی^2 - \pi^2} + \frac{2ی}{ی^2 - 2^2\pi^2} + \ldots\ldots\ldots, \quad (8)$$

ہم نے یہ جو مان لیا ہے کہ وہ لامتناہی حاصل ضرب جسکے معمولی عمل ضرب سے حاصل شدہ لامتناہی سلسلے ہیں ھ کی صعودی قوتوں کے ایک سلسلہ میں

ترتیب دیا جا سکتا ہے اسکی واجبیت کے لئے اُن شرطوں کی تحقیق کرنی ہوگی کہ ایسے عمل سے صحیح نتیجہ پیدا ہو، لیکن اس کے لئے بعض عام مسئلوں کی ضرورت پڑیگی جنکو بیان کرنے کی یہاں گنجائش نہیں ہے۔

مماسی سلسلہ بھی اسی طرح لامتناہی حاصل ضرب

$$\frac{\text{جم}(ی+ھ)}{\text{جم}\,ی} = \left(\frac{\pi^2 - 4ی^2 - 4ھ^2 - 8ھی}{\pi^2 - 4ی^2}\right)\left(\frac{3^2\pi^2 - 4ی^2 - 4ھ^2 - 8ھی}{3^2\pi^2 - 4ی^2}\right)\ldots$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر ی کے ماس التمام کو شکل

$$\pi\left(1 - \frac{4ی^2}{(2م-1)^2\pi^2}\right) \Big/ ی\,\pi\left(1 - \frac{ی^2}{م^2\pi^2}\right)$$

میں بیان کیا جائے اور اس جملہ کو جزوی کسروں میں تحویل کیا جائے جنکے نسب نما جملہ $ی\,\pi\left(1 - \frac{ی^2}{م^2\pi^2}\right)$ کے اجزائے ضربی ہوں تو ہمیں سلسلہ (۸) حاصل ہونا چاہئے، یہ بات مس ی، قا ی، قم ی پر بھی اسی طرح صادق آتی ہے۔ یہ سلسلے گلیشر[۵] نے بالراست اس عمل تحویل کی تکمیل سے حاصل کئے تھے۔

دلیل کی قوتوں میں مماس، مماس التمام، قاطع اور قاطع التمام کو بیان کرنا

(630)

۲۹۶ — دفعہ ۲۹۳ میں یہ دکھایا جا چکا ہے کہ

$$\text{مم}\,ی = \frac{1}{ی} - \sum^{م} \frac{2ی}{ر^2\pi^2 - ی^2} + ب_م$$

جہاں $ب_م$ ایک عدد ہے جبکو م کے کافی بڑا لینے سے اسقدر

---

[۵] دیکھو Quarterly Journal, vol. xviii. Glaisher

چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں ۔ اب اگر ی کا مقیاس $\text{ر}\pi$ سے کم ہو تو

$$\frac{1}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2}=\frac{1}{\text{ر}^2\pi^2}\left(1+\frac{\text{ی}^2}{\text{ر}^2\pi^2}+\frac{\text{ی}^4}{\text{ر}^4\pi^4}+\cdots+\frac{\text{ی}^{2\text{س}}}{\text{ر}^{2\text{س}}\pi^{2\text{س}}}+\cdots\right)$$

پس اگر ہم یہ فرض کریں کہ ی کا مقیاس π سے کم ہے تو کسروں $\frac{1}{\text{ر}^2\pi^2-\text{ی}^2}$ میں سے ہر ایک کو اس طریقہ پر پھیلا سکتے ہیں اور چونکہ ان میں سے ہر سلسلہ مطلقاً مستدق ہے ہم نتیجہ کو ی کی قوتوں میں ترتیب دے سکتے ہیں اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{م ی}=\frac{1}{\text{ی}}-\frac{2\text{ی}}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^2}\right)-\frac{2\text{ی}^3}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^4}\right)$$

$$-\cdots-\frac{2\text{ی}^{2\text{ن}-1}}{\pi^{2\text{ن}}}\left(\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^{2\text{ن}}}\right)-\cdots$$

$\cdots + \text{ب}_\text{م}$

فرض کرو کہ $\text{ﻣ}_{2\text{ن}}$ سے مستدق سلسلہ

$$\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^{2\text{ن}}}+\cdots\cdots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، تب $\text{ﻣ}_{2\text{ن}}=\frac{1}{1^{2\text{ن}}}+\frac{1}{2^{2\text{ن}}}+\cdots+\frac{1}{\text{م}^{2\text{ن}}}+\cdots$ $+\text{صہ}_{2\text{ن}}$ جہاں $\text{صہ}_{2\text{ن}}$ ایک عدد ہے جو م کو کافی بڑا لینے سے اسقدر چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں ۔

$$\text{تب}\quad \text{م ی}=\frac{1}{\text{ی}}-\frac{2\text{ی}}{\pi^2}\text{ﻣ}_2-\frac{2\text{ی}^3}{\pi^4}\text{ﻣ}_4-\cdots-\frac{2\text{ی}^{2\text{ن}-1}}{\pi^{2\text{ن}}}\text{ﻣ}_{2\text{ن}}-\cdots$$

$$+ \text{ب}\,\text{م}_1 + \frac{2\text{ی}}{\pi^2}\text{صم}_2 + \frac{2\text{ی}^3}{\pi^4}\text{صم}_3 + \dots + \frac{2\text{ی}^{2\text{ن}-1}}{\pi^{2\text{ن}}}\text{صم}_\text{ن}\,\text{ق}_\text{ن} \dots$$

ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{صم}_2 > \text{صم}_3 > \text{صم}_4 \dots$ ، پس

$$\frac{2\text{ی}}{\pi^2}\text{صم}_2 + \frac{2\text{ی}^3}{\pi^4}\text{صم}_3 + \dots\dots$$

کا مقیاس $< \text{صم}_2 \left(\frac{|2\text{ی}|}{\pi^2} + \frac{|2\text{ی}^3|}{\pi^4} + \dots\dots \right)$

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستدق ہے کیونکہ مق ی $< \pi$ ،

(361)

اسلئے م کو کافی بڑا لینے سے $\frac{2\text{ی}^{2\text{ن}-1}}{\pi^{2\text{ن}}}\text{صم}_\text{ن}$ کے مقیاس کو اتنا چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ پس م ی کے لئے یہ لامتناہی سلسلہ ملتا ہے

$$\text{م ی} = \frac{1}{\text{ی}} - \frac{2\text{ی}}{\pi^2}\text{صم}_2 - \frac{2\text{ی}^3}{\pi^4}\text{صم}_4 - \frac{2\text{ی}^5}{\pi^6}\text{صم}_6 - \dots \quad (۱۵)$$

جو ی کی سب قیمتوں کے لئے درست ہے ایسی کہ مق ی $< \pi$ ، اور بالخصوص $\pm\pi$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

مسئلہ

$$\text{مس ی} = 8 \sum_{1}^{\infty} \frac{\text{ی}}{(2\text{ر}-1)^2\pi^2 - 4\text{ی}^2} + \text{ب}\,\text{م}$$

سے اسی طریقہ پر مس ی کے لئے سلسلہ ی کی صعودی قوتوں میں حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس سلسلہ کو مماثلہ مس ی = م ی − ۲ م ۲ی کے ذریعہ بھی (۱۵) سے اخذ کر سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں معلوم ہوتا ہے

$$\text{مس ی} = \frac{2(2^2-1)\text{ی}}{\pi^2}\text{صم}_2 + \frac{2(2^4-1)\text{ی}^3}{\pi^4}\text{صم}_4 + \frac{2(2^6-1)\text{ی}^5}{\pi^6}\text{صم}_6 + \dots\dots \quad (۱۶)$$

جو درست ہے اگر ی کا مقیاس $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہو، اور بالخصوص $\pm\frac{۱}{۲}\pi$ کے درمیان ی کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے۔

ضابطہ قم ی = م $\frac{۱}{۲}$ ی - مم ی میں م $\frac{۱}{۲}$ ی، مم ی کی بجائے انکی قیمتیں (۱۵) سے لیکر درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قم ی} = \frac{۱}{\text{ی}} + (۲-۱)\frac{\text{ی}}{\pi^۲}\text{ب}_۲ + \frac{۲^۳-۱}{۲^۳}\times\frac{\text{ی}^۳}{\pi^۴}\text{ب}_۴ + \frac{۲^۵-۱}{۲^۵}\times\frac{\text{ی}^۵}{\pi^۶}\text{ب}_۶ + \ldots\ldots \quad (۱۷)$$

جو درست رہتا ہے اگر مق ی $< \pi$

۲۹۷ — ی کی قوتوں میں قط ی کے لئے سلسلہ حاصل کرنیکے لئے ضابطہ

$$\text{قط ی} = ۴\pi\left(\frac{۱}{\pi^۲-۴\text{ی}^۲} - \frac{۳}{۳^۲\pi^۲-۴\text{ی}^۲} + \frac{۵}{۵^۲\pi^۲-۴\text{ی}^۲} - \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}(۲\text{م}-۱)}{(۲\text{م}-۱)^۲\pi^۲-۴\text{ی}^۲}\right) + \text{بَ}_\text{م}$$

استعمال کیا جاتا ہے جبکہ یہ فرض کرلیا گیا ہو کہ ی کا مقیاس $\frac{۱}{۲}\pi$ سے کم ہے۔ ہر کسر کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{قط ی} = \frac{۲^۲}{\pi}\left\{\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}}{۲\text{م}-۱}\right\} + \frac{۲^۴}{\pi^۳}\text{ی}^۲\left\{\frac{۱}{۱^۳} - \frac{۱}{۳^۳} + \frac{۱}{۵^۳} - \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}}{(۲\text{م}-۱)^۳}\right\} + \ldots + \frac{۲^{۲\text{ن}+۲}}{\pi^{۲\text{ن}+۱}}\text{ی}^{۲\text{ن}}\left\{\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}+۱}} - \frac{۱}{۳^{۲\text{ن}+۱}} + \ldots + \frac{(-۱)^{\text{م}-۱}}{(۲\text{م}-۱)^{۲\text{ن}+۱}}\right\} + \ldots + \text{بَ}_\text{م}$$

(362)

اب فرض کرو کہ $ص_{2ن+1}$ سے لامتناہی سلسلہ

$$\frac{1}{2ن+1} - \frac{1}{3(2ن+1)} + \frac{1}{5(2ن+1)} \ldots\ldots$$

کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے، اور فرض کرو پہلی م رقموں کے بعد کا باقی $صہ_{2ن+1}$ ہے، تب

$$قط ی = \frac{2^2}{\pi} ص_1 + \frac{2^4}{3\pi} ی ص_3 + \ldots + \frac{2^{2ن+2}}{(2ن+1)\pi} ی^ن ص_{2ن+1} + \ldots$$

$$+ ب^م + \frac{2^2}{\pi} صہ_1 + \frac{2^4}{3\pi} ی^2 صہ_3 + \ldots\ldots$$

فرض کرو کہ عددوں $صہ_1$، $صہ_3$، $صہ_5$ ... میں سے بڑے سے بڑا عدد $صہَ$ ہے تو $\frac{2^2}{\pi} صہ_1 + \frac{2^4}{3\pi} ی^2 صہ_3 + \ldots$ کا مقیاس، سلسلہ

$$\frac{2^2}{\pi} + \frac{2^4}{3\pi} |ی|^2 + \frac{2^6}{5\pi} |ی|^4 + \ldots\ldots$$

کے مجموعے کے $صہَ$ گنا سے کم ہے، یہ آخری سلسلہ مستدق ہے کیونکہ ی کا مقیاس بموجب فرض $\frac{1}{2}\pi$ سے کم ہے۔
پس یہ ثابت ہوچکا کہ اُس سلسلہ کا باقی جو ہم نے قط ی کے لئے حاصل کیا ہے ایک عدد ہے جسکا مقیاس لا انتہا گھٹتا ہے جیسے م بڑھتا ہے، اس لئے قط ی کے لئے لامتناہی سلسلہ ملتا ہے

$$قط ی = \frac{2^2}{\pi} ص_1 + \frac{2^4}{3\pi} ی^2 ص_3 + \frac{2^6}{5\pi} ی^4 ص_5 + \ldots\ldots \quad (18)$$

جو درست ہے اگر حق ی < $\frac{1}{2}$ π ۔

۲۹۸ ــــ جبر و مقابلہ کا یہ ایک مشہور مسئلہ ہے کہ تفاعل $\frac{ی}{و^{ی}-1}$ کو

جہاں $و^{ی}$ اپنی صدر قیمت رکھتا ہے شکل

$$1 - \frac{1}{2} ی + \frac{ب_1}{\lfloor 2} ی^2 - \frac{ب_2}{\lfloor 4} ی^4 + \dots + (-1)^{ن-1} \frac{ب_ن}{\lfloor 2ن} ی^{2ن} + \dots$$

کے ایک سلسلہ میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں $ب_1$، $ب_2$ ... $ب_ن$، ...

خاص عدد ہیں جنکو برنولی (Bernouilli) کے عدد کہتے ہیں،

اور نیز یہ کہ یہ پھیلاؤ ی کی اُن تمام قیمتوں کے لئے درست ہے جنکے لئے

سلسلہ مستدق ہوتا ہے ۔

اگر ہم اِس کو $و^{ی} - 1$ سے ضرب دیں تو

$$ی = \left\{ ی + \frac{ی^2}{\lfloor 2} + \dots + \frac{ی^{ن}}{\lfloor ن} + \dots \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} ی + \frac{ب_1}{\lfloor 2} ی^2 \right.$$

$$\left. - \frac{ب_2}{\lfloor 4} ی^4 + \dots + (-1)^{ن-1} \frac{ب_ن}{\lfloor 2ن} ی^{2ن} + \dots \right\}$$

جہاں |ی| کو اتنا چھوٹا لیا گیا ہے کہ بائیں جانب کے دونوں سلسلے

مطلقاً مستدق ہیں ۔ اِن سلسلوں کو باہم ضرب دیکر حاصل ضرب کو ی

کی قوتوں کے ایک سلسلہ میں ترتیب دے سکتے ہیں ۔ یہ محصلہ

سلسلہ مطلقاً مستدق ہوگا، اسلئے ی کی پہلی قوت سے اعلیٰ تر قوتوں کے

سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے مساواتوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے

(3

$$\frac{\text{ب}_{۱}}{|\underline{۲}} - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{|\underline{۲}} + \frac{۱}{|\underline{۳}} = ۰ ،\quad \frac{\text{ب}_{۲}}{|\underline{۴}} + \frac{۱}{|\underline{۳}}\cdot\frac{\text{ب}_{۱}}{|\underline{۲}} - \frac{۱}{|\underline{۴}}\cdot\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{|\underline{۵}} = ۰ ،$$

وغیرہ، جنکی عام شکل ہے

$$\frac{\text{ب}_{ن}}{|\underline{۲ن}} - \frac{۱}{|\underline{۳}}\cdot\frac{\text{ب}_{ن-۱}}{|\underline{۲ن-۲}} + \ldots + \frac{(-۱)^{ن}}{|\underline{۲ن-۱}}\cdot\frac{\text{ب}_{۱}}{|\underline{۲}}$$

$$- \frac{(-۱)^{ن-۱}}{|\underline{۲ن}}\cdot\frac{۱}{۲} + \frac{(-۱)^{ن}}{|\underline{۲ن+۱}} = ۰$$

ان مساواتوں کے ذریعہ عددوں $\text{ب}_{۱}$، $\text{ب}_{۲}$، ... کو محسوب کیا جاسکتا ہے، چنانچہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ب}_{۱} = \frac{۱}{۶}،\ \text{ب}_{۲} = \frac{۱}{۳۰}،\ \text{ب}_{۳} = \frac{۱}{۴۲}،\ \text{ب}_{۴} = \frac{۱}{۳۰}،\ \text{ب}_{۵} = \frac{۵}{۶۶}،$$

$$\text{ب}_{۶} = \frac{۶۹۱}{۲۷۳۰}،\ \text{ب}_{۷} = \frac{۷}{۶}،\ \text{وغیرہ}$$

۲۹۹ — مم ی، مس ی، قم ی کے پھیلاؤں میں (جو ی کی قوتوں میں حاصل کئے جاچکے ہیں) سروں کو برنولی کے عددوں کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

چونکہ
$$\text{مم ی} = \text{خ}\,\frac{\text{قو}^{\text{خی}} + \text{قو}^{-\text{خی}}}{\text{قو}^{\text{خی}} - \text{قو}^{-\text{خی}}} = \text{خ}\left(۱ + \frac{۲}{\text{قو}^{۲\text{خی}} - ۱}\right)$$

اسلئے اگر مق ی کافی چھوٹا ہو تو

$$\text{مم ی} = \frac{۱}{\text{ی}} - \frac{\text{ب}_{۱}\,۲^{۲}}{|\underline{۲}}\,\text{ی} - \frac{\text{ب}_{۲}\,۲^{۴}}{|\underline{۴}}\,\text{ی}^{۳} - \ldots - \frac{\text{ب}_{ن}\,۲^{۲ن}}{|\underline{۲ن}}\,\text{ی}^{۲ن-۱} - \ldots \quad (۱۹)$$

نیز $\text{قم ی} = \text{مم}\,\tfrac{1}{2}\text{ی} - \text{مم ی}$، اسلئے

$$\text{قم ی} = \frac{1}{\text{ی}} + \frac{2(2-1)\text{ب}_1}{\underline{|2}}\,\text{ی} + \frac{2(2^3-1)\text{ب}_2}{\underline{|4}}\,\text{ی}^3 + \dots$$

$$+ \frac{2(2^{2\text{ن}-1}-1)\text{ب}_\text{ن}}{\underline{|2\text{ن}}}\,\text{ی}^{2\text{ن}-1} + \dots،\ \dots (20)$$

نیز چونکہ $\text{مس ی} = \text{مم ی} - 2\,\text{مم}\,2\text{ی}$، اسلئے

$$\text{مس ی} = \frac{2^2(2^2-1)\text{ب}_1}{\underline{|2}}\,\text{ی} + \frac{2^4(2^4-1)\text{ب}_2}{\underline{|4}}\,\text{ی}^3 + \dots$$

$$+ \frac{2^{2\text{ن}}(2^{2\text{ن}}-1)\text{ب}_\text{ن}}{\underline{|2\text{ن}}}\,\text{ی}^{2\text{ن}-1} + \dots،\ \dots (21)$$

یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ سلسلے (۱۹) اور (۲۰) مستدق ہیں اگر $\text{مق ی} < \pi$ اور سلسلہ (۲۱) مستدق ہے اگر $\text{مق ی} < \tfrac{1}{2}\pi$۔ سلسلے (۱۹)، (۲۰)، (۲۱) علی الترتیب سلسلوں (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) کے مماثل ہونے چاہئیں، پس (۱۹) کے سروں کو (۱۵) کے سروں کے مساوی رکھنے سے

(364)

$$\frac{2}{\pi^2}\,\text{م}_2 = \frac{2^2}{\underline{|2}}\,\text{ب}_1،\quad \frac{2}{\pi^4}\,\text{م}_4 = \frac{2^4}{\underline{|4}}\,\text{ب}_2،\ \dots،\quad \frac{2}{\pi^{2\text{ن}}}\,\text{م}_{2\text{ن}}$$

$$= \frac{2^{2\text{ن}}}{\underline{|2\text{ن}}}\,\text{ب}_\text{ن}،$$

اس لئے دفعہ ۲۹۸ میں دی ہوئی ب_1، ب_2، ... کی قیمتوں کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}_2 = \frac{\pi^2}{6}،\quad \text{م}_4 = \frac{\pi^4}{90}،\quad \text{م}_6 = \frac{\pi^6}{945}،\quad \text{م}_8 = \frac{\pi^8}{9450}،\ \dots$$

$$\text{ب}_{\text{۲ن}} = \frac{\text{۲}}{\text{۲ن}} \; \text{ب}$$

اس طرح ب۲ن اُن مساوات کی مدد سے محسوب کیا جا سکتا ہے جن سے ب ن ملتا ہے۔

سلسلے (۱۹) اور (۲۱) کسی زاویے کے ماس یا ماس التمام کو محسوب کرنے میں راست استعمال کئے جا سکتے ہیں۔ اِن سلسلوں کی پہلی چند قیمتیں ہیں

$$\text{مم لا} = \frac{۱}{\text{لا}} - \frac{\text{لا}}{۳} - \frac{\text{لا}^۳}{۴۵} - \frac{۲\,\text{لا}^۵}{۹۴۵} - \ldots\ldots ،$$

$$\text{مس لا} = \text{لا} + \frac{\text{لا}^۳}{۳} + \frac{۲\,\text{لا}^۵}{۱۵} + \frac{۱۷\,\text{لا}^۷}{۳۱۵} + \ldots\ldots$$

مس $\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times ۹۰^\circ\right)$، مم $\left(\frac{\text{م}}{\text{ن}} \times ۹۰^\circ\right)$ کو محسوب کرنیکا عمل حسب طریقہ ذیل انجام پا سکتا ہے :-

مس (م \ ن × ۹۰°) =

۲ م ن \ (ن² − م²) × ۰.۶۳۶۶۱۹۷۷۲۳۶۷۵

\+ م \ ن × ۰.۲۹۷۵۵۶۷۸۲۰۵۹۷

\+ م³ \ ن³ × ۰.۰۱۸۶۸۸۶۵۰۲۷۷۳

\+ م⁵ \ ن⁵ × ۰.۰۰۱۸۴۲۴۷۵۲۰۳۴

\+ م⁷ \ ن⁷ × ۰.۰۰۰۱۹۷۵۸۰۰۷۱۴

\+ م⁹ \ ن⁹ × ۰.۰۰۰۰۲۱۶۹۷۷۲۴۵

\+ م¹¹ \ ن¹¹ × ۰.۰۰۰۰۰۲۴۰۱۱۳۷۰

\+ م¹³ \ ن¹³ × ۰.۰۰۰۰۰۰۲۶۶۴۱۳۲

\+ م¹⁵ \ ن¹⁵ × ۰.۰۰۰۰۰۰۰۲۹۵۸۶۴

\+ م¹⁷ \ ن¹⁷ × ۰.۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲۸۶۷

+ م^{19} \ ن^{19} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۶۵۱

+ م^{21} \ ن^{21} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۰۵

+ م^{23} \ ن^{23} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۵

+ م^{25} \ ن^{25} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵

جم (م \ ن × ۹۰°) =

ن \ م × ؍۶۳۶۶۱۹۷۷۲۳۶۷۵۸۱

− ۴ م ن \ (۴ ن^{2} − م^{2}) × ؍۳۱۸۳۰۹۸۸۶۱۸۳۷

− م \ ن × ؍۲۰۵۲۸۸۸۸۹۴۱۴۵

− م^{3} \ ن^{3} × ؍۰۰۶۵۵۱۰۷۴۷۸۸۲

− م^{5} \ ن^{5} × ؍۰۰۰۳۴۵۰۲۹۲۵۵۴

− م^{7} \ ن^{7} × ؍۰۰۰۰۲۰۲۷۹۱۰۶۰

− م^{9} \ ن^{9} × ؍۰۰۰۰۰۱۲۳۶۶۵۲۷

− م^{11} \ ن^{11} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۷۶۴۹۵۹

− م^{13} \ ن^{13} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۷۵۹۷

− م^{15} \ ن^{15} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۹۶۹

− م^{17} \ ن^{17} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۸۵

− م^{19} \ ن^{19} × ؍۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۱

ان جملوں میں رقموں $\frac{۸\,\text{ی}}{\pi^2 - ۴\,\text{ی}^2}$ ، $\frac{۱}{\text{ی}}$ ، $\frac{۲\,\text{ی}}{\pi^2 - \text{ی}^2}$ کو جو ضابطوں (۱۰) اور (۸) میں واقع ہوتی ہیں الگ الگ اول محسوب کر لیا جاتا ہے، تب ان رقموں کے بعد یہ سلسلے زیادہ سرعت کے ساتھ متدق ہوتے ہیں۔

یہ سلسلے یولر کی Analysis of the Infinite سے لئے گئے ہیں جس میں اِنکو اُس نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک معلوم کیا ہے۔

(365)

لوکارثمی جیب اور جیب التمام کیلئے جملے

۳۰۰ — دفعہ ۲۸۵ میں ہم یہ دکھا چکے ہیں کہ

$$\text{جب ی} = \text{ی}\left(۱ - \frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(۱ - \frac{\text{ی}^2}{۲^2\pi^2}\right)\cdots\left(۱ - \frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right)(۱ - \text{ط}_\text{م})،$$

$$\text{جم ی} = \left(۱ - \frac{۴\,\text{ی}^2}{\pi^2}\right)\left(۱ - \frac{۴\,\text{ی}^2}{۳^2\pi^2}\right)\cdots\left(۱ - \frac{۴\,\text{ی}^2}{(۲\text{م}-۱)^2\pi^2}\right)(۱ - \text{ط}'_\text{م})،$$

جہاں $\text{ط}_\text{م}$ ، $\text{ط}'_\text{م}$ ایسے عدد ہیں جنکے مقیاس م کو کافی بڑا لینے سے اتنے چھوٹے بنائے جا سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔ اب لوکارثم لینے سے

$$\text{لوک جب ی} = \text{لوک ی} + \text{لوک}\left(۱ - \frac{\text{ی}^2}{\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(۱ - \frac{\text{ی}^2}{۲^2\pi^2}\right) + \cdots$$
$$+ \text{لوک}\left(۱ - \frac{\text{ی}^2}{\text{م}^2\pi^2}\right) + \text{لوک}\,(۱ - \text{ط}_\text{م})،$$

$$\text{لوک جم ی} = \text{لوک}\left(۱ - \frac{۴\,\text{ی}^2}{\pi^2}\right) + \text{لوک}\left(۱ - \frac{۴\,\text{ی}^2}{۳^2\pi^2}\right) + \cdots$$
$$+ \text{لوک}\left(۱ - \frac{۴\,\text{ی}^2}{(۲\text{م}-۱)^2\pi^2}\right) + \text{لوک}\,(۱ - \text{ط}'_\text{م})،$$

پہلی صورت میں مان لو کہ $|\text{ی}| < \pi$ اور دوسری صورت میں $< \frac{\pi}{۲}$ تاکہ یہ لوکارتھم ی کی قوتوں میں مطلقاً مستدق سلسلوں میں پھیلائے جا سکیں، تب ان لوکارتموں کو پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\infty} \left(\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}} + \cdots + \frac{۱}{\text{م}^{۲\text{ن}}}\right) \frac{\text{ی}^{۲\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{۲\text{ن}}} + \text{لوک}\,(۱ - \text{ط}_\text{م})\,،$$

$$\text{لوک جم ی} = -\sum_{\text{ن}=۱}^{\text{ن}=\infty} \left(\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۳^{۲\text{ن}}} + \cdots + \frac{۱}{(۲\text{م}-۱)^{۲\text{ن}}}\right) \frac{۲^{۲\text{ن}}\,\text{ی}^{۲\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{۲\text{ن}}} + \text{لوک}\,(۱ - \text{ط}'_\text{م})\,،$$

اب

$$\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۳^{۲\text{ن}}} + \cdots\cdots$$

$$= \left(\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۳^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۵^{۲\text{ن}}} + \cdots\right) + \frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}}\left(\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۲^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۳^{۲\text{ن}}} + \cdots\right)$$

اس لئے

$$\frac{۱}{۱^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۳^{۲\text{ن}}} + \frac{۱}{۵^{۲\text{ن}}} + \cdots = \frac{۲^{۲\text{ن}} - ۱}{۲^{۲\text{ن}}}\, \text{س}_{۲\text{ن}}\,،$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے (366)

$$\text{لوک}\ \frac{\text{جب ی}}{\text{ی}} = -\sum \frac{\text{ی}^{۲\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{۲\text{ن}}}\,\text{س}_{۲\text{ن}} + \sum \frac{\text{ی}^{۲\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{۲\text{ن}}}\,\text{ص}_\text{ن} + \text{لوک}\,(۱ - \text{ط}_\text{م})\,،$$

$$\text{لوک جم ی} = -\sum \frac{۲^{۲\text{ن}} - ۱}{\text{ن}\,\pi^{۲\text{ن}}}\,\text{ی}^{۲\text{ن}}\,\text{س}_{۲\text{ن}} + \sum \frac{۲^{۲\text{ن}}\,\text{ی}^{۲\text{ن}}}{\text{ن}\,\pi^{۲\text{ن}}}\,\text{ض}_\text{ن} + \text{لوک}\,(۱ - \text{ط}'_\text{م})$$

جہاں سلسلوں

$$\frac{۱}{۱^{۲ن}} + \frac{۱}{۲^{۲ن}} + \cdots ، \frac{۱}{۱^{۲ن}} + \frac{۱}{۳^{۲ن}} + \cdots\cdots$$

کی م رقموں کے بعد کے باقی $ص_{۲ن}$، $ض_{۲ن}$ ہیں۔

$\sum \frac{ی^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}\, ص_{۲ن}$ کا مقیاس $صَ \sum \frac{|ی|^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}$ سے کم ہے اور

$\sum \frac{۲^{۲ن} ی^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}\, ض_{۲ن}$ کا مقیاس $ضَ \sum \frac{۲^{۲ن}|ی|^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}$ سے کم ہے جہاں

$صَ$، $ضَ$ علی الترتیب $ص_{۲ن}$، $ض_{۲ن}$ کی بڑی سے بڑی قیمتیں ہیں۔ پس

$$لوک\ \frac{جب\,ی}{ی} = -\sum \frac{ی^{۲ن}}{ن\,\pi^{۲ن}}\, م_{۲ن}،$$

$$لوک\ جم\,ی = \sum \frac{۲^{۲ن}-۱}{ن\,\pi^{۲ن}}\, ی^{۲ن}\, م_{۲ن}$$

اب چونکہ $م_{۲ن} = \frac{۲^{۲ن-۱}\,\pi^{۲ن}}{\lfloor ۲ن}\, ب_ن$ اسلئے $لوک\ \frac{جب\,ی}{ی}$، لوک جم ی کے لئے حسب ذیل لامتناہی سلسلے حاصل ہوتے ہیں

$$لوک\ \frac{جب\,ی}{ی} = -۲\,\frac{ب_۱}{۱}\,\frac{ی^۲}{\lfloor ۲} - ۲^۳\,\frac{ب_۲}{۲}\,\frac{ی^۴}{\lfloor ۴} - \cdots\cdots - ۲^{۲ن-۱}\,\frac{ب_ن}{ن}\,\frac{ی^{۲ن}}{\lfloor ۲ن} - \cdots\ ،\ \cdots \quad (۴۲)$$

جہاں مق ی < π ،

$$\text{لوک جم ی} = -۲(۲^{۲}-۱)\frac{ب_{۱}}{۱}\frac{ی^{۲}}{|۲} - ۲^{۳}(۲^{۴}-۱)\frac{ب_{۲}}{۲}\frac{ی^{۴}}{|۴} - \cdots$$

$$-\,۲^{۲ن-۱}(۲^{۲ن}-۱)\frac{ب_{ن}}{ن}\frac{ی^{۲ن}}{|۲ن} - \cdots\cdots \quad (۲۳)$$

جہاں مق ی < $\frac{۱}{۲}$ π ۔

سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کی پہلی چند رقمیں ہیں

$$\text{لوک}\frac{\text{جیب ی}}{ی} = -\frac{ی^{۲}}{۶} - \frac{ی^{۴}}{۱۸۰} - \frac{ی^{۶}}{۲۸۳۵} - \cdots\cdots ،$$

$$\text{لوک جم ی} = -\frac{ی^{۲}}{۲} - \frac{ی^{۴}}{۱۲} - \frac{ی^{۶}}{۴۵} - \cdots\cdots$$

اسلئے نیز

$$\text{لوک مس ی} = \text{لوک ی} + \frac{ی^{۲}}{۳} + \frac{۷ی^{۴}}{۹۰} + \frac{۶۲ی^{۶}}{۲۸۳۵} + \cdots\cdots$$

سلسلوں (۲۲)، (۲۳) کو لوکارثمی جیوب اور جیوب التمام کی جدولیں تیار کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے، سب سے بہتر یہ ہے کہ لوکارثموں لوک $\left(۱-\frac{ی^{۲}}{π^{۲}}\right)$، لوک $\left(۱-\frac{۴ی^{۲}}{π^{۲}}\right)$ کے پہلے لوکارثم الگ الگ محسوب کر لئے جائیں کیونکہ اس طرح یہ سلسلے (۲۲)، (۲۳) کی بہ نسبت تیز تر مستدق شکل میں حاصل ہوسکتے ہیں۔

$$\text{لوک جیب}\frac{مπ}{۲ن} = \text{لوک }π + \text{لوک}\frac{م}{۲ن} + \text{لوک}\left(۱-\frac{م^{۲}}{۴ن^{۲}}\right)$$

$$-\sum\left\{\frac{ب_{ر}}{۲ر}\left(\frac{π^{۲ر}}{|۲ر} - \frac{۱}{ر\,۲^{۲ر}}\right)\frac{م^{۲ر}}{ن^{۲ر}}\right\} ،$$

(367)

$$لوک\ جم\ \frac{م\ \pi}{۲ن} = لوک\left(۱-\frac{م^۲}{ن^۲}\right) - \sum\left\{\frac{۲^{۲ر}-۱}{۲}\ \frac{ب_ر}{ر}\ \frac{\pi^{۲ر}}{|\underline{۲ر}}\ -\left(\frac{۱}{ر}\right)\frac{م^{۲ر}}{ن^{۲ر}}\right\}$$

اِن مساواتوں کی بائیں جانب کے لوکارتموں کو مقیاس ٫۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹ سے ضرب دینے سے ہمیں جب$(\frac{م}{ن}\times ۹۰^\circ)$، جم$(\frac{م}{ن}\times ۹۰^\circ)$ کے معمولی لوکارتم اساس ۱۰ پر حاصل ہوتے ہیں۔ اس طرح جو ضابطے ملتے ہیں وہ حسب ذیل ہیں:

ل جب$(م\backslash ن \times ۹۰^\circ) =$

لوک م + لوک (۲ن − م) + لوک (۲ن + م)

− ۳ لوک ن + ۹٫۵۹۴۰۵۹۸۸۵۷۰۲۱۹۰

$- م^۲ \backslash ن^۲ \times$ ٫۰۷۰۰۲۲۸۲۶۶۰۵۹۰۱

$- م^۴ \backslash ن^۴ \times$ ٫۰۰۱۱۱۷۲۶۶۴۳۱۶۶۱

$- م^۶ \backslash ن^۶ \times$ ٫۰۰۰۰۳۹۲۲۹۱۴۶۴۵۳

$- م^۸ \backslash ن^۸ \times$ ٫۰۰۰۰۰۱۷۲۹۲۷۰۷۹۸

$- م^{۱۰} \backslash ن^{۱۰} \times$ ٫۰۰۰۰۰۰۰۸۴۳۶۲۹۸۶

$- م^{۱۲} \backslash ن^{۱۲} \times$ ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۴۳۴۸۷۱۵

$- م^{۱۴} \backslash ن^{۱۴} \times$ ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۱۹۳۱

$- م^{۱۶} \backslash ن^{۱۶} \times$ ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۶۵۹

$- م^{۱۸} \backslash ن^{۱۸} \times$ ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۰۲

$- م^{۲۰} \backslash ن^{۲۰} \times$ ٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۹

ل جم (م \ ن × ۹۰°) =

لوک (ن − م) + لوک (ن + م) − ۲ لوک ن

+ .... ی ۱۰

− م^۲ \ ن^۲ × ۱۰۱۴۹۴۸۵۹۳۴۱۸۹۲ ی

− م^۴ \ ن^۴ × ۰۰۳۱۸۷۲۹۴۰۶۵۴۵۱ ی

− م^۶ \ ن^۶ × ۰۰۰۲۰۹۴۸۵۸۰۰۰۱۷ ی

− م^۸ \ ن^۸ × ۰۰۰۰۱۶۸۴۸۳۴۸۵۹۷ ی

− م^۱۰ \ ن^۱۰ × ۰۰۰۰۰۰۱۴۸۰۱۹۳۹۸۶ ی

− م^۱۲ \ ن^۱۲ × ۰۰۰۰۰۰۰۱۳۶۵۰۲۴۷۴ ی

− م^۱۴ \ ن^۱۴ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۹۸۱۷۱۵ ی

− م^۱۶ \ ن^۱۶ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۶۱۴۷۱ ی

− م^۱۸ \ ن^۱۸ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶۷ ی

− م^۲۰ \ ن^۲۰ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۴۵۶ ی

− م^۲۲ \ ن^۲۲ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۵۸ ی

− م^۲۴ \ ن^۲۴ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۲۸ ی

− م^۲۶ \ ن^۲۶ × ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۳ ی

اِن سلسلوں کو یولر نے اعشاریہ کے بیس مقامات تک حاصل کیا تھا۔

مثالیں

۱۰۳ — (۱) $\sum_1^\infty \text{ن}^{-2}$ ، $\sum_1^\infty \text{ن}^{-4}$ ، $\sum_1^\infty (2\text{ن}-1)^{-2}$ ، $\sum_1^\infty (2\text{ن}-1)^{-4}$

کی قیمتیں معلوم کرو —

چونکہ $\text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \sum \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ن}^2\pi^2}\right)$

$$= -\frac{\text{لا}^2}{\pi^2}\sum\frac{1}{\text{ن}^2} - \frac{\text{لا}^4}{2\pi^4}\sum\frac{1}{\text{ن}^4} - \cdots$$

اور نیز $\text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{6} + \frac{\text{لا}^4}{120} - \cdots\right)$

$$= -\left(\frac{\text{لا}^2}{6} - \frac{\text{لا}^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{لا}^2}{6}\right)^2 - \cdots$$

(368)

اسلئے $\text{لوک}\ \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کے اِن دو جملوں میں لا^2، لا^4 کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\sum \text{ن}^{-2} = \frac{1}{6}\pi^2 \text{ ، } \sum \text{ن}^{-4} = \frac{1}{90}\pi^4$$

پھر چونکہ $\text{لوک جم لا} = \sum \text{لوک}\left\{1 - \frac{4\text{لا}^2}{(2\text{ن}-1)^2\pi^2}\right\}$

$$= -\frac{4\text{لا}^2}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2\text{ن}-1)^2} - \frac{8\text{لا}^4}{\pi^4}\sum\frac{1}{(2\text{ن}-1)^4} - \cdots \text{ ،}$$

اور نیز $\text{لوک جم لا} = \text{لوک}\left(1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^4}{24} - \cdots\right)$

$$= -\left(\frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{لا}^2}{2}\right)^2$$

اس لئے $\text{لا}^{۲}$ اور $\text{لا}^{۴}$ کے سروں کو مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma\,(۲\text{ن}-۱)^{-۲} = \frac{۱}{۸}\pi^{۲}\ ،\quad \Sigma\,(۲\text{ن}-۱)^{-۴} = \frac{۱}{۹۶}\pi^{۴}$$

(۲) لامتناہی سلسلہ $\frac{۱}{۱^{۲}+\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{۳^{۲}+\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{۵^{۲}+\text{لا}^{۲}} + \ldots$ کو جمع کرو۔

مسئلہ (۱۰) میں رکھو $۲\,\text{ی} = \text{خ}\ \text{لا}\ \pi$ ، اس طرح اس سلسلہ کا مجموعہ حاصل ہوگا

$$\frac{\pi}{۴\,\text{لا}}\ \text{مسنر}\ \frac{۱}{۲}\pi\,\text{لا}$$

یہ مجموعہ، جمز π لا کے اجزائے ضربی والے جملہ سے لوکارتم لینے اور تفرق کرنے سے بھی راست حاصل کیا جا سکتا تھا۔

(۳) ثابت کرو کہ اُن تمام عددوں کے منکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $\frac{۱۵}{\pi^{۲}}$ ہے جو کسی مفرد عدد کے مربع سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ مفرد عددوں ۲، ۳، ۵، ... کو عہ، بہ، جہ، .... سے تعبیر کیا گیا ہے، تب مطلوبہ مجموعہ اس لامتناہی حاصل ضرب

$$\left(۱+\frac{۱}{\text{عہ}^{۲}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{بہ}^{۲}}\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{جہ}^{۲}}\right)\ldots\ldots$$

کے مساوی ہے۔ یہ حاصل ضرب

$$= \frac{\left(۱-\frac{۱}{\text{عہ}^{۲}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{بہ}^{۲}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{جہ}^{۲}}\right)^{-۱}\ldots}{\left(۱-\frac{۱}{\text{عہ}^{۴}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{بہ}^{۴}}\right)^{-۱}\left(۱-\frac{۱}{\text{جہ}^{۴}}\right)^{-۱}\ldots}$$

$$\text{یا} = \frac{\left(۱+\frac{۱}{\text{عہ}^{۲}}+\frac{۱}{\text{عہ}^{۴}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{بہ}^{۲}}+\frac{۱}{\text{بہ}^{۴}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{جہ}^{۲}}+\frac{۱}{\text{جہ}^{۴}}+\ldots\right)\ldots}{\left(۱+\frac{۱}{\text{عہ}^{۴}}+\frac{۱}{\text{عہ}^{۸}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{بہ}^{۴}}+\frac{۱}{\text{بہ}^{۸}}+\ldots\right)\left(۱+\frac{۱}{\text{جہ}^{۴}}+\frac{۱}{\text{جہ}^{۸}}+\ldots\right)\ldots}$$

اور یہ
$$=\frac{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots}{1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\cdots}$$

یا
$$=\frac{\frac{1}{6}\pi^2}{\frac{1}{90}\pi^4}=\frac{15}{\pi^2}$$

(۴) ایک لامتناہی خط مستقیم کو نقطوں کی ایک لامتناہی تعداد سے متعدد حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جنمیں سے ہر ایک کا طول ا ہے۔ اگر ایک نقطہ لیا جائے ایسا کہ اسکا فاصلہ خط مستقیم سے ما ہو اور کسی ایک نقطہ تقسیم سے اس کے فاصلہ کا ظل خط مستقیم پر لا ہو تو ثابت کرو کہ تمام نقاط تقسیم سے اِس نقطہ کے فاصلوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ ہے

$$\frac{\pi}{\text{ا ما}}\;\frac{\text{جبز}\frac{2\pi\,\text{ما}}{\text{ا}}}{\text{جبز}\frac{2\pi\,\text{ما}}{\text{ا}}-\text{جم}\frac{2\pi\,\text{لا}}{\text{ا}}}$$

(369)

جس سلسلہ کو جمع کرنا ہے وہ $\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\text{ما}^2+(\text{لا}+\text{ن ا})^2}$ ہے جو

$$\frac{1}{2\,\text{خ ما}}\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\text{لا}-\text{خ ما}+\text{ن ا}}-\frac{1}{\text{لا}+\text{خ ما}+\text{ن ا}}\right)$$

کے مماثل ہے۔ اس لئے اس سلسلہ کا مجموعہ ہے

$$\frac{\pi}{2\,\text{خ ما ا}}\left\{\text{مم}\frac{\pi(\text{لا}-\text{خ ما})}{\text{ا}}-\text{مم}\frac{\pi(\text{لا}+\text{خ ما})}{\text{ا}}\right\}$$

یا
$$\frac{\pi}{2\,\text{خ ما ا}}\;\frac{\text{جب}\frac{2\pi\,\text{خ ما}}{\text{ا}}}{\text{جب}\frac{\pi(\text{لا}+\text{خ ما})}{\text{ا}}\;\text{جب}\frac{\pi(\text{لا}-\text{خ ما})}{\text{ا}}}$$

اور یہ مطلوبہ نتیجہ میں تحویل ہو جاتا ہے۔

سترہویں باب پر مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم}\left(\tfrac{1}{2}\pi\,\text{جب طہ}\right)=\tfrac{1}{4}\pi\,\text{جم}^2\text{طہ}\left(1+\frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{2\times3}\right)\left(1+\frac{\text{جم}^2\text{طہ}}{4\times6}\right)\cdots$$

۲۔ ثابت کرو کہ

$$1+\text{جب لا}=\tfrac{1}{8}(\pi+2\text{لا})^2\left\{1-\frac{(\pi+2\text{لا})^2}{4^2\pi^2}\right\}^2\left\{1-\frac{(\pi+2\text{لا})^2}{8^2\pi^2}\right\}^2\cdots$$

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\text{لا}+\text{م})(\text{لا}+\text{ن})}=-\pi^2$$

جہاں م، ن تمام صحیح عددی قیمتیں اختیار کرتے ہیں اور لا صحیح عدد نہیں ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1+\text{و}^2}{1-\text{و}^2}=\frac{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{25}+\frac{\pi^2}{4}\right)\cdots}{\left(\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{16}+\frac{\pi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{36}+\frac{\pi^2}{4}\right)\cdots}$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$1+\frac{2\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}+\frac{2\text{لا}^2}{2^2+\text{لا}^2}+\frac{2\text{لا}^2}{3^2+\text{لا}^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\left(1+4\text{لا}^2\right)\left(1+\frac{4\text{لا}^2}{3^2}\right)\left(1+\frac{4\text{لا}^2}{5^2}\right)\cdots\cdots}{\left(1+\text{لا}^2\right)\left(1+\frac{\text{لا}^2}{2^2}\right)\left(1+\frac{\text{لا}^2}{3^2}\right)\cdots\cdots}$$

۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۳}{۵^۲}+\frac{۶}{۷^۲}+\frac{۱۰}{۹^۲}+\cdots=\frac{\pi^۲}{۲۴}\left(۱-\frac{\pi^۲}{۱۲}\right)$$

۷ — اگر

$$ل(لا)=لا\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱-\left(\frac{لا}{ن\,ل}\right)^۲\right\}،\quad م(لا)=\prod_{۱}^{\infty}\left\{۱-\left(\frac{۲}{۲ن-۱}\times\frac{لا}{ل}\right)^۲\right\}$$

تو ل $(لا+\frac{۱}{۲}ل)$ کو م (لا) کی رقوم میں اور م $(لا+\frac{۱}{۲}ل)$ کو ل (لا) کی رقوم میں بیان کرو، اور پھر $\frac{۱\times۳\times۵\cdots(۲م-۱)}{۲^م\,\lfloor م}\sqrt{۲م+۱}$ کی انتہا معلوم کرو جبکہ م لامتناہی ہو۔

(370) ۸ — اگر ض$_ر$ سے وہ حاصل ضرب تعبیر ہوں جو $\frac{۱}{۱^۲}$، $\frac{۱}{۲^۲}$، $\frac{۱}{۳^۲}$، ... میں سے ر، ر رقموں کو لیکر ضرب دینے سے بنتے ہیں تو ثابت کرو کہ

$$۲^{۲ن}ض_ن=\frac{\pi^{۲ن}}{\lfloor ۲ن}+\frac{\pi^{۲ن-۲}}{\lfloor ۲ن-۲}ض_۱+\frac{\pi^{۲ن-۴}}{\lfloor ۲ن-۴}ض_۲+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\pi^۲}{\lfloor ۲}ض_{ن-۱}+ض_ن$$

۹ — ثابت کرو کہ

$$۱-\frac{۱^۲}{۲^۲}-\frac{۱^۲\times۳^۲}{۲^۲\times۴^۲}-\frac{۱^۲\times۳^۲\times۵^۲}{۲^۲\times۴^۲\times۶^۲}-\cdots=\frac{۲}{\pi}$$

۱۰ — جمع کرو سلسلہ

$$\frac{۱}{۱^۲\times۳^۲}+\frac{۱}{۳^۲\times۵^۲}+\frac{۱}{۵^۲\times۷^۲}+\cdots$$

۱۱ — ثابت کرو کہ مثبت صحیح عددوں کے ہر جوڑے کے متکافیوں کی چوتھی قوتوں کے حاصل ضربوں کا مجموعہ $\frac{۳۸۴\,\pi^{۸}}{\underline{|۹}\;\underline{|۵}}$ ہے۔

۱۲ — ثابت کرو کہ

$$\left(۱+\frac{۲}{۱^{۲}+۱}+\frac{۲}{۲^{۲}+۱}+\frac{۲}{۳^{۲}+۱}+\cdots\right)\left(\frac{۱}{۱^{۲}+۴}+\frac{۱}{۳^{۲}+۴}+\frac{۱}{۵^{۲}+۴}+\cdots\right)=\frac{\pi^{۲}}{۸}$$

۱۳ — ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{۱}{۱\times۲\times۳}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۲\times۳\times۴}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۳\times۴\times۵}\right)^{۲}+\cdots$$

کا مجموعہ $\frac{۱}{۴}\pi^{۲}-\frac{۳۹}{۱۶}$ ہے۔

۱۴ — ثابت کرو کہ

$$\text{نہا}_{ر=\infty}\ \frac{(م^{۲}-۱)(۲^{۲}م^{۲}-۱)\cdots(ر^{۲}م^{۲}-۱)}{\{م^{۲}-(م-۱)^{۲}\}\{۲^{۲}م^{۲}-(م-۱)^{۲}\}\cdots\{ر^{۲}م^{۲}-(م-۱)^{۲}\}}=(م-۱)$$

۱۵ — ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{۱^{۲}+لا^{۲}}-\frac{۳}{۳^{۲}+لا^{۲}}+\frac{۵}{۵^{۲}+لا^{۲}}-\cdots$$

کا مجموعہ $\frac{۱}{۴}\pi$ قطز $\frac{۱}{۲}\pi$ لا ہے۔

۱۶ — ثابت کرو کہ

$$مس^{-۱}لا-مس^{-۱}\frac{۱}{۳}لا+مس^{-۱}\frac{۱}{۵}لا-\cdots=مس^{-۱}مسفر\frac{۱}{۴}\pi لا$$

۱۷ — ثابت کرو کہ

$$لوک\,۱۲-۲\,لوک\,\pi=\frac{م_{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}\frac{م_{۴}}{۴}+\frac{۱}{۳}\frac{م_{۶}}{۶}+\cdots+\frac{۱}{ن}\frac{م_{۲ن}}{۲ن}+\cdots$$

جہاں $م_ر$ ان سب عددوں کی ر ویں قوتوں کے متکافیوں کا مجموعہ ہے جو مفرد نہیں ہیں —

۱۸ — ایک مربع ا ب ج د کے ضلع ب ج کو غیر معین طور پر خارج کر دیا گیا ہے اور اس پر حصے ج $ج_۱$، $ج_۱ ج_۲$، $ج_۲ ج_۳$، ... ہر ایک ب ج کے مساوی قطع کئے گئے ہیں۔ اگر زاویے ب ا $ج_۱$، ب ا $ج_۲$، ب ا $ج_۳$، ... علی الترتیب $ط_۱$، $ط_۲$، $ط_۳$، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب } ط_1 \text{ جب } ط_2 \text{ جب } ط_3 \ldots \infty \text{ تک} = \sqrt{2\pi \text{ قتز } \pi}$$

۱۹ — اگر تمام مفرد عدد ۲، ۳، ۵، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\ldots = \frac{6}{\pi^2}$$

(371)

اور

$$\frac{2^2}{1+2^2} \times \frac{3^2}{1+3^2} \times \frac{5^2}{1+5^2} \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{15}$$

$$\frac{2^4}{1+2^4} \times \frac{3^4}{1+3^4} \times \frac{5^4}{1+5^4} \ldots\ldots = \frac{\pi^4}{105} \quad \text{(یولر)}$$

۲۰ — دوہرے طور پر لامتناہی سلسلہ

$$\sum_{م=1}^{م=\infty} \sum_{ن=1}^{ن=\infty} (-1)^{م+ن} \frac{\text{جم } م \text{ لا جم } ن \text{ ما}}{م\,ن\,(م^2+ن^2)}$$

ما کے ضعفوں کی جیوب التمام کے اکہرے طور پر لامتناہی سلسلہ کی شکل میں بیان کرو —

۲۱ — ثابت کرو کہ

$$\Pi \left\{ \frac{(ن\pi + ع)^2 + ب^2}{ن^2 \pi^2} \right\}$$

$= ($ جتزیہ^2 بہ $\sqrt{2}$ + جتم^2 بہ $\sqrt{2}$ − ۲ جم ۲ عہ جم بہ $\sqrt{2}$ جتزیہ بہ $\sqrt{2}$ + جتم^2 ۲ عہ$) \backslash 4($عہ^2 + بہ$^2)$

جہاں ن، تمام صحیح عددی قیمتیں مثبت اور منفی اختیار کرتا ہے بجز صفر کے۔

۲۲ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{5\times6\times7\times8}+\frac{1}{9\times10\times11\times12}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\text{ لوک } 2-\frac{1}{24}\pi \text{ ،}$$

$$\frac{1}{1\times3\times5\times7}+\frac{1}{9\times11\times13\times15}+\frac{1}{17\times19\times21\times23}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\pi}{96(2+\sqrt{2})}$$

۲۳ — اگر ف (خ لا) $= \left(1+\frac{\text{خ لا}}{\text{ا}}\right)\left(1+\frac{\text{خ لا}}{\text{ب}}\right)\left(1+\frac{\text{خ لا}}{\text{ج}}\right)\cdots = $ ا + خ ب

تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ب}}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ج}}+\cdots=\text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^2}{1^2}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^2}{2^2}+\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}^2}{3^2}+\cdots$$

$$=\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{مس}\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}}-\text{مسز}\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}}}{\text{مس}\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}}+\text{مسز}\frac{\pi\text{لا}}{\sqrt{2}}}\right)$$

۲۴ — ثابت کرو کہ

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{ن^۲ + لا^۲} = \frac{\pi \sqrt{۲}}{۴ لا^۳} \times \frac{جبز \pi لا \sqrt{۲} + جب \pi لا \sqrt{۲}}{جمز \pi لا \sqrt{۲} - جم \pi لا \sqrt{۲}} - \frac{۱}{۲ لا^۴}$$

۲۵ — ثابت کرو کہ

$$\sum_{ن = -\infty}^{ن = \infty} \frac{۱}{(ن \pi + طہ)^۲} = قم^۲ طہ$$

۲۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{نو^{ب + لا} + نو^{ج - لا}}{نو^{ب} + نو^{ج}}$$

$$= \left\{۱ + \frac{۴ (ب - ج) لا + ۴ لا^۲}{\pi^۲ + (ب - ج)^۲}\right\}\left\{۱ + \frac{۴ (ب - ج) لا + ۴ لا^۲}{۹ \pi^۲ + (ب - ج)^۲}\right\}\left\{۱ + \frac{۴ (ب - ج) لا + ۴ لا^۲}{۲۵ \pi^۲ + (ب - ج)^۲}\right\}$$

اور

$$\frac{نو^{ب + لا} - نو^{ج - لا}}{نو^{ب} - نو^{ج}} = \left(۱ + \frac{۲ لا}{ب - ج}\right)\left\{۱ + \frac{۴ (ب - ج) لا + ۴ لا^۲}{۴ \pi^۲ + (ب - ج)^۲}\right\}$$

$$\left\{۱ + \frac{۴ (ب - ج) لا + ۴ لا^۲}{۱۶ \pi^۲ + (ب - ج)^۲}\right\} \ldots\ldots \quad \text{(نیولر)}$$

(372)

۲۷ — اگر

$$ف = \frac{۱}{ن - م} - \frac{۱}{ن + م} + \frac{۱}{۳ ن - م} - \frac{۱}{۳ ن + م} + \frac{۱}{۵ ن - م} - \frac{۱}{۵ ن + م} + \ldots$$

$$ق = \frac{۱}{(ن - م)^۲} + \frac{۱}{(ن + م)^۲} + \frac{۱}{(۳ ن - م)^۲} + \frac{۱}{(۳ ن + م)^۲} + \frac{۱}{(۵ ن - م)^۲} + \ldots\ldots$$

$$س = \frac{۱}{(ن - م)^۳} - \frac{۱}{(ن + م)^۳} + \frac{۱}{(۳ ن - م)^۳} - \frac{۱}{(۳ ن + م)^۳} + \ldots$$

$$س = \frac{1}{(ن-م)^2} + \frac{1}{(ن+م)^2} + \frac{1}{(3ن-م)^2} + \frac{1}{(3ن+م)^2} + \cdots$$

تو ثابت کرو کہ

$$ف = \frac{ک\pi}{2ن}،\quad ق = \frac{(2ک^2+2)\pi^2}{2\times4\times ن^2}،\quad ر = \frac{(2ک^3+6ک)\pi^3}{2\times4\times6\times ن^3}،$$

$$س = \frac{(24ک^4+24ک^2+8)\pi^4}{2\times4\times6\times8\times ن^4}$$

جہاں $ک = مس \frac{م\pi}{2ن}$ (یولر)

۲۸ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \cdots\cdots$$

کا مجموعہ جس میں وہ سب طاق عدد جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں لئے گئے ہیں $\pi^3 / 18\sqrt{3}$ ہے۔ (یولر)

۲۹ — ثابت کرو کہ اُن سب عددوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ $\frac{4\pi^2}{27}$ ہے جو ۳ سے تقسیم پذیر نہیں ہیں۔

۳۰ — ثابت کرو کہ

$$\frac{جنز ا + جنز ج}{جنز ج} = \left(1 + \frac{ا}{ج}\right)\left(1 - \frac{2ج ا - ا^2}{\pi^2 + ج^2}\right)\left(1 + \frac{2ج ا + ا^2}{4\pi^2 + ج^2}\right)$$

$$\times\left(1 - \frac{2ج ا - ا^2}{9\pi^2 + ج^2}\right)\cdots\cdots$$

اور

$$\frac{جمز ا - جمز ج}{1 - جمز ج} = \left(1 - \frac{ا^2}{ج^2}\right)\left(1 - \frac{2ج ا - ا^2}{4\pi^2 + ج^2}\right)\left(1 + \frac{2ج ا + ا^2}{4\pi^2 + ج^2}\right)$$

$$\times\left(\text{۱}-\frac{\text{۲ج ما} - \text{ما}^{\text{۲}}}{\text{۱٦}\,\pi^{\text{۲}}+\text{ج}^{\text{۲}}}\right)\text{ .... (یولر)}$$

۳۱ — ثابت کرو کہ جب ن طاق ہو تو

$$\text{قم}^{\text{۲}}\frac{\pi}{\text{۲ن}}+\text{قم}^{\text{۲}}\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}}+\dots+\text{قم}^{\text{۲}}\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}}=\frac{\text{۱}}{\text{٦}}(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})$$

$$\text{قم}^{\text{۴}}\frac{\pi}{\text{۲ن}}+\text{قم}^{\text{۴}}\frac{\text{۲}\pi}{\text{۲ن}}+\dots+\text{قم}^{\text{۴}}\frac{(\text{ن}-\text{۱})\pi}{\text{۲ن}}=\frac{\text{۱}}{\text{۹۰}}(\text{ن}-\text{۱})(\text{ن}-\text{۲})\times(\text{ن}^{\text{۲}}+\text{۳ن}-\text{۱۳})$$

۳۲ — ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲ن}})\left(\text{۱}+\frac{\text{لا}^{\text{۲ن}}}{\text{۳}^{\text{۲ن}}}\right)\left(\text{۱}+\frac{\text{لا}^{\text{۲ن}}}{\text{۵}^{\text{۲ن}}}\right)\dots$$

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}}}\prod_{\text{۱}}^{\text{ن}-\text{۱}}(\text{جمز}\,\pi\,\text{عر لا}+\text{جم}\,\pi\,\text{بر لا})\text{، اگر ن جفت ہے}$$

اور

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{ن}-\text{۱})}}\,\text{جمز}\,\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\pi\,\text{لا}\prod_{\text{۱}}^{\text{ن}-\text{۲}}(\text{جمز}\,\pi\,\text{عر لا}+\text{جم}\,\pi\,\text{بر لا})\text{ اگر ن طاق ہے}$$

جہاں عر، بر علی الترتیب جب $\frac{\text{ر}\pi}{\text{۲ن}}$، جم $\frac{\text{ر}\pi}{\text{۲ن}}$ کو تعبیر کرتے ہیں، اور ر ایک طاق عدد ہے۔ (گلیشیر)

(873)

۳۳ — ثابت کرو کہ لامتناہی حاصل ضرب

$$\text{لا}^{\text{ن}}(\text{۱}+\text{لا}^{\text{۲ن}})\left(\text{۱}+\frac{\text{لا}^{\text{۲ن}}}{\text{۲}^{\text{۲ن}}}\right)\left(\text{۱}+\frac{\text{لا}^{\text{۲ن}}}{\text{۳}^{\text{۲ن}}}\right)\dots$$

$$=\frac{\text{۱}}{\pi^{\text{ن}}\,\text{۲}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{ن}}}\prod_{\text{۱}}^{\text{ن}-\text{۱}}(\text{جمز}\,\text{۲}\pi\,\text{عر لا}-\text{جم}\,\text{۲}\pi\,\text{بر لا})$$

اگر ن جفت ہے اور

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(ن-1)}\pi^{ن}}\ جنز\,\pi\, لا \prod_{1}^{ن-1}\left(جمز\ ۲\pi\ عہ\ لا - جم\ ۲\pi\ بہ\ لا\right)$$

اگر ن طاق ہے۔ عہ اور بہ کا وہی مفہوم لیا جائے جو سوال ماسبق میں تھا۔

(گلیشیر)

۳۴۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{1^{2ن}+لا^{2ن}} + \frac{1}{2^{2ن}+لا^{2ن}} + \frac{1}{3^{2ن}+لا^{2ن}} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{\pi}{ن\ لا^{2ن-1}} \sum_{1}^{ن-1} \frac{عہ\ جنز\ ۲\pi\ عہ\ لا + بہ\ جب\ ۲\pi\ بہ\ لا}{جمز\ ۲\pi\ عہ\ لا - جم\ ۲\pi\ بہ\ لا} - \frac{1}{2\ لا^{2ن}}$$

جہاں عہ اور بہ کے وہی معنے ہیں جو پچھلے سوال میں تھے۔ (گلیشیر)

۳۵۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{د\ لا + ب\ ما}{لا^2 + ما^2} + \sum_{ر=1}^{ر=\infty} \left\{ \frac{د\ لا + ب\ ما + ر(د^2+ب^2)}{(لا + ر\ د)^2 + (ما + ر\ ب)^2} + \frac{د\ لا + ب\ ما - ر(د^2+ب^2)}{(لا - ر\ د)^2 + (ما - ر\ ب)^2} \right\}$$

$$= \pi\ جب\left(2\pi \frac{د\ لا + ب\ ما}{د^2+ب^2}\right) \Big/ \left\{ جمز\left(2\pi \frac{د\ ما - ب\ لا}{د^2+ب^2}\right) - جم\left(2\pi \frac{د\ لا + ب\ ما}{د^2+ب^2}\right) \right\}$$

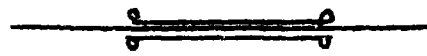
(374)

اٹھارواں باب

مسلسل کسریں

π کے غیر منطق ہونیکا ثبوت

۳۰۲ — فرض کرو کہ مستدق سلسلہ

$$۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۱\times \text{ج}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۱\times۲\times \text{ج}(\text{ج}+۱)} - \frac{\text{لا}^{۶}}{۱\times۲\times۳\times \text{ج}(\text{ج}+۱)(\text{ج}+۲)} + \cdots$$

ف(ج) سے تعبیر ہوتا ہے، تب

$$\text{ف}(\text{ج}+۱) - \text{ف}(\text{ج}) = \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ج}(\text{ج}+۱)}\ \text{ف}(\text{ج}+۲)$$

اس لئے

$$\frac{\text{ف}(\text{ج})}{\text{ف}(\text{ج}+۱)} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ج}(\text{ج}+۱)}\ \frac{\text{ف}(\text{ج}+۲)}{\text{ف}(\text{ج}+۱)}$$

پس ف(ج+۱) \ ف(ج) کو دوسری جماعت کی مسلسل کسر

$$\frac{۱}{۱-}\ \frac{\text{لا}^{۲} \backslash \text{ج}(\text{ج}+۱)}{۱-}\ \frac{\text{لا}^{۲} \backslash (\text{ج}+۱)(\text{ج}+۲)}{۱-}\ \frac{\text{لا}^{۲} \backslash (\text{ج}+۲)(\text{ج}+۳)}{۱-}\cdots$$

کے طور پر بیان کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج = $\frac{۱}{۲}$ اور لا کی بجائے $\frac{۱}{۲}$ لا لکھو تو سلسلہ ف(ج) ہوجاتا ہے

$$1 - \frac{لا^{2}}{2\times1} + \frac{لا^{4}}{4\times3\times2\times1} - \dots\dots$$

$$= \text{جم لا}$$ پس

اور ف (ج+۱)، $\frac{\text{جب لا}}{لا}$ ہو جاتا ہے۔ پس

$$\frac{\text{مس لا}}{لا} = \frac{1}{1-}\;\frac{لا^{2}}{3-}\;\frac{لا^{2}}{5-}\;\frac{لا^{2}}{7-}\dots\dots$$

یہ مس لا کے لئے دوسری جماعت کی ایک مسلسل کسر ہے۔

۳۰۴ — لیمبرٹ کا وہ ثبوت[51] جو π کے غیر منطق ہونے کے متعلق ہے مختصراً بالا مسلسل کسر پر منحصر ہے۔ رکھو لا = $\frac{1}{4}\pi$

اور بفرض امکان رکھو $\frac{1}{4}\pi = \frac{م}{ن}$ جہاں م اور ن صحیح عدد ہیں۔

تب
$$1 = \frac{م}{ن-}\;\frac{م^{2}}{3ن-}\;\frac{م^{2}}{5ن-}\dots\dots$$

(375) اب چونکہ کسی خاص رقم کے بعد کسروں $\frac{م}{ن}$ ، $\frac{م^{2}}{3ن}$ ، $\frac{م^{2}}{5ن}$ ..... کے نسب نما شمار کنندوں کی بہ نسبت ایک ایسے عدد سے بڑے ہیں جو ایک سے بڑا ہے اس لئے ایک مشہور مسئلہ[52] کی رو سے مساوات کی بائیں جانب کی مسلسل کسر ایک غیر منطق اظہار رکھتی ہے اور اسلئے ایک کے مساوی نہیں ہو سکتی۔ پس $\frac{1}{4}\pi$ کسر $\frac{م}{ن}$ کے مساوی نہیں ہو سکتا جبکہ م اور ن صحیح عدد ہوں اور اسلئے π غیر منطق ہے۔ بلاشبہ یہ نتیجہ دفعہ (۲۵۱ د) کے وسیع تر

---

[51] سنہ ۱۷۶۱ء میں برلن اکاڈیمی کی یادداشت میں شائع ہوا۔

[52] دیکھو کرسٹل کا الجبرا جلد دوم صفحہ (۴۸۴)۔

مسئلہ میں شامل ہے بجز یہ ہے کہ π ایک علوی عدد ہے۔

دو علوی ہندسی سلسلوں کے خارج قسمت کا استحالہ

۳۰۴ — کسر فا (عہ، بہ + ۱، جہ + ۱، لا) \ فا (عہ، بہ، جہ، لا)

کو جبیں فا (عہ، بہ، جہ، لا) علوی ہندسی سلسلہ

$$۱ + \frac{عہ \times بہ}{۱ \times جہ} لا + \frac{عہ (عہ + ۱) \times بہ (بہ + ۱)}{۱ \times ۲ \times جہ (جہ + ۱)} لا^۲ + \ldots$$

کو تعبیر کرتا ہے مسلسل کسر

$$\frac{۱}{۱-} \frac{ک_۱ لا}{۱-} \frac{ک_۲ لا}{۱-} \frac{ک_۳ لا}{۱-} \ldots\ldots$$

میں تحویل کر سکتے ہیں جہاں

$$ک_۱ = \frac{عہ (جہ - بہ)}{جہ (جہ + ۱)}،\quad ک_۲ = \frac{(بہ + ۱)(جہ + ۱ - عہ)}{(جہ + ۱)(جہ + ۲)}،$$

$$ک_۳ = \frac{(عہ + ۱)(جہ + ۱ - بہ)}{(جہ + ۲)(جہ + ۳)}،$$

$$ک_۴ = \frac{(بہ + ۲)(جہ + ۲ - عہ)}{(جہ + ۳)(جہ + ۴)}، \ldots\ldots،$$

$$ک_{۲ن-۱} = \frac{(عہ + ن - ۱)(جہ + ن - ۱ - بہ)}{(جہ + ۲ن - ۲)(جہ + ۲ن - ۱)}،$$

$$ک_{۲ن} = \frac{(بہ + ن)(جہ + ن - عہ)}{(جہ + ۲ن - ۱)(جہ + ۲ن)}$$

اس استحالہ کا فائدہ تمثیل ذیل سے ظاہر ہوگا۔ سلسلہ

ف = جب ف جم ف {۱ + ۲/۳ جب۲ ف + (۲×۴)/(۳×۵) جب۴ ف + ...}

واور ضابطہ ۱۱ میں رکھو ع = ۱، ب = ۱، جب = ۱/۲، لا = جب۲ ف تو

ف = (جب ف جم ف)/(۱ −) (۱×۲)/(۱×۳) جب۲ ف/(۱ −) (۱×۲)/(۳×۵) جب۲ ف/(۱ −) (۳×۴)/(۵×۷) جب۲ ف/(۱ −) ...

اس کے دوسرے متدق سے ف کیلئے اسنیلیس (Snellius)
کا یہ ضابطہ حاصل ہوتا ہے

ف = (جب ف جم ف)/(۱ − ۲/۳ جب۲ ف) = (۳ جب ۲ ف)/(۲ (۲ + جم ۲ ف))

یولر کا استحالہ

۵۰۴ — یولر کے مسئلہ[1]

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots = \frac{1}{a_1-}\;\frac{a_1^2}{a_1+a_2-}\;\frac{a_2^2}{a_2+a_3-}\;\frac{a_3^2}{a_3+a_4-}\ldots$

سے یہ مسئلہ اس شکل

$\frac{1}{a_1}\pm\frac{1}{a_2}\pm\frac{1}{a_3}\pm\ldots = \frac{1}{a_1\mp}\;\frac{a_1^2}{a_2\pm a_1\mp}\;\frac{a_2^2}{a_3\pm a_2\mp}\ldots$

میں بھی لکھا جا سکتا ہے دیگر سلسلے مستحیل ہو سکتے ہیں۔

---

[1] کرسٹل کا الجبر جلد دوم صفحہ ۴۸۷

اس طریقہ کی مثال یہ ہے کہ مسئلہ

$$\frac{\pi}{ن} \text{ مم } \frac{م\pi}{ن} = \frac{1}{م} - \frac{1}{ن-م} + \frac{1}{ن+م} - \frac{1}{۲ن-م} + \frac{1}{۲ن+م} - \dots$$

سے مسئلہ

$$\frac{\pi}{ن} \text{ مم } \frac{م\pi}{ن} = \frac{1}{م+} \; \frac{م^2}{ن-۲م+} \; \frac{(ن-م)^2}{۲م+} \; \frac{(ن+م)^2}{۲م+} \; \frac{(۲ن-م)^2}{۲م+}$$

$$\frac{(۲ن+م)^2}{ن-۲م+} \dots$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اٹھارویں باب پر مثالیں

امثلہ (۱) تا (۱۳) میں مندرجہ مسئلوں کی تحقیق کرو۔

۱۔ $\frac{مس^{-1} لا}{لا} = \frac{1}{1+} \; \frac{لا^2}{3+} \; \frac{لا^2}{5+} \dots\dots\dots$

۲۔ $مس\, ن\, لا = \frac{ن\, مس\, لا}{1-} \; \frac{(ن^2-1)\, مس^2 لا}{3-} \; \frac{(ن^2-4)\, مس^2 لا}{5-}$

$$\frac{(ن^2-9)\, مس^2 لا}{7-} \dots\dots$$

جہاں $لا < \frac{1}{2}\pi$ اور ن پر کوئی قید نہیں ہے۔

۳۔ $مس\, ن\, لا = \frac{ن\, مس\, لا}{1 - مس^2 لا -} \; \frac{(ن^2-4)\, مس^2 لا}{3 - 3\, مس^2 لا -}$

$$\frac{(ن^2-16)\, مس^2 لا}{5 - 5\, مس^2 لا -} \dots\dots$$

۴ — مس ن لا = ن مس لا / ۱ — (ن۲ - ۱) مس۲ لا / ۳ - مس۲ لا — (ن۲ - ۹) مس۲ لا / ۵ - ۳ مس۲ لا — ...

۵ — مس⁻¹ لا = لا / ۱ + لا۲ / ۳ + ۴ لا۲ / ۵ + ...

۶ — مس⁻¹ لا = لا / ۱ - لا۲ + ۴ لا۲ / ۳ - ۳ لا۲ + ۱۲ لا۲ / ۵ - ۵ لا۲ + ...

۷ — مس⁻¹ لا = لا / ۱ + لا۲ / ۳ - لا۲ + ۹ لا۲ / ۵ - ۳ لا۲ + ...

۸ — مس ن لا = ن مس لا / ۱ — (ن۲ + ۱) مس۲ لا / ۳ — (ن۲ + ۴) مس۲ لا / ۵ — ...

۹ — ط/ن قم ط/ن = ۱ + ۱ / ن - ۱ + ن(ن - ۱) / ۱ + ن(ن + ۱) / ن - ۱ + ۲ن(۲ن - ۱) / ۱ + ...

۱۰ — جب ط لا / ط لا = ۱ + لا / ۱ — لا + ۱ / لا — لا - ۱ / لا + ۱ — ۲(۲ + لا) / لا — ۲(۲ - لا) / لا + ۱ — ...

۱۱ — جم ط لا / ۲ = ۱ + لا / ۱ — لا + ۱ / لا — لا - ۱ / لا + ۲ — ۳(لا + ۳) / لا — ...

۱۲ — م ۱/لا = ۱ / لا - ۱ + ۱ / ۱ + ۱ / ۳ لا - ۲ + ۱ / ۱ + ۱ / ۵ لا - ۲ + ...

۱۳ — ۱ - جب ط / ط = (۱×۲ / ۱×۳) جب۲ ½ط / ۱ — (۱×۲ / ۳×۵) جب۲ ½ط / ۱ — (۳×۴ / ۵×۷) جب۲ ½ط / ۱ — ...

(÷)

(378)

متفرق مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جم م لا} - \text{جم م عہ}}{\text{جم لا} - \text{جم عہ}} = \text{قم عہ} \{ \text{۲ جب معہ جم (م-۱) لا} + \text{۲ جب ۲ عہ جم (م-۲) لا}$$
$$+ \ldots\ldots + \text{۲ جب (م-۱) عہ جم لا} + \text{جب م عہ} \}$$
(ہرمائٹ)

جہاں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

۲۔ اگر م اور ن مثبت صحیح عدد ہوں اور عہ $= \frac{\text{ک}\,\pi}{\text{ن}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب م لا}}{\text{جب ن لا}} = \frac{1}{\text{۲ن}} \Sigma (-1)^{\text{ک}} \text{جب م عہ مم} \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{2}$$

اور نیز یہ جملے

$$= \frac{1}{\text{۲ن}} \Sigma (-1)^{\text{ک}} \text{جب م عہ مم (لا - عہ)}$$

یا

$$= \frac{1}{\text{۲ن}} \Sigma (-1)^{\text{ک}} \text{جب م عہ قم (لا - عہ)}$$

بموجب اسکے کہ م + ن جفت یا طاق ہو۔ (ہرمائٹ)

۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مم (لا - عہ) مم (لا - بہ)} \ldots \text{مم (لا - لہ)}$$
$$= \text{جم} \tfrac{1}{2} \text{ن} \pi + \Sigma \text{ا مم (لا - عہ)}$$

جہاں ا = مم (عہ - بہ) مم (عہ - جہ) ..... مم (عہ - لہ)

(ہرمائٹ)

۴ — اگر ا، ب، ج ایک مثلث کے زاویے ہوں اور لا، ما، ی وہ حقیقی مقداریں ہیں جو مساواتوں

$$جمزلا\ (جب\ ب\ جب\ ج)^{\frac{1}{2}} = جم\ \tfrac{1}{2}\ ا،$$

$$جمزما\ (جب\ ج\ جب\ ا)^{\frac{1}{2}} = جم\ \tfrac{1}{2}\ ب،$$

$$جمزی\ (جب\ ا\ جب\ ب)^{\frac{1}{2}} = جم\ \tfrac{1}{2}\ ج$$

سے حاصل ہوئی ہیں تو ثابت کرو کہ کوئی تین نقطے جو اس طور واقع ہوں کہ ان میں سے دو دو کے درمیان فاصلے علی الترتیب لا، ما، ی کے متناسب ہیں ایک خطِ مستقیم پر واقع ہوتے ہیں —

۵ — اگر لا > $\frac{1}{2}$ تو ثابت کرو کہ

$$مس\ \frac{1}{1+لا^2} < \frac{1}{1+لا+لا^2} \quad اور > \frac{1}{1-لا+لا^2}$$

۶ — ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{ن}\sum_{ف=1}^{ف=م}\ \sum_{ک=0}^{ک=ن-1} \frac{2\,ف\,ک\,\pi}{ن}$$

اُس بڑے سے بڑے صحیح عدد کے مساوی ہے جو $\frac{م}{ن}$ میں ہے۔

(379)

۷ — ثابت کرو کہ

$$مس^{-1}\frac{4\,ب^2}{(2ا+ب)^2+3ب^2} + مس^{-1}\frac{4\,ب^2}{(2ا+3ب)^2+3ب^2} + \dots + مس^{-1}\frac{4\,ب^2}{\left[2ا+(2ن-1)ب\right]^2+3ب^2} = مس^{-1}\frac{ن\,ب^2}{ا^2+ن\,ا\,ب+ب^2}$$

اور اسلئے ثابت کرو کہ لامتناہی سلسلہ

$$\text{مم}^{-1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}\right)+\text{مم}^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\text{مم}^{-1}\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)+\ldots$$

کا مجموعہ $\text{مم}^{-1}\frac{1}{2}$ ہے۔

۸ — اگر مس ا قط ب + مس ب قط ا = مس ج

تو ثابت کرو کہ مس ا قط ا + مس ب قط ب + مس ج قط ج

+ ۲ مس ا مس ب مس ج = ۰

اس نتیجہ اور معلومہ مسئلہ

جب ا جم ا + جب ب جم ب + جب ج جم ج - ۲ جب ا جب ب جب ج = ۰

کے درمیان جو تعلق ہے اسے معلوم کرو، جہاں ا، ب، ج ایک مثلث کے زاوئے ہیں۔

۹ — اگر م اور ن کوئی عدد ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب لا}\left\{1-\frac{ن(ن+1)}{(م+ن)(م+ن+1)}\cdot\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}\right.$$

$$\left.+\frac{ن(ن+1)(ن+2)(ن+3)}{(م+ن)(م+ن+1)(م+ن+2)(م+ن+3)}\cdot\frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4}-\ldots\right\}$$

$$=(م+ن\ \text{جم لا})\frac{1}{م+ن}\left\{م-\frac{\text{لا}}{1}\ م(م+1)(م+2)\right.$$

$$\left.+ن(ن+1)(ن+2)\ \text{جم لا}\frac{1}{(م+ن)(م+ن+1)(م+ن+2)}\cdot\frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3}+\ldots\right.$$

۱۰ — ثابت کرو کہ

۱	جم عہ	جم(عہ+بہ)	جم(عہ+بہ+جہ)	جم(عہ+بہ+جہ+ضہ)
جم عہ	۱	جم بہ	جم(بہ+جہ)	جم(بہ+جہ+ضہ)
جم(عہ+بہ)	جم بہ	۱	جم جہ	جم(جہ+ضہ)
جم(عہ+بہ+جہ)	جم(بہ+جہ)	جم جہ	۱	جم ضہ
جم(عہ+بہ+جہ+ضہ)	جم(بہ+جہ+ضہ)	جم(جہ+ضہ)	جم ضہ	۱

= ۰

۱۱۔ ثابت کرو کہ مقطع

۱	جم ا	جب ا	جم(۳ا+λ)
۱	جم ب	جب ب	جم(۳ب+λ)
۱	جم ج	جب ج	جم(۳ج+λ)
۱	جم د	جب د	جم(۳د+λ)

= م [ح جب(ا+س+λ)] { π جب ½ (ا-ب) }

جہاں م کوئی عددی جزو ضربی ہے اور س = ½ (ا+ب+ج+د)

۱۲۔ اگر

جم(۲لا - ما - ی) جب(ما - ی) + جم(۲ما - ی - لا) جب(ی - لا)
+ جم(۲ی - لا - ما) جب(لا - ما) = ۰

اور لا، ما، ی میں سے کوئی دو مساوی نہ ہوں یا کسی دو میں π کے ضعف کا فرق نہ ہو تو

جم ۲لا + جم ۲ما + جم ۲ی = ۰

۱۳۔ اگر صفر اور π کے درمیان طہ کی دو قیمتیں جہ اور ضہ ہوں جو مساوات

جب ۲طہ جم²(عہ+بہ) + جب ۲عہ جم²(بہ+طہ) + جب ۲بہ جم²(عہ+طہ) = ۰

کو پورا کرتی ہیں تو ثابت کرو کہ عہ اور بہ اس مساوات

(330)

جب ۲ فہ جم^2 (جہ + ضہ) + جب ۲ جہ جم^2 (ضہ + فہ) + جب ۲ ضہ جم^2 (جہ + فہ) = ۰

کو پورا کرتے ہیں۔

۱۴ــ اگر مس $\frac{طہ}{۳}$ کی تین محصلہ قیمتیں مس عہ، مس بہ، مس جہ ہوں جبکہ مس طہ دیا گیا ہو تو ثابت کرو کہ

(۱) جم عہ جم بہ جم جہ جب (عہ + بہ + جہ) + جب عہ جب بہ جب جہ جم (عہ + بہ + جہ) = ۰،

(۲) جب (بہ + جہ) جب (جہ + عہ) جب (عہ + بہ)
= جب ۲ عہ جب ۲ بہ جب ۲ جہ

۱۵ــ ثابت کرو کہ

$$\frac{\sum \text{جب}(بہ - جہ)\ \text{جم}\frac{جہ + عہ}{۲}\ \text{جم}\frac{عہ + بہ}{۲}\ \text{جب}\frac{۲عہ + ۳بہ + ۳جہ}{۲}}{\sum \text{جب}(بہ - جہ)\ \text{جم}\frac{جہ + عہ}{۲}\ \text{جم}\frac{عہ + بہ}{۲}\ \text{جم}\frac{۲عہ + ۳بہ + ۳جہ}{۲}}$$

$$= \frac{\text{جب}\ ۲(عہ + بہ + جہ) + \sum \text{جب}(۲عہ + بہ + جہ)}{\text{جم}\ ۲(عہ + بہ + جہ) + \sum \text{جم}(۲عہ + بہ + جہ)}$$

جہاں عمل جمع $\sum$ اس مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے جو زاویوں عہ، بہ، جہ کے باہمی دائری تبادلہ سے بنتا ہے۔

۱۶ــ ثابت کرو کہ اگر

$$غ = ۱ + \frac{۲\ \text{جم}\ طہ}{۱ +}\ \frac{۲\ \text{جم}\frac{طہ}{۲}}{۱ +}\ \frac{۲\ \text{جم}\frac{طہ}{۲^2}}{۱ +} \cdots\cdots$$

تو ء کی بجائے ء کا ن واں مستدق سے لینے سے جو خطا واقع ہوتی ہے وہ ہے

$$\frac{۲(ء^۲ - ۱)}{ء - \sqrt{۴ - ء^۲} \text{ عم } \frac{جم^{-۱} \frac{۱}{۲} عم ء}{(-۲)^ن}}$$

۱۷ — ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\frac{۱}{ن^۲ - ۱} - \frac{۱}{۳ ن^۲ - ۳} + \frac{۱}{۵ ن^۲ - ۵} - \ldots\ldots \infty \text{ تک}$$

کا مجموعہ ہے $\frac{\pi}{۴} \left\{ \text{قط } \frac{\pi}{ن۲} - ۱ \right\}$

۱۸ — ثابت کرو کہ مساوات مس ی = ع ی کی خیالی اصلیں نہیں ہو سکتیں تاآنکہ ع > ۱ جہاں ع حقیقی ہے، اور اگر ع > ۱ تو اسکی دو اصلیں خیالی ہونگی۔

۱۹ — ثابت کرو کہ کسی تین خطوط مستقیم ا و، ب و، ج و کے ضد توازی (Anti parallels.) ا، ب، ج میں سے گذرنیوالے اور مثلث ا ب ج کے زاویوں ا، ب، ج کے لحاظ سے، ایک نقطہ وَ پر ملتے ہیں اور نیز ثابت کرو کہ اگر و اور وَ سے مثلث کے ضلعوں پر عمود کھینچے جائیں تو ان عمودوں کے چھ نقاط پائیں ایک دائرے پر واقع ہوتے ہیں۔

اگر مرکز ہندسی ث سے ضلعوں ب ج، ج ا، ا ب پر عمود ث ل، ث م، ث ن ہوں اور دائرہ ل م ن کے محیط پر کوئی نقطہ ف ہو تو ثابت کرو کہ

$$(۴ ا^۲ + ب^۲ + ج^۲) \text{ ا ف}^۲ + (ا^۲ + ۴ ب^۲ + ج^۲) \text{ ب ف}^۲ + (ا^۲ + ب^۲ + ۴ ج^۲) \text{ ج ف}^۲$$

(381)

مستقل ہے۔

۲۰ — اگر لا حقیقی ہو اور ۱ > لا > ۰ اور اگر مس^-۱ ی سے مراد وہ کم سے کم مثبت زاویہ ہو جسکا مماس ی ہے تو ثابت کرو کہ

{ ۳لالا/۴ قط لا/۳ جیب ... } مس^-۱ = ... لا(۲ر+۱)/(۲ر+۱)^۲ - لا^۲ ... (۱-) ... مس^-۱

۲۱ — اگر مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں میں سے گزرنیوالے دائرہ پر کوئی نقطہ ف ہو تو ثابت کرو کہ

اف^۲/ب ج (۱ + جم ا - جم ب - جم ج) + ب ف^۲/ج ا (۱ - جم ا + جم ب - جم ج)

+ ج ف^۲/ا ب (۱ - جم ا - جم ب + جم ج) = ۱ + جم ا + جم ب + جم ج

۲۲ — اگر ع~ن~ = ا جم ن ط + ب جب ن ط جہاں ا اور ب ن پر منحصر نہیں ہیں تو ہندسی طور پر ثابت کرو کہ

ع~ن+۱~ - ۲ ع~ن~ جم ط + ع~ن-۱~ = ۰

ثابت کرو کہ

۲ جب^۲ ط + جب ۷ ط / ۲ جم^۲ ط - جم ۷ ط = مس ط مس^۲ (ط + π/۴) مس^۲ (ط - π/۴)

۲۳ — اگر مثلث کی مبہم صورت میں جبکہ ا، ب، ا دئے گئے ہوں بیرونی دائرے کے مرکز، مرکز ہندسی، نو نقطی دائرہ کے مرکز، اور مرکز عمودی کے دو دو محل علی الترتیب و~۱~، و~۲~، ث~۱~، ث~۲~، ن~۱~، ن~۲~، ع~۱~، ع~۲~ ہوں تو ثابت کرو کہ

ا قط $ع_1 ع_2$ = $ن_1 ن_2$ ۴ = ا قم $ث_1 ث_2$ ۳ = $و_2$ قم ۲

۲۴ — ایک مثلث کے راسوں ا، ب، ج میں سے خطوطِ مستقیم
اَبَ جَ، ب جَ اَ، ج اَبَ کھینچے گئے ہیں جو اب، بج،
ج ا سے ترتیب وار مساوی زاویے طہ بناتے ہیں اور نیز خطوطِ مستقیم
اجً بً، جً بً اً، ب اً جً کھینچے گئے ہیں جو ا جً،
ج ب، ب ا کے ساتھ ترتیب وار مساوی زاویے طہ بناتے ہیں۔
ثابت کرو کہ مثلث اَبَ جَ، اًبً جً ہر طرح ایک دوسرے کے
مساوی ہیں اور ہر ایک کا رقبہ = ۵ جب^2 طہ (مم طہ - مم ا - مم ب
- مم ج)^2 نیز ثابت کرو کہ اگر نقطہ ا سے ان مثلثوں کے بیرونی (حائط)
دائروں کے مماس $م_ا$، $مً_ا$ ہوں اور اسی طرح نقطوں ب اور ج
سے مماس $م_ب$، $مً_ب$، $م_ج$، $مً_ج$ تو

ا $م_ا$ = ج $مً_ج$، ب $م_ب$ = ا $مً_ا$، ج $م_ج$ = ب $مً_ب$

۲۵ — جمع کرو کہ سلسلہ

$$\sum_{ن = -ق}^{ن = ف} \left[\frac{1}{ن - \text{لا} - (-1)^{ن}\,\text{لا}} + \frac{1}{ن} \right]$$

جہاں قیمت ن = ۰ ترک کر دی گئی ہے اور ف، ق مثبت صحیح عدد
ہیں جو لا انتہا بڑھتے ہیں۔

۲۶ — اگر عہ = ۲ π \ ۱۷ تو ثابت کرو کہ مقداریں
جم عہ + جم ۳^2 عہ + جم ۳^4 عہ + جم ۳^6 عہ، اور جم ۳ عہ + جم ۳^3 عہ + جم ۳^5 عہ + جم ۳^7 عہ

مساوات $ی^۲ + \frac{۱}{۲} ی = ۱$ کی اصلیں ہیں، اور بتاؤ کہ جم ء کی قیمت حاصل کرنیکے لئے یہ عمل جو اوپر بتایا گیا ہے کس طرح جاری کیا جا سکتا ہے۔

سترہ ضلعوں والے ایک منتظم کثیر ضلعی کے نو متصل راس ا ب ج، د، ع، ف، گ، ھ، ک ہیں اور یہ کثیر ضلعی ایک دائرہ میں جسکا مرکز و ہے بنایا گیا ہے۔ وتروں ب ع، ج ک، د ف، گ ھ کے نقاط وسطی کے ظل و ا پر علی الترتیب ء، ب، ج، ض ہیں۔ ثابت کرو کہ ء ب اور ج ض کو قطر مانکر دو دائرے کھینچے جائیں تو ان کا مشترک وتر و میں سے گذرتا ہے اور اسکا طول $\frac{۱}{۲}$ و ا ہے۔

(382)

۲۷ — اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی اور جانبی دائروں کے مرکزوں سے نو نقطی دائرہ کا مرکز فاصلوں ء، ب، ج، ض پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۱}{ب + ج + ض - ۱۱ ء} + \frac{۱}{ج + ض + ء - ۱۱ ب} + \frac{۱}{ض + ء + ب - ۱۱ ج} + \frac{۱}{ء + ب + ج - ۱۱ ض} = ۰$$

اور یہ کہ $ء^۲ + ب^۲ + ج^۲ + ض^۲ = م^۲ (۱۳ - ۸ جم ا جم ب جم ج)$

جہاں م بیرونی دائرہ کا نیم قطر ہے۔

۲۸ — ثابت کرو کہ مس $\frac{۳\pi}{۱۱} + ۴$ جب $\frac{۲\pi}{۱۱} = \sqrt{۱۱}$

۲۹ — اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز ع اور جانبی دائروں کے مرکز ل، م، ن، ہوں تو ثابت کرو کہ مثلثات ع م ن، ع ن ل، ع ل م کے اندرونی دائرے دائرہ ا ب ج کو مس کرتے ہیں اور ان تین نقاط تماس سے جو مثلث بنتا ہے

اس کے زاویوں کے مماس علی الترتیب

$$\frac{\text{۲ جم } \tfrac{1}{2}\text{ ا} + \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ب} + \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ج} - \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ ب} - \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ ج} - ۲}{\text{۱} - \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ب} - \text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ ج} + \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ ب} + \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ ج}}$$

اور دو متشابہ جملوں کے مساوی ہیں۔

۳۰ — اگر لا ایک صحیح عدد نہ ہو تو ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\Sigma \frac{\text{۲ لا} + \text{م} + \text{ن}}{(\text{لا}+\text{م})^{2}\,(\text{لا}+\text{ن})^{2}}$$

جس میں م اور ن کو ہر ممکن طریقہ سے غیر مساوی قیمتیں (جو ع اور -ع کے درمیان صفر یا صحیح عدد ہوں) دی گئی ہیں معدوم ہوتا ہے جبکہ ع کو لا انتہا بڑھا دیا جائے۔

۳۱ — ثابت کرو کہ $\text{جب}^{\text{م}}\,\text{طہ}\ \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{طہ}$ کو اس شکل

$$\text{ا}\ {}^{\text{جب}}_{\text{جم}}(\text{م}+\text{ن})\,\text{طہ} + \text{ا}_{1}\ {}^{\text{جب}}_{\text{جم}}(\text{م}+\text{ن}-۲)\,\text{طہ} + \text{ا}_{2}\ {}^{\text{جب}}_{\text{جم}}(\text{م}+\text{ن}-۴)\,\text{طہ} + \ldots$$

میں پھیلایا جا سکتا ہے جہاں م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں۔
نیز ثابت کرو کہ

$$(\text{ف}+۲)\,\text{ا}_{\text{ف}+۲} + (\text{م}-\text{ن})\,\text{ا}_{\text{ف}+۱} + (\text{م}+\text{ن}-\text{ف})\,\text{ا}_{\text{ف}} = ۰$$

سوائے سلسلہ کی آخری رقموں کی صورت کے جبکہ م اور ن دونوں جفت ہوتے ہیں۔

۳۲ — ایک دائرہ کے محیط کو جسکا مرکز ذ ہے ن مساوی حصوں میں نقطوں ف_{1}، ف_{2}، ...، $\text{ف}_{\text{ن}}$ پر تقسیم کیا گیا ہے اور ق کوئی اندرونی

نقطہ ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\, \text{ف}_1\text{ق و} + \text{مس}\, \text{ف}_2\text{ق و} + \ldots + \text{مس}\, \text{ف}_\text{ن}\text{ق و} = \text{ن}\, \text{مس}\, \text{ف}'\text{ق}'\text{و}$$

جہاں ف′ دائرہ پر ایک نقطہ ہے ایسا کہ ق و ف′ = ن × ق و ف_1 اور ق و پر ق′ ایک نقطہ ہے ایسا کہ (اگر معین ق ر_1، ق′ ر′ دائرہ کو ر_1، ر′ میں قطع کریں) ق و ر′ = ن × ق و ر_1 ۔

(383) ۳۳ — اگر م_1، م_2، ...، $\text{م}_\text{س}$ وہ صحیح عدد ہوں جو م سے چھوٹے اور اس کے لحاظ سے مفرد ہیں اور اگر م کے مختلف مفرد اجزائے ضربی ف_1، ف_2، ... ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\prod_1^{\text{س}} \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{\text{م}_\text{ر}\pi}{\text{م}}\right) = \frac{\text{جب م ط} \times \prod \text{جب} \frac{\text{م ط}}{\text{ف}_1\text{ف}_2} \times \prod \text{جب} \frac{\text{م ط}}{\text{ف}_1\text{ف}_2\text{ف}_3\text{ف}_4} \ldots}{\prod_2^{\text{س}} \text{جب} \frac{\text{م ط}}{\text{ف}_1} \times \prod \text{جب} \frac{\text{م ط}}{\text{ف}_1\text{ف}_2\text{ف}_3} \ldots}$$

۳۴ — ف، ق، ر کی سب مثبت صحیح عددی قیمتوں کے لئے جو ہیں ایسی کہ ف + ق + ر = س جبکہ س $\geq$ ۳ ثابت کرو کہ

حاصل ضربوں جب ف ع جب ق $\left(\text{ع} + \frac{2\pi}{3}\right)$ جب ر $\left(\text{ع} + \frac{4\pi}{3}\right)$

کا مجموعہ صفر ہے سوائے اس صورت کے جبکہ س، ۳ کا ضعف ہو اور

یہ مجموعہ - $\frac{۱}{۴}$ جب س ع ہے جبکہ س، ۳ کا ایک ضعف ہو -

۳۵ - اگر لا = مس ۲ طہ تو ثابت کرو کہ

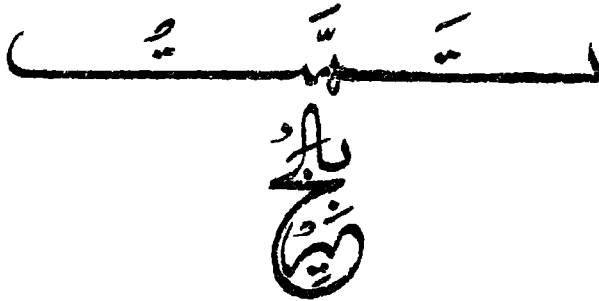
$$\text{مس طہ} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{۴} + \frac{\text{لا}^{۴}}{۸} - \frac{۵}{۶۴}\,\text{لا}^{۶} + \cdots\right\}،$$

$$\text{جب طہ} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{۳}{۸}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۳۱}{۱۲۸}\,\text{لا}^{۴} - \frac{۱۸۷}{۱۰۲۴}\,\text{لا}^{۶} + \cdots\right\}،$$

$$۲\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}\,\text{طہ} = \frac{\text{لا}}{۲}\left\{۱ - \frac{۱۱}{۳۲}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۴۳۱}{۲۰۴۸}\,\text{لا}^{۴} - \cdots\right\}$$

تمت

بالخیر

۴۸۶/۹۲

اصطلاحات

علم مثلث مستوی

Absolutely convergent	مطلقاً مستدق
Ambiguity of sign	علامت کا ابہام
Ambiguous sign	مبہم علامت
Analytical	تحلیلی
Argument	دلیل، وجہ
Base	اساس، قاعدہ
Centroid	مرکز ہندسی
Circle of convergence	استدقاق کا دائرہ
Circular functions	دائری تفاعل
Circular measure	دائری ناپ
Circum-circle	حائط دائرہ، بیرونی دائرہ
Circumscribed polygon	حائط کثیر الاضلاع
Complex number	ملتف عدد
Complex variable	ملتف متغیر
Conditionally convergent	مشروطاً مستدق
Continuous functions	مسلسل تفاعل

Convergence	استدقاق
Coterminal angles	ہم اختتامی زاویے
Depression (angle of)	(زاویہ) نشیب
Doubly periodic	دو دوری
Elevation	ارتفاع
Escribed circles	جانبی دائرے
Even functions	جفت تفاعل
Exponential functions	قوت نمائی تفاعل
Exponential series	قوت نمائی سلسلہ
External bisectors	خارجی ناصف
Generalized logarithms	تعمیمی لوکارتم
Grades	مرتبے
Hyperbolic functions	زائدی تفاعل
Hyperbolic cosine (cosh)	زائدی جیب التمام (جمز)
Hyperbolic sine (sinh)	زائدی جیب (جبز)
Hyperbolic tangent (tanh)	زائدی مماس (مسز)
Hyperbolic cotangent (coth)	زائدی مماس التمام (ممز)
Hyperbolic secant (sech)	زائدی قاطع (قطز)
Hyperbolic cosecant (cosech)	زائدی قاطع التمام (قمز)
Hypergeometric series	علوی ہندسی سلسلہ
Identity	متماثلہ
In-circle	اندرونی دائرہ
Inequality	لاتساوی
Infinite products	لامتناہی حاصل ضرب
Infinite series	لامتناہی سلسلہ

Inscribed polygon	اندرونی کثیرالاضلاع
Integral values	صحیح عددی قیمتیں
Internal bisectors	اندرونی ناصف
Inverse circular functions	مقلوب دائری تفاعل
Irrational	غیرمنطق
Lateral	جانبی
Limit	انتہا
Limits	حدود
Maximum	اعظم
Minimum	اقل
Minute	دقیقہ
Modulus	مقیاس
Multiple angles	ضعفی زاویے
Natural circular functions	طبعی دائری تفاعل
Natural logarithms	طبعی لوکارتم
Necessary and sufficient condition	ضروری اور کافی شرط
Nine-point circle	نونقطی دائرہ
Oblique-angled triangle	غیرقائم الزاویہ مثلث
Odd functions	طاق تفاعل
Orthocentre	مرکز عمودی
Parallelepiped	متوازی السطوح
Partial fractions	جزوی کسور
Pedal line	خط پائین
Pedal triangle	مثلث پائین
Period	دور

Periodicity	دوریت
Porismatic systems	استنباطی نظام
Principal value	صدر قیمت
Projection	ظل
Quadrature of the circle	دائرہ کی تربیع
Radian	نیم قطری
Raduis of convergence	استدقاق کا نصف قطر
Raduis vector	سمتی نیم قطر
Real variable	حقیقی متغیر
Regular polygon	منتظم کثیر الاضلاع
Second	ثانیہ
Sector	قطاع
Sequence	تواتر
Semi-convergent	نیم مستدق
Sexagesimal system	ستینی نظام
Singly periodic	یک دوری
Submultiple angles	تحت ضعفی زاوے
Sum-functions	مجموعہ تفاعل
Symmetrical functions	متشاکل تفاعل
Transcendental number	علوی عدد
Trigonometrical functions	مثلثی تفاعل
Uniform convergence	یکساں استدقاق